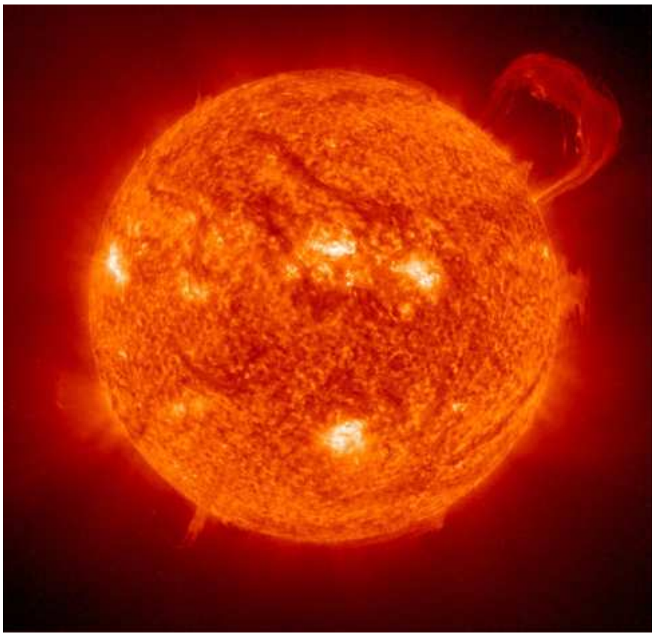
ZADANIE TEORETYCZNE 3

DLACZEGO GWIAZDY SĄ TAK DUŻE?

Gwiazdy są kulami gorącego gazu. Większość z nich świeci ponieważ w ich centralnych częściach zachodzi reakcja łączenia wodoru w hel. W tym zadaniu będziemy używać klasycznej i kwantowej mechaniki, jak również elektrostatyki i termodynamiki aby zrozumieć, dlaczego gwiazdy muszą być dostatecznie duże by zachodziła w nich reakcja łączenia jąder oraz wyznaczymy, jaka musi być masa i promień najmniejszej gwiazdy, w której mogą zachodzić reakcje łączenia wodoru w hel.



Rys. 1 Jak większość gwiazd nasze Słońce świeci w wyniku termojądrowych reakcji zamiany wodoru w hel w centralnej części.

WARTOŚCI STAŁYCH FIZYCZNYCH:

Stała grawitacyjna = $G = 6.7\times10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^2

Stała Boltzmanna = $k = 1.4\times10^{-23}$ J K^{-1}

Stała Plancka = $h = 6.6\times10^{-34}$ m^2 kg s^{-1}

Masa protonu = $m_p = 1.7\times10^{-27}$ kg

Masa elektronu = $m_e = 9.1\times10^{-31}$ kg

Jednostka ładunku elektrycznego = $q = 1.6\times10^{-19}$ C

Przenikalność dielektryczna próżni = $\varepsilon_0 = 8.9\times10^{-12}$ C^2 N^{-1} m^{-2}

Promień = $R_S = 7.0\times10^{8}$ m

Masa Słońca = $M_S = 2.0\times10^{30}$ kg

1. Klasyczne oszacowanie temperatury w środku gwiazdy.

Załóżmy, że gaz tworzący gwiazdę zachowuje się jak całkowicie zjonizowany wodór (równa liczba elektronów i protonów) i że zachowuje się jak gaz doskonały. Z punktu widzenia fizyki klasycznej można argumentować, że warunkiem połączenia się dwóch protonów jest to, że muszą znaleźć się one w odległości 10^{-15} m, aby silne jądrowe oddziaływania przyciągające zaczęły dominować nad odpychającymi siłami Coulomba. Załóżmy, że dwa protony, traktowane jak cząstki punktowe poruszają się naprzeciw siebie z prędkościami v_{rms} każdy, v_{rms} to pierwiastek ze średniego kwadratu prędkości protonów w jednowymiarowym zderzeniu centralnym.

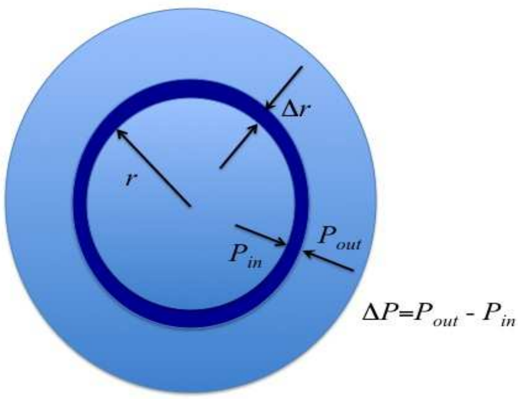
1a	1a. Jaka musi być temperatura gazu, T_c, aby odległość najbliższego zbliżenia protonów, d_c, wynosiła 10^{-15} m? Podaj tę i wszystkie inne numeryczne wartości w tym zadaniu z dokładnością do dwóch cyfr znaczących.	1.5

2. Tak oszacowana temperatura nie jest właściwa

Aby stwierdzić, czy tak oszacowana temperatura jest rozsądna, należy wyznaczyć temperaturę w środku gwiazdy inną metodą. Budowa gwiazd jest skomplikowana, ale można uzyskać niezłe jej zrozumienie korzystając z przybliżeń. Gwiazdy są w stanie równowagi, to znaczy że nie zapadają się ani nie rozszerzają, ponieważ przyciągająca siła grawitacji jest zrównoważona przez odpychającą siłę pochodząca z różnicy ciśnień (patrz rys. 2). Dla warstwy gazu warunek równowagi hydrodynamicznej warstwy w odległości r od środka gwiazdy jest dany przez

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = -\frac{G M_r \rho_r}{r^2},$$

gdzie P jest ciśnieniem gazu, G - stałą grawitacji, M_r - masą części gwiazdy wewnątrz sfery o promieniu r, a ρ_r jest gęstością gazu w warstwie.



Rys. 2. Gwiazdy są w równowadze hydrostatycznej, różnica ciśnień równoważy grawitację.

Oszacowanie rzędu wielkości temperatury w środku gwiazdy może być uzyskane przez wartości wielkości fizycznych w środku i na powierzchni gwiazdy przy użyciu następujących przybliżeń:

$$\Delta P \approx P_o - P_c ,$$

gdzie P_c i P_o są ciśnieniami w środku i na powierzchni gwiazdy.

Ponieważ $P_c >> P_o$, to możemy założyć że:

$$\Delta P \approx - P_c .$$

W tym samym przybliżeniu:

$$\Delta r \approx R ,$$

gdzie R jest promieniem gwiazdy oraz

$$M_r \approx M_R = M ,$$

gdzie M jest całkowitą masą gwiazdy.
Gęstość można przybliżyć przez wartość w środku

$$\rho_r \approx \rho_c .$$

Można też założyć, że ciśnienie jest takie, jak dla gazu doskonałego.

2a	Podaj równanie na temperaturę w środku gwiazdy, T_c, w którym występują jedynie masa i promień gwiazdy oraz stałe fizyczne.	0.5

Możemy teraz użyć następującego przewidywania tego modelu jako kryterium jego poprawności:

2b	Korzystając z równania znalezionego w punkcie 2a podaj zależność stosunku M/R dla gwiazdy od temperatury T_c i stałych fizycznych.	0.5

2c	Korzystając z wartości T_c wyznaczonej w punkcie 1a znajdź numeryczną wartość stosunku M/R dla gwiazdy.	0.5

2d	Oblicz stosunek $M(Slonce)/R(Slonce)$ i przekonaj się, że otrzymana wartość jest znacznie mniejsza od tej wielkości wyznaczonej w punkcie 2c.	0.5

1. Kwantowe oszacowanie temperatury w środku gwiazdy

Duża rozbieżność uzyskana w punkcie (2d) sugeruje, że klasyczne oszacowanie temperatury T_c uzyskane w (1a) nie jest poprawne. Zgodność wyników można uzyskać korzystając z efektów kwantowych, które mówią, że protony zachowują się jak fale i że pojedynczy proton jest rozmyty na odległości o rozmiarach rzędu długości fali de Broglie'a λ_p. To oznacza, że jeśli odległość najbliższego zbliżenia d_c jest rzędu λ_p to protony przekrywają się i mogą się łączyć.

3a	Zakładając, że $d_c = \frac{\lambda_p}{2^{1/2}}$ jest warunkiem umożliwiającym reakcję łączenia dla protonów o prędkości v_{rms}, podaj równanie na T_c zależne jedynie ze stałych fizycznych.	1.0

3b	Wyznacz numeryczną wartość T_c uzyskaną w punkcie (3a).	0.5

3c	Użyj wartości T_c uzyskanej w (3b) do wyznaczenia numerycznej wartości stosunku M/R dla gwiazdy, skorzystaj z zależności uzyskanej w (2b). Sprawdź, że ta wielkość jest zbliżona do obserwowanej wartości $M(Slonce)/R(Slonce)$.	0.5

Gwiazdy z tak zwanego *ciągu głównego* (zużywające wodór) o dużych masach spełniają w przybliżeniu uzyskaną zależność w przypadku dużych mas.

2. Stosunek masy do promienia dla gwiazd.

Uzyskana właśnie zgodność sugeruje, że kwantowe podejście do szacowania temperatury środka Słońca jest poprawne.

4a	Korzystając z uzyskanego poprzednio wyniku wykaż, że dla każdej gwiazdy zużywającej wodór stosunek masy M do promienia M jest stały i zależy jedynie od stałych fizycznych. Podaj równanie na stosunek M/R dla gwiazd zużywających wodór.	0.5

3. Masa i promień najmniejszej gwiazdy.

Wynik uzyskany w punkcie 4a sugeruje, że masa gwiazdy może być dowolna pod warunkiem, że zależność z 4a jest spełniona; to nie jest jednak prawdą.

Gaz wewnątrz zwykłej gwiazdy zachowuje się w przybliżeniu jak gaz doskonały. To oznacza, że d_e - typowa odległość *między elektronami* jest większa niż λ_e - ich typowa długość fali de Broglie'a. Jeśli znajdowałyby się bliżej, utworzyłyby tak zwany zdegenerowany gaz i wówczas gwiazda byłaby zupełnie inna. Zwróć uwagę na różnice między tym jak opisujemy protony i elektrony wewnątrz gwiazdy. W przypadku protonów ich fale de Broglie'a powinny się przekrywać przy zderzeniu, co pozwala na reakcję łącze nie powinny się przekrywać aby pozostały one gazem doskonałym.

Gęstość materii wewnątrz gwiazdy rośnie przy malejącym promieniu. Mimo to, w przybliżeniu pierwszego rzędu załóż, że gwiazdy mają stałą gęstość. Ponadto możesz użyć warunku $m_p >> m_e$.

5a	Znajdź równanie na n_e, średnią liczbę elektronów w jednostce objętości wewnątrz gwiazdy.	0.5

5b	Znajdź równanie na d_e, typową odległość między elektronami wewnątrz gwiazdy.	0.5

5c	Wykorzystując warunek $d_e \geq \frac{\lambda_e}{2^{1/2}}$ podaj równanie na promień najmniejszej normalnej gwiazdy. Przyjmij, że temperatura w środku gwiazdy jest taka, jak we wnętrzu typowej gwiazdy.	1.5

5d	Znajdź numeryczną wartość promienia najmniejszej normalnej gwiazdy w metrach oraz w stosunku do promienia Słońca.	0.5

5e	Wyznacz numeryczną wartość masy najmniejszej gwiazdy w kg i w stosunku do masy Słońca.	0.5

4. Łączenie się jąder helu w starszych gwiazdach.

Po pewnym czasie gwiazda starzeje się, większość wodoru we wnętrzu zamienia się w hel (He). Rozpoczyna się wówczas proces łączenia się helu w cięższe pierwiastki, co też prowadzi do świecenia. Jądro helu ma dwa protony i dwa neutrony, ich ładunek jest dwukrotnie większy a masa w przybliżeniu czterokrotnie większa od masy protonu. Widzieliśmy, że warunkiem zachodzenia reakcji łączenia się protonów jest $d_c = \frac{\lambda_p}{2^{1/2}}$.

6a	Zapisz odpowiednik tego równania dla jader helu i znajdź $v_{rms}(He)$ - prędkość rms dla atomów helu oraz $T(He)$ - temperaturę konieczną do wystąpienia reakcji łączenia się helu.	0.5