LVI Olimpiada Fizyczna – zawody III stopnia

Zadanie 1

Piłka uderza w poziomą podłogę pod kątem α z prędkością v_0. Współczynnik tarcia piłki o podłogę jest równy μ. W jakiej odległości od miejsca pierwszego uderzenia piłka ponownie uderzy w podłogę?

Podaj wartości liczbowe dla $\alpha = 45°$, $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$ w dwóch przypadkach: $\mu = 0{,}1$ i $\mu = 0{,}8$.

Piłka nie obraca się przed zderzeniem. Czas zderzenia jest bardzo krótki, a w trakcie zderzenia ugięcie piłki jest zaniedbywalnie małe w porównaniu z jej promieniem. Piłka jest idealnie sprężysta, tzn. w przypadku, gdy nie obracając się uderza pionowo w podłogę, zderzenie jest idealnie sprężyste. Grubość powłoki piłki jest bardzo mała w porównaniu z promieniem. Powłoka nie ulega odkształceniu stycznemu. Masa powietrza w piłce jest zaniedbywalnie mała w porównaniu z masą jej powłoki. Pomiń opory aerodynamiczne.

Przyspieszenie ziemskie $g \approx 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$, a moment bezwładności sfery o promieniu R i masie m względem osi przechodzącej przez jej środek $I = (2/3)mR^2$.

Zadanie 2

Kuliste naczynie składa się ze współśrodkowych, cienkich, metalowych sfer o promieniach r_2 i r_1 (gdzie $r_2 > r_1$) między którymi jest próżnia (patrz rys.). Zewnętrzna sfera jest podzielona płaszczyzną na dwie części, z których mniejsza ma powierzchnię S_3. W wewnętrznej sferze umieszczono mieszaninę wody o masie m_W i lodu o masie m_L. Większa część zewnętrznej powłoki naczynia ma stałą temperaturę t_2, a mniejsza – stałą temperaturę t_3 (t_2 i t_3 są temperaturami w skali Celsjusza).

Po jakim czasie lód ulegnie całkowitemu roztopieniu?

Podaj wynik liczbowy dla $r_1 = 0{,}04\,\mathrm{m}$, $r_2 = 0{,}08\,\mathrm{m}$, $S_3 = 0{,}03\,\mathrm{m^2}$, $m_W = 0{,}1\,\mathrm{kg}$, $m_L = 0{,}1\,\mathrm{kg}$, $t_2 = 20\,°\mathrm{C}$, $t_3 = 10\,°\mathrm{C}$.

Powierzchnie sfer są doskonale czarne. Pojemność cieplną naczynia można zaniedbać. Przyjmij, że lód jest stale w stanie równowagi termodynamicznej z wodą. Ciśnienie wewnątrz wewnętrznej sfery jest stale równe ciśnieniu normalnemu.

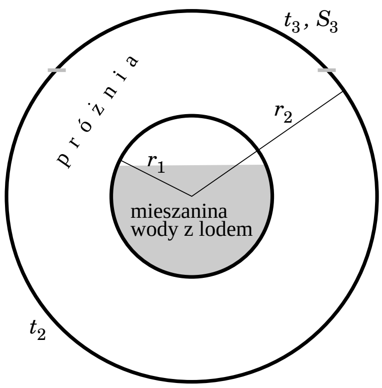
Ciepło topnienia lodu wynosi $q = 334\,\mathrm{kJ/kg}$, stała Stefana-Boltzmanna $\sigma = 5{,}7\cdot 10^{-8}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}}$, ciepło właściwe wody $c_W = 4{,}2\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$, ciepło właściwe lodu $c_L = 2{,}1\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$, temperatura topnienia lodu w warunkach normalnych $T_0 = 273{,}15\,\mathrm{K}$.

Zadanie 3

Cienki, jednorodny pierścień o masie m i promieniu r spoczywa na poziomym blacie stołu. Pierścień jest zrobiony z jednego zwoju drutu, którego opór na jednostkę długości wynosi λ. Pod blatem znajduje się współosiowy z pierścieniem solenoid.

Zależność od czasu t natężenia prądu płynącego w solenoidzie jest dana wzorem

$$I_s = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t < 0, \\ I_0 \frac{t}{T} & \text{dla} \quad 0 \le t < T, \\ I_0 & \text{dla} \quad t \ge T, \end{cases} \quad .$$



(gwarantuje to odpowiedni układ elektroniczny, do którego solenoid jest podłaczony).

a) Znajdź największą wartość I_0 ($= I_{0m}$), dla której pierścień jeszcze nie podskoczy ponad blat.

b) Zakładając, że $I_0 \gg I_{0m}$ (patrz punkt a)), wyznacz wysokość, na jaką podskoczy pierścień.

W rozwiązaniu uwzględnij następujące informacje:

(i) gdy pierścień jest umieszczony (współosiowo z solenoidem) na niewielkiej wysokości z nad blatem, a prąd płynący w solenoidzie ma natężenie I_s, to z bardzo dobrym przybliżeniem strumień indukcji magnetycznej przechodzący przez pierścień jest dany wzorem $\Phi = (a - bz)\, I_s$, gdzie a, b są dodatnimi stałymi;

(ii) w każdym punkcie pole magnetyczne pochodzące od pierścienia można pominąć w porównaniu z polem pochodzącym od solenoidu;

(iii) można pominąć wpływ ruchu pierścienia na natężenie płynącego w nim prądu;

(iv) parametr T jest na tyle mały, że droga przebyta przez pierścień do chwili $t = T$ jest pomijalnie mała;

(v) blat jest niemagnetyczny i nieprzewodzący, a solenoid jest nieruchomy;

(vi) efekty związane z promieniowaniem oraz opór aerodynamiczny powietrza można pominąć.

Podaj wartości liczbowe szukanych wielkości dla $m = 2{,}3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$, $r = 2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$, $\lambda = 0{,}9 \cdot 10^{-2}\,\Omega/\mathrm{m}$, $a = 10^{-3}\,\mathrm{T} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{A}^{-1}$, $b = 10^{-2}\,\mathrm{T} \cdot \mathrm{m}/\mathrm{A}$, $T = 10^{-3}\,\mathrm{s}$, $I_0 = 10\,\mathrm{A}$, $g = 9{,}8\,\mathrm{m}/\mathrm{s}^2$ (przyspieszenie ziemskie).

Rozwiązanie zadania 1

W poniższym rozwiązaniu wskaźnik x oznacza składową poziomą, y — składową pionową (dodatnia w górę), wskaźniki p i k oznaczają odpowiednio sytuację tuż przed i tuż po zderzeniu, v jest prędkością środka masy piłki, p – jej pędem, a ω – jej prędkością kątową.

Niech $N(t)$ będzie pionową składową siły, z jaką podłoga działa na piłkę w trakcie zderzenia. Ponieważ współczynnik tarcia jest równy μ, siła tarcia będzie w tym samym momencie równa $\mu N(t)$. Siła tarcia zmniejsza poziomą składową pędu piłki

$$\frac{dp_x}{dt} = -\mu N(t), \tag{1}$$

oraz wprawia piłkę w ruch obrotowy

$$I\frac{d\omega}{dt} = \mu N(t)R. \tag{2}$$

Ponieważ mamy równocześnie

$$\frac{dp_y}{dt} = N(t), \tag{3}$$

dostajemy stąd

$$\frac{dp_x}{dt} = -\mu\frac{dp_y}{dt}, \tag{4}$$

oraz

$$I\frac{d\omega}{dt} = \mu R\frac{dp_y}{dt} \tag{5}$$

Przy założeniu, że cały czas podczas zderzenia występuje poślizg, otrzymamy:

$$v_{xk} = v_{xp} + 2\mu v_{yp}, \tag{6}$$

$$\omega_k = -\frac{\mu R m}{I}2v_{yp}. \tag{7}$$

Jednak jeśli tak obliczone ω_k jest większe od v_{xk}/R, co się sprowadza do warunku

$$2\mu\left(\frac{R^2m}{I}+1\right)|v_{yp}| > v_{xp}, \tag{8}$$

to powyższe założenie nie jest spełnione: v_x będzie malało, a ω rosło tylko do momentu, gdy $v_x = \omega R$. Ponieważ z równań (4) i (5) wynika

$$R\frac{dp_x}{dt} + I\frac{d\omega}{dt} = 0,$$

wnioskujemy, że

$$mR\left(v_{xp} - v_{xk}\right) = I\omega_k.$$

Ponieważ równocześnie w tym przypadku $v_{xk} = \omega_k R$, otrzymujemy

$$mR\left(v_{xp} - v_{xk}\right) = I\frac{v_{xk}}{R},$$

czyli (ten wzór można wyprowadzić bezpośrednio z zasady zachowania momentu pędu)

$$v_{xk} = \frac{1}{1+\frac{I}{mR^2}}v_{xp}. \tag{9}$$

Czas, po jakim piłka znowu uderzy w podłogę jest równy $-\frac{2v_{yp}}{g}$, zatem odległość, w jakiej to nastąpi, jest równa

$$d = -\frac{2v_{yp}}{g} v_{xk}. \tag{10}$$

Podsumowując

$$d = \begin{cases} \frac{1}{1+\frac{I}{mR^2}} \frac{2v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g} & \text{gdy} \quad \mathrm{ctg}\alpha < 2\mu \left(\frac{R^2 m}{I} + 1 \right), \\ \frac{2v_0^2}{g} (\cos\alpha - 2\mu \sin\alpha) \sin\alpha & \text{gdy} \quad \mathrm{ctg}\alpha \geq 2\mu \left(\frac{R^2 m}{I} + 1 \right). \end{cases} \tag{11}$$

Podstawiając wartości liczbowe dostaniemy:

$$\text{dla } \mu = 0,1 : d \approx 8,2 \text{ m}, \tag{12}$$

$$\text{dla } \mu = 0,8 : d \approx 6,1 \text{ m}. \tag{13}$$

W pierwszym z powyższych przypadków obowiązuje drugi z wzorów (11), w drugim – pierwszy.

Odległość $d \approx 6,1$ m otrzymamy dla wszystkich $\mu \geq 0,2$ (przy nie zmienionych pozostałych parametrach).

Komentarz do zadania 1

Ponad jedna czwarta finalistów otrzymała za to zadanie maksymalną liczbę punktów – nie sprawiło ono większych kłopotów osobom, które wiedziały, jak należy rozwiązywać zagadnienia tego typu.

Rozwiązanie zadania 2

W poniższych rozważaniach $T_1 = t_1 + T_0$, $T_2 = t_2 + T_0$, $T_3 = t_3 + T_0$, $S_2 = 4\pi (r_2)^2 - S_3$ (pole większej części zewnętrznej powłoki).

Zauważmy, że temperatura wewnętrznej powłoki naczynia jest cały czas w trakcie rozpuszczania lodu stała i równa T_o. Ponieważ stałe są również temperatury obu części zewnętrznej powłoki, strumień energii docierający do wewnętrznej części naczynie nie zależy od czasu. Zatem na podstawie bilansu cieplnego, czas topnienia lodu jest równy

$$t = \frac{m_L q}{I}, \tag{1}$$

gdzie I sumarycznym strumieniem energii docierającym do wewnętrznej powłoki (uwzględniającym rónież energię wypromieniowaną przez tę powłokę).

Wewnętrzna powłoka naczynia wypromieniowywuje strumień energii, równy zgodnie z prawem Stefana-Boltzmanna

$$I_1 = \sigma 4\pi (r_1)^2 (T_1)^4 , \tag{2}$$

Ze względu na geometrię naczynia, cały ten strumień jest pochłaniany przez zewnętrzną powłokę naczynia.

Zewnętrzna powłoka naczynia jako całość promieniuje do wewnątrz strumień energii równy $\sigma S_2 (T_2)^4 + \sigma S_3 (T_3)^4$, ale tylko część tego strumienia dociera do wewnętrznej powłoki. Jak jest to część ustalimy wykorzystując II zasadę termodynamiki. Rozważymy najpierw szczególną sytuację, gdy temperatury obu części zewnętrznej powłoki są takie same i równe temperaturze wewnętrznej powłoki, tzn. $T_2 = T_3 = T_1$. Następnie przyjmiemy $T_2 = T_3 =: T \neq T_1$, a na końcu dojdziemy do ogólnego przypadku $T_2 \neq T_3 \neq T_1$.

Jeśli $T_2 = T_3 = T_1$, to strumień energii pochłanianej przez wewnętrzną powłokę I_{poch} musi być równy strumieniowi energii emitowanej nią (bo między ciałami o tej samej temperaturze – z II zasady termadynamiki – nie ma przepływu ciepła), czyli w tym przypadku $I_{\mathrm{poch}} = \sigma 4\pi (r_1)^2 (T_1)^4$. Ponieważ zgodnie z prawem Stefana-Boltzmanna ilość wypromieniowanej energii jest proporcjonalna do czwartej potęgi temperatury, a zmiana temperatury nie zmienia geometrii układu, w przypadku gdy $T_2 = T_3 =: T \neq T_1$ strumień pochłaniany przez wewnętrzną powłokę (pochodzący od powłoki zewnętrznej) jest równy

$$I_{\mathrm{poch}} = \sigma 4\pi (r_1)^2 (T)^4 .$$

Oznacza to, że (ciągle w przypadku $T_2 = T_3$) tylko ułamek równy $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$ wypromieniowanej przez zewnętrzną powłokę energii dociera do wewnętrznej powłoki. Podzielmy teraz zewnętrzną powłokę na bardzo dużo identycznych fragmentów o powierzchni s każdy. Ponieważ fragmenty są identyczne, identycznie położone względem wewnętrznej powłoki i mają taką samą temperaturę, strumień energii docierający do wewnętrznej powłoki, a pochodzący z danego fragmentu jest równy

$$I_s = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \sigma s (T)^4 . \tag{3}$$

Zauważmy teraz (z prawa Stefana-Boltzmanna), że powyższy strumień nie zależy od temperatury innych fragmentów (mimo iż do wyprowadzenia tego wzoru potrzebne nam było, by wszystkie fragmenty miały tę samą temperaturę)! Oznacza to, że z części powłoki zewnętrznej o powierzchni S_2 i temperaturze T_2 do wewnętrznej powłoki dociera strumień energii równy

$$I_2 = \left(\frac{S_2}{s}\right) I_s = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \sigma S_2 \left(T_2\right)^4, \tag{4}$$

(powyżej $\frac{S_2}{s}$ jest liczbą fragmentów o powierzchni s z których można złożyć część powłoki o powierzchni S_2). Analogicznie, z części powłoki zewnętrznej o powierzchni S_3 i temperaturze T_3 do wewnętrznej powłoki dociera strumień energii równy

$$I_3 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \sigma S_3 \left(T_3\right)^4. \tag{5}$$

Stąd na podstawie (1) oraz uwzględniając, że $I = I_2 + I_3 - I_1$ otrzymujemy, że czas topnienia lodu będzie wynosił

$$t = \frac{m_L q}{4\pi\sigma \left(r_1\right)^2 \left[\left(1 - \frac{S_3}{4\pi(r_2)^2}\right)\left(T_2\right)^4 + \frac{S_3}{4\pi(r_2)^2}\left(T_3\right)^4 - \left(T_1\right)^4\right]}. \tag{6}$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy

$$t \approx 19900s \approx 5\text{h } 32\text{min}. \tag{7}$$

Komentarz do zadania 2

Żaden z finalistów nie rozwiązał tego zadania przedstawioną powyżej metodą. Prawie wszyscy próbowali obliczyć strumień energii docierającej do wewnętrznej powłoki stosując rozważania geometryczne i całkowanie. Na ogół jednak nie uwzględniali, że energia wypromieniowywana pod kątem α w stosunku elementu powierzchni ΔS jest proporcjonalna do $\Delta S \sin\alpha$. Według niektórych rozwiązań strumień energii pochłanianej przez wewnętrzną powłokę był mniejszy niż strumień emitowany przez nią – i w konsekwencji czas roztapiania się lodu był ujemny.

Rozwiązanie zadania 3

Zgodnie z prawem Faradaya, pole magnetyczne pochodzące od solenoidu, indukuje w rozważanym przewodniku siłę elektromotoryczną

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -(a - bz)\frac{dI_s}{dt} + bI_s\frac{dz}{dt} \approx (a - bz)\frac{dI_s}{dt}. \tag{1}$$

W powyższym zgodnie z warunkiem (ii) pominęliśmy pole magnetyczne pochodzące od prądu płynącego w pierścieniu, a ostatnie przybliżenie jest konsekwencją warunku (iii). Prąd płynący w pierścieniu będzie równy

$$I_p = \frac{\mathcal{E}}{R} = (a - bz)\frac{1}{R}\frac{dI_s}{dt}, \tag{2}$$

gdzie $R = 2\pi r\lambda$ jest oporem pierścienia.

Rozważmy walec, którego "wieczko" jest określone przez pierścień znajdujący się na wysokości z_1, a "denko" przez pierścień znajdujący się na wysokości z_2. Całkowity strumień indukcji magnetycznej przechodzący przez powierzchnię tego walca jest równy 0 ("magnetyczne prawo Gaussa"). Ponieważ strumień przez "wieczko" jest równy $(a - bz_1)\, I_s$, a przez denko – $(a - bz_2)\, I_s$, to strumień indukcji magnetycznej o wartości $b(z_1 - z_2)I_s$ "wycieka" przez boczną powierzchnię walca. Pole bocznej powierzchni tego walca jest równe $2\pi r(z_1 - z_2)$, zatem średnia wartość prostopadłej do powierzchni bocznej składowej indukcji pola magnetycznego jest równa

$$B_{\perp śr} = \frac{b(z_1 - z_2)I_s}{2\pi r(z_1 - z_2)} = \frac{b}{2\pi r}I_s.$$

Ponieważ mamy symetrię obrotową, a wysokość naszego walca może być dowolnie mała (tzn. możemy rozważyć $z_2 \to z_1$), tuż przy pierścieniu prostopadła do osi solenoidu składowa indukcji magnetycznej pochodzącej od solenoidu jest równa

$$B_\perp = \frac{b}{2\pi r}I_s. \tag{3}$$

(Przy ogólniejszej zależności Φ od z otrzymalibyśmy $B_\perp(z) = -\frac{d\Phi(z)}{2\pi r dz}$.) Gdy przez pierścień płynie prąd I_p, siła elektrodynamiczna pochodząca od tego pola ma wartość

$$\begin{aligned} F = |2\pi r I_p B_\perp| &= |I_p b \cdot I_s| = \\ = |\,(a - bz)\frac{b}{R}\frac{dI_s}{dt}I_s| &= \frac{1}{2}(a - bz)\frac{b}{R}\frac{dI_s^2}{dt}. \end{aligned} \tag{4}$$

Jest ona skierowana do góry.

Uwzględniając podaną zależność I_s od czasu, dla $0 \le t \le T$ otrzymamy

$$F = (a - bz)\frac{b}{R}\frac{t}{T^2}I_0^2. \tag{5}$$

Gdy przewodnik leży na blacie, to $z = 0$ a maksymalna siła jest w chwili $t = T$. Aby przewodnik nie podskoczył, ta siła nie może być większa od mg; zatem szukane I_{0m} jest dane wzorem

$$I_{0m} = \sqrt{\frac{mgTR}{ab}} = \sqrt{\frac{2\pi r\lambda mgT}{ab}} \tag{6}$$

Przy założeniu, że $z \approx 0$, zmiana pędu przewodnika od chwili $t = 0$ do chwili $t = T$ wynosi

$$\Delta p = \frac{ab}{2R}\left(I_0^2 - I_{0m}^2\right) - mg\left(T - T_m\right), \tag{7}$$

gdzie T_m jest chwilą, w której natężenie prądu osiągnie wartość I_m. Warunek $I_0 \gg I_m$ oznacza, że przez znaczną większość czasu T siła pochodząca od solenoidu jest znacznie większa niż mg, czyli możemy przyjąć

$$\Delta p = \frac{ab}{2R} I_0^2. \tag{8}$$

Zgodnie z warunkiem (iii) można pominąć prąd indukowany w pierścieniu, wywołany jego ruchem. Oznacza to, że dla $t > T$ można pominąć działającą na pierścień siłę elektrodynamiczną. Zatem przewodnik podskoczy na wysokość

$$h = \frac{1}{2g}\left(\frac{\Delta p}{m}\right)^2 = \frac{a^2 b^2 I_0^4}{8gm^2R^2}. \tag{9}$$

Uwzględniając $R = 2\pi r\lambda$ otrzymamy ostatecznie

$$h = \frac{a^2 b^2 I_0^4}{32\pi^2 m^2 \lambda^2 r^2 g}. \tag{10}$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymamy

$$I_{0\,\min} \approx 0,05\mathrm{A}, \tag{11}$$

$$h \approx 1880\mathrm{m}. \tag{12}$$

Oczywiście ze względu na opory powietrza i inne zastosowane przybliżenia, faktycznie osiągnięta wysokość byłaby dużo mniejsza. Również wartości parametrów zostały (w wyniku pomyłki) źle dobrane – występujące tu natężenie pola magnetycznego jest zbyt duże, co prowadzi do częściowej sprzeczności z podanymi przybliżeniami.

Komentarz do zadania 3

Niewiele osób wiedziało, że do wyznaczenia siły podrzucającej pierścień należy wyznaczyć poziomą składową pola magnetycznego, a tylko kilka potrafiło wyznaczyć tę składową. Zwycięzca rozwiązał zadanie bezbłędnie, łącznie z krytyczną analizą podanych w treści wartości parametrów. To rozwiązanie zostało wyróżnione.