CZĘŚĆ I (termin wysyłania rozwiązań — 15 października 2007 r.)

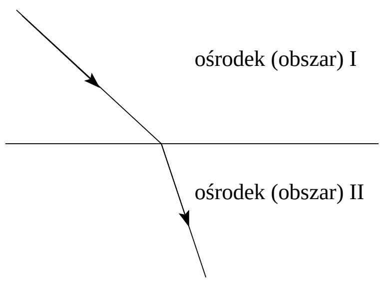
Podaj i krótko uzasadnij odpowiedź. Za każde z 15 zadań można otrzymać maksimum 4 punkty.

Zadanie 1

Oszacuj, o ile stopni podniosłaby się temperatura baterii w telefonie komórkowym (twoim lub znajomego) w przypadku zwarcia. Załóż, że przed zwarciem bateria była w pełni naładowana i że cała wydzielona energia jest zużywana na jej podgrzanie. Przyjmij, że średnie ciepło właściwe na jednostkę objętości baterii jest równe ciepłu właściwemu wody na jednostkę objętości. Podaj parametry baterii (pojemność, napięcie i objętość) dla której przeprowadziłeś obliczenia.

Zadanie 2

Rozważmy (patrz rys. 1)
a) promień światła przechodzący przez płaską granicę dwóch ośrodków optycznych o stałych współczynnikach załamania,
b) cząstkę przelatującą z jednego obszaru do drugiego. Na (wąskiej) granicy rozważanych obszarów na cząstkę działa (duża) siła prostopadła do tej granicy.
Tor odpowiadający obu tym przypadkom jest przedstawiony na rysunku.
Określ:
1) w którym z tych dwóch ośrodków prędkość światła (wartość) jest większa;
2) w którym z tych dwóch obszarów prędkość cząstki (wartość) jest większa.



rys. 1

Zadanie 3

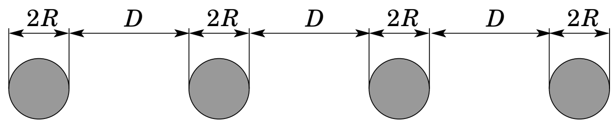
Mała kulka o masie m, naładowana ładunkiem q znajduje się w próżni, w odległości d od przewodzącej płaszczyzny. Jaką najmniejszą prędkość należy nadać kulce, aby oddaliła się ona na nieskończoną odległość od płaszczyzny?
Przyjmij, że w każdej chwili siła działająca na poruszającą się kulkę jest taka sama, jak siła działająca na kulkę spoczywającą (tzn. że rozkład ładunków w przewodniku natychmiast dopasowuje się do pola elektrycznego pochodzącego od kulki).

Zadanie 4

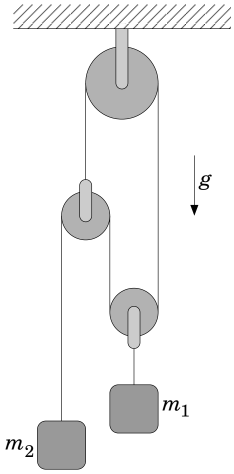
Jednakowe krążki hokejowe o promieniu R ustawiono na lodzie w linii prostej, w odległości D jeden od drugiego (rys. 2). Uderzono pierwszy krążek tak, aby uderzył centralnie w drugi, drugi w trzeci itd. Pierwsze uderzenie nie było jednak doskonałe i krążek uzyskał prędkość odchyloną pod bardzo niewielkim kątem w bok. Jaki warunek musi być spełniony, aby wystąpiło "samoogniskowanie", tzn. aby kąt odchylenia każdego następnego krążka był mniejszy niż poprzedniego? Pomiń tarcie między powierzchniami krążków oraz między krążkami a lodem.

Zadanie 5

Rozważmy układ bloczków i mas przedstawiony na rysunku 3. Z jakim przyspieszeniem porusza się masa m_1?
Liny są nieważkie,wiotkie i nierozciągliwe. Bloczki są nieważkie. Fragmenty lin nie znajdujące się na bloczkach pozostają stale proste. Pomiń tarcie i opór powietrza.



rys. 2



rys. 3

Zadanie 6
Rozważmy komunikację między statkami kosmicznymi wykorzystującą cząstki wysyłane z dużą prędkością. Statek A wysyła cząstkę do statku B, a statek B natychmiast, gdy ta cząstka do niego dotrze, odsyła ją do statku A. Jaki czas zostanie zmierzony na zegarze na statku A pomiędzy wysłaniem cząstki a jej powrotem?
Statek B oddala się od statku A z prędkością v, a rozpatrywana cząstka porusza się z prędkością V względem statku, z którego ostatnio została wysłana. W chwili, gdy cząstka dotarła do statku B znajdował się on, w układzie statku A, odległości $d = 21$ sekund świetlnych od statku A. Rozważ dwa przypadki:
a) $v = 0,8c$, $V = 0,9c$;
b) $v = 0,8c$, $V = 5c$. (Ten przypadek odpowiada hipotetycznym cząstkom, zwanym tachionami. Przyjmij, że w przypadku tachionów obowiązuje zwykłe, relatywistyczne prawo składania prędkości.)

Zadanie 7
Rozważmy tor Księżyca w układzie inercjalnym związanym ze Słońcem. W jakiej odległości od Słońca powinna krążyć Ziemia, aby ten tor był wypukły w stronę Słońca (patrz rysunek 4) w punktach najmniejszej odległości Księżyca od Słońca?
Przyjmij, że "przesuwając" Ziemię nie zmieniamy odległości Księżyc – Ziemia oraz że Księżyc i Ziemia poruszają się (w układzie Słońca) w jednej płaszczyźnie. Potrzebne dane znajdź w tablicach.

Zadanie 8
Oszacuj odchylenie toru elektronu w kineskopie spowodowane występowaniem ziemskiego pola magnetycznego. Przyjmij, że elektrony są przyspieszane na krótkim odcinku za pomocą napięcia $U = 30000\,\mathrm{V}$, a następnie przelatują do ekranu odległość $l = 0,25\,\mathrm{m}$. Pozostałe potrzebne dane znajdź w dostępnych ci źródłach.

Zadanie 9
Minimalna droga hamowania samochodu od prędkości $v = 100\,\mathrm{km/h}$ do 0 na suchej nawierzchni wynosi $40\,\mathrm{m}$. Kasia twierdzi, że w takim razie minimalna droga hamowania tego samochodu

rys. 4. Wypukły w stronę Słońca fragment toru Księżyca
(proporcje nie są zachowane).

(również od prędkości $v = 100\,\mathrm{km/h}$ do 0), na częściowo oblodzonej drodze, gdy koła z prawej strony samochodu poruszają się po lodzie, a koła z lewej strony po suchej nawierzchni, wynosi $80\,\mathrm{m}$. Czy Kasia ma rację?
Przyjmij, że ciężar samochodu wraz z kierowcą jest równomiernie rozłożony na wszystkie cztery koła, a środek masy układu znajduje się tuż nad powierzchnią jezdni. Pomiń opór powietrza. Hamowanie powinno być takie, by w jego trakcie samochód jechał prosto, bez obrotu wokół osi pionowej. Przyjmij, że współczynnik tarcia opon o lód jest równy 0.

Zadanie 10
Długi solenoid pływa częściowo zanurzony w diamagnetyku. Oś solenoidu jest równoległa do powierzchni cieczy. Jak zmieni się zanurzenie solenoidu (wzrośnie, zmaleje czy nie zmieni się), gdy podłączymy go do źródła prądu?
Diamagnetyk jest nieprzewodzący, a drut z którego zrobiono solenoid, jest pokryty warstwą izolacji.

Zadanie 11
Przybliżona reguła w fotografii mówi, że aby otrzymać ostry obraz robiąc zdjęcie nieruchomemu przedmiotowi, czas otwarcia przysłony powinien być mniejszy niż $1/f$ (licząc w sekundach), gdzie f jest ogniskową obiektywu (w milimetrach). Uzasadnij zależność od f występującą w tej regule.
Uwaga: ta reguła dotyczy zdjęć robionych bez statywu (lub innej podpórki) aparatami nie posiadającymi optycznej stabilizacji obrazu. Przyjmij, że różne f odpowiadają temu samemu aparatowi (z "zoomem").
W przypadku cyfrowych apartów fotograficznych f występujące w tej regule nie jest rzeczywistą ogniskową obiektywu, a ogniskową "w przeliczeniu" na zwykły aparat małoobrazkowy.

Zadanie 12
Kiedy w powietrzu jest więcej pary wodnej: w wilgotny listopadowy wieczór, gdy wilgotność względna wynosi ok. 100%, a temperatura powietrza jest równa 15°C, czy w upalny lipcowy dzień, gdy wilgotność względna wynosi 40%, a temperatura powietrza jest równa 35°C ?
Definicję wilgotności względnej i niezbędne dane znajdź w dostępnych ci źródłach. Parę wodną wodną możesz potraktować jako gaz doskonały.

Zadanie 13
Oszacuj moc elektrowni wiatrowej (wiatraka) z łopatami o długości 10m przy wietrze wiejącym z prędkością $5\,\mathrm{m/s}$ (3,4–5,4$\,\mathrm{m/s}$ to 3 stopnie w skali Beauforta – łagodny wiatr). Przyjmij, że elektrownia zamienia na energię elektryczną połowę energii kinetycznej wiatru przelatującego w zasięgu jej łopat.

Zadanie 14
Jaki kształt i jakie rozmiary zewnętrzne powinien mieć stalowy zbiornik, aby zużyć jak najmniej stali, a jego wytrzymałość na rozerwanie była wystarczająca do przechowywania $n = 100\,\mathrm{moli}$ gazowego helu o temperaturze $T = 10\,\mathrm{K}$?

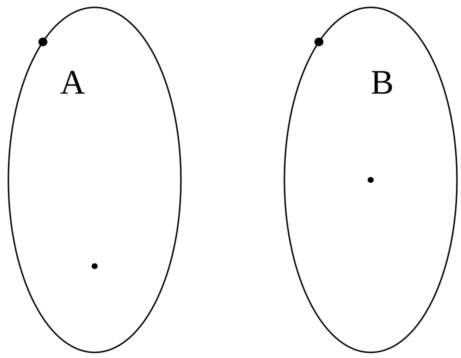
Przyjmnij, że zbiornik zostanie umieszczony w próżni. Przyjmij również, że grubość ścianki zbiornika jest dużo mniejsza od jego rozmiarów liniowych, a maksymalne dopuszczalne naprężenie stali wynosi $\sigma = 10^9\,\mathrm{N/m^2}$.

Zadanie 15

Rysunki 5.A i 5.B przedstawiają tory punktów materialnych, na które działają siły postaci

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{\vec{r}}{r}F(r).$$

W obu przypadkach jest to elipsa, przy czym w przypadku A punkt $\vec{r}=\vec{0}$ znajduje się w ognisku elipsy, a w przypadku B – w geometrycznym środku elipsy. Jaką postać ma funkcja $F(r)$ w każdym z tych przypadków?



rys. 5

Rozwiązanie zadania 1

Dla $U = 3,7$V, $Q = 1000$mAh $= 3600$A·s (pojemność), $V = 30$cm^3 otrzymamy przyrost temperatury

$$\Delta t = \frac{UQ}{Vc_{\text{objętościowe}}} = \frac{3.7 \cdot 3600}{30 \cdot 4.2}^{\text{o}}\text{C} \approx 106^{\text{o}}\text{C}.$$

Rozwiązanie zadania 2

a) Z prawa załamania wynika, że współczynnik załamania jest większy w ośrodku II, z zatem prędkość światła jest tam mniejsza.
b) Ponieważ siła jest prostopadła do granicy obszarów, równoległa do tej granicy składowa pędu cząstki nie ulega zmianie, a zatem nie ulega zmianie równoległa do tej granicy składowa prędkości cząstki. W takim razie, aby otrzymać tor przedstawiony na rysunku, prostopadła do tej granicy składowa prędkości cząstki musi być większa w obszarze II. A zatem również wartość prędkości jest większa w obszarze II.

Rozwiązanie zadania 3

W przypadku statycznym składowa (całkowitego) pola elektrycznego tuż nad powierzchnią przewodnika jest prostopadła do niej. Ten warunek jest spełniony, gdy pole pochodzące od ładunków wyindukowanych w przewodniku jest takie, jak pole od ładunku $-q$ umieszczonego symetrycznie względem przewodnika.
Zatem z punktu widzenia sił działających na ładunek q, układ jest równoważny układowi dwóch ładunków $+q$ i $-q$ znajdujących się (stale!) symetrycznie względem płaszczyzny. Aby te ładunki mogły się od siebie oddalić na nieskończoną odległość, suma ich energii kinetycznych musi być równa energii potencjalnej ich odziaływania elektrostatycznego, czyli

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (2d)}.$$

Stąd szukane v

$$v = \sqrt{\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 dm}}.$$

Rozwiązanie zadania 4

Zgodnie z przyjętym założeniem siła oddziaływania krążków w czasie zderzenia jest skierowana wzdłuż prostej przechodzącej przez ich środki i taki jest też kierunek prędkości krążka wprawionego w ruch. Oznaczmy przez α_1 kąt odchylenia pierwszego krążka, a przez α_2 – kąt odchylenia drugiego. Ze wzoru sinusów wynika

$$\frac{2R}{\sin\alpha_1} = \frac{D + 2R}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Dla małych α_1 i α_2 wynika stąd

$$\alpha_2 = \alpha_1 \frac{D}{2R}.$$

Zatem szukanym warunkiem "samoogniskowania" jest $D < 2R$.

Rozwiązanie zadania 5

Zauważmy, że jesteśmy w stanie przesunąć w dół masę m_2 bez poruszania masy m_1 – choć ulegną przy tym przesunięciu bloczki. Podobnie możemy poruszać masą m_1 bez poruszania masą m_2. Ponieważ bloczki i liny są nieważkie, oznacza to, że nie występują żadne więzy

między położeniami tych mas. Zatem każda z nich będzie spadać z przyspieszeniem g. (To wywoła odpowiednie przyspieszenia bloczków, ale one są nieważkie!)
Inaczej: druga zasada dynamiki w zastosowaniu do bloczka z lewej strony ma postać (pionowa składowa):

$$2N - N + mg = ma,$$

gdzie N jest napięciem nici, m – masą tego bloczka, a a – jego przyspieszeniem. Ponieważ $m = 0$, musi być $N = 0$, co oznacza, ze masa m_1 porusza się z przyspieszeniem g.
Odp: g.

Rozwiązanie zadania 6

Wszystkie obliczenia przeprowadzamy w układzie statku A.
Czas przelotu cząstki do statku B wynosi $t_1 = d/V$. Tachion wysłany przez statek b ma względem niego prędkość V, co oznacza, że względem statku A ma prędkość $V_2 = (V - v)/(1 - vV/c^2)$. Czas powrotu cząstki wynosi $t_2 = d/V_2$, zatem ostatecznie czas od wysłania do powrotu cząstki wynosi

$$t = d\left(\frac{1}{V} + \frac{1 - vV/c^2}{V - v}\right).$$

Podstawiając, dane liczbowe otrzymamy:
w przypadku a) $t \approx 82,1$s,
w przypadku b) $t = -10,8$s.
W przypadku b) jest to wielkość ujemna, co oznacza, że tachion powróci zanim został wysłany. Nic dziwnego zatem, że niewiele osób "wierzy" w istnienie tachionów. (Z problemem powrotu przed wysłaniem osoby zajmujące się tachionami radzą sobie dość łatwo: stwierdzają, że to co uważaliśmy za wysłanie tachionu, jest jego odebraniem, a to co uważaliśmy za odebranie – wysłaniem.)
Uwaga: istnienie tachionów nie przeczyłoby temu, że "normalne" cząstki nie mogą poruszać się z prędkością większą od prędkości światła. Tachiony po prostu nigdy nie poruszałyby się wolniej niż światło.

Rozwiązanie zadania 7

Wypukłość toru oznacza, że przyspieszenie Księżyca jest skierowane "od" Słońca, tzn. siła przyciągania Księżyca przez Ziemię powinna być większa niż siła przyciągania Księżyca przez Słońce. Czyli

$$\frac{GM_S}{r_x^2} < \frac{GM_Z}{r_K^2},$$

gdzie M_S jest masą Słońca, M_Z jest masą Ziemi, r_x – szukaną "nową" odległością Ziemia-Słońce, r_K – odległością Ziemia-Księżyc.
Otrzymujemy

$$r_x > \sqrt{\frac{M_S}{M_Z}} r_K \approx 221 \text{mln km},$$

co odpowiada ok. 1,5 razy aktualna odległość Ziemia-Słońce (jest to w przybliżeniu odległość Słońce-Mars – 228 mln km).

Rozwiązanie zadania 8

Z zasady zachowania energii wynika, że po przebyciu różnicy potencjałów U elektrony będą miały prędkość

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}},$$

gdzie q jest ładunkiem elektronu, a m – jego masą.
Zakładając, że pole magnetyczne o indukcji B jest prostopadłe do $\vec{v}$, przyspieszenie elektronu wynosi

$$a = \frac{1}{2m} qvB.$$

Przyjmując w przybliżeniu, że v w powyższym wzorze nie ulega zmianie, to przyspieszenie powoduje przesunięcie elektronu

$$\Delta y = \frac{1}{2} at^2,$$

gdzie $t = l/v$ jest czasem przelotu elektronu.
Ostatecznie otrzymamy

$$\Delta y = \frac{1}{2} Bl^2 \sqrt{\frac{q}{2mU}}.$$

Podstawiając $B = 3 \cdot 10^{-5}$T, $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$C, $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$kg oraz podane w treści zadania wartości l i U otrzymamy

$$\Delta y \approx 0,5\text{mm}.$$

Rozwiązanie zadania 9

Siły tarcia występują tylko po jednej stronie samochodu. Aby nie wywoływały one obrotu samochodu, muszą one być skierowane pod kątem w stosunku do kierunku jazdy samochodu (wzdłuż prostych koło – środek masy). To oznacza, że nie cała siła tarcia jest wykorzystywana na hamowanie, a zatem droga hamowania będzie wieksza niż 80m. Czyli Kasia nie ma racji.

Rozwiązanie zadania 10

Diamagnetyki są wypychane z obszaru, w którym jest pole magnetyczne (w skrajnym przypadku można dzięki temu zaobserwować lewitację nadprzewodnika nad magnesem). Czyli ciecz będzie wypychana z solenoidu, a zatem głebokość jego zanurzenia zmaleje.

Rozwiązanie zadania 11

Przyjmując, że matryca aparatu (lub klisza) znajduje się w przybliżeniu w odległości f od soczewki, to obrócenie aparatu o mały kąt ϕ spowoduje przesunięcie obrazu o $f\phi$. Aby obraz był ostry, to przesunięcie w trakcie robienia zdjęcia nie powinno być większe niż pewne d. Zatem

$$\phi \leq \frac{d}{f}.$$

Przyjmując, że kąt o jaki się obróci aparat w trakcie robienia zdjęcia jest proporcjonalny do czasu T: $\phi = \omega T$, otrzymamy szukaną zależność

$$T \leq \frac{d\omega}{f}.$$

Uwzględniliśmy tu drgania kątowe aparatu, a pominęliśmy liniowe. Zauważmy jednak, że przesunięcie aparatu o Δx, gdy obiekt jest nieruchomy, jest równoważne przesunięciu obiektu o $-\Delta x$, co jest pomijalne, jeśli obiekt jest odległy, a Δx jest małe.

Rozwiązanie zadania 12

W 15°C prężność pary nasyconej wynosi 17hPa, w 35°C – 56hPa. Ponieważ $0,4 \cdot 56 > 1,0 \cdot 17$, pary wodnej jest więcej w lipcowy dzień.

Rozwiązanie zadania 13

W jednostce czasu przez powierzchnię S przelatuje wiatr o energii kinetycznej $\rho S v^3/2$ gdzie ρ jest gęstością powietrza. Zatem szukana moc wynosi (przyjmując $\rho = 1,2\text{kg/m}^3$)

$$P = \rho S v^3/4 \approx 12\text{kW}.$$

Rozwiązanie zadania 14

Zbiornik oczywiście powinien być kulisty. Przyjmując, że r jest jego promieniem, d – grubością ścianki ($d \ll r$), a σ maksymalnym naprężeniem stali przy rozciąganiu otrzymamy w skrajnym przypadku

$$2\pi r d\sigma = p\pi r^2,$$

gdzie $p = NRT/\left(4\pi r^3/3\right)$ jest ciśnieniem gazu. Stąd

$$d = \frac{3NRT}{8\pi r^2\sigma}.$$

Objętość stali zatem wynosi

$$V_{\text{stali}} = 4\pi r^2 d = \frac{3NRT}{2\sigma}.$$

Ta wielkość jest niezależna od promienia r. Oznacza to, że warunek zużycia minimalnej ilości stali, nie wystarcza do określenia rozmiarów zewnętrznych zbiornika. Zatem te rozmiary mogą być dowolne.

Rozwiązanie zadania 15

W przypadku A $F(r)$ jest proporcjonalne do $1/r^2$ – z I prawa Keplera.
W przypadku B $F(r)$ jest proporcjonalne do r – bo elipsę możemy uzyskać jako złożenie prostopadłych ruchów harmonicznych o tej samej częstotliwości, ale różnej amplitudzie.