

LVIII OLIMPIADA FIZYCZNA — ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA

Rozwiązania zadań I stopnia należy przysyłać do **Okręgowych Komitetów Olimpiady Fizycznej** w terminach: część I — do 15 października b.r., część II — do 15 listopada b.r.. O kwalifikacji do zawodów II stopnia będzie decydować suma punktów uzyskanych za rozwiązania zadań części I i II.

Szczegóły dotyczące regulaminu oraz organizacji Olimpiady można znaleźć w broszurze i na afiszu rozesłanych do szkół średnich oraz na stronie internetowej <http://www.kgof.edu.pl>.

CZEŚĆ II (termin wysyłania rozwiązań — 15 listopada 2008 r.)

Uwaga: Rozwiązanie każdego zadania powinno być napisane na oddzielnym arkuszu papieru podaniowego. Na każdym arkuszu należy umieścić nazwisko i imię oraz adres autora pracy, a także nazwę, adres szkoły i klasę oraz nazwisko i imię nauczyciela fizyki. Do pracy należy dołączyć kopertę zaadresowaną do siebie.

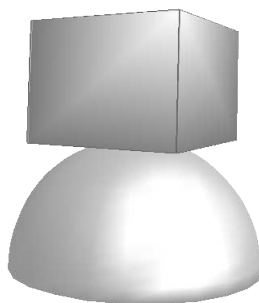
ZADANIA TEORETYCZNE

Za każde z trzech zadań można otrzymać maksimum 20 punktów.

Zadanie T1

Na sztywnej i nieruchomej półkuli o promieniu R stoi jednorodny prostopadłościan o wysokości L oraz podstawie o wymiarach $2a$ na $2b$ (patrz rysunek 1). Prostopadłościan styka się z półkulą dokładnie w środku podstawy, a podstawa jest pozioma. Dla jakich wysokości prostopadłościanu takie ustawienie jest stanem równowagi trwałej?

Podstawa prostopadłościanu nie ślizga się po powierzchni półkuli.



rys. 1

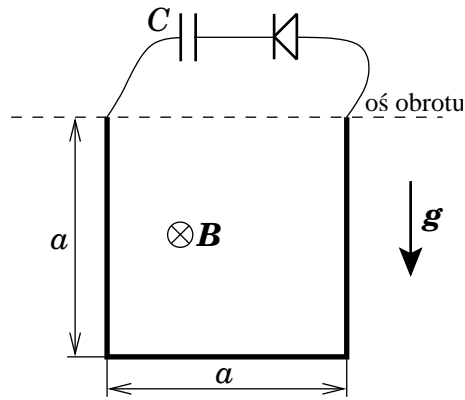
Uwaga:

Dla małych kątów α : $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$, $\sin \alpha \approx \alpha$.

Zadanie T2

Sztywny drut o masie m jest wygięty w kształcie litery U (patrz rysunek 2) i składa się z trzech prostoliniowych fragmentów długości a każdy. Drut jest zawieszony za końce tak, że może się swobodnie wahać wokół poziomej osi. Końce drutu są podłączone nieruchomymi przewodami poprzez diodę do kondensatora o pojemności C . Całość znajduje się w stałym, jednorodnym polu magnetycznym o indukcji \vec{B} , prostopadłym zarówno do osi obrotu jak i do kierunku pola grawitacyjnego. Drut wychylono o kąt $\pi/2$ od pionu i puszczono swobodnie. Jakie będzie napięcie na kondensatorze po dłuższym czasie wahań się drutu? Współczynnik liczbowy możesz podać w przybliżeniu, na podstawie wykresu odpowiedniej funkcji.

Pomiń opór powietrza oraz tarcie w miejscu zawieszenia drutu. Przyjmij, że energia, która zostanie zgromadzona w kondensatorze i straty energii przy przepływie prądu są pomijalnie małe w porównaniu z energią wahań drutu. Pomiń indukcyjność obwodu.



rys. 2

Podaj wynik liczbowy dla $B = 0,1\text{ T}$, $m = 0,2\text{ kg}$, $a = 0,3\text{ m}$, $C = 10^{-6}\text{ F}$. Przyspieszenie ziemskie $g \approx 10\text{ m/s}^2$.

Zadanie T3

Postanowiono zbudować samochód napędzany silnikiem na sprężone powietrze. W takim samochodzie sprężone powietrze ze zbiornika rozpręża się w silniku (który może być bardzo skomplikowanym urządzeniem), a następnie wylatuje do otoczenia. Przyjmijmy, że zbiornik na powietrze jest walcem długości $l = 2\text{ m}$ i promieniu $r = 0,2\text{ m}$, zakończonym półkulami i że początkowe ciśnienie powietrza w zbiorniku wynosi $p = 30\text{ MPa}$. Temperatura powietrza w zbiorniku jest równa temperaturze otoczenia $t_0 = 17^\circ\text{C}$. Ciśnienie atmosferyczne jest równe $p_0 = 100\text{ kPa}$.

Zakładając, że silnik może osiągnąć maksymalną możliwą teoretycznie sprawność, oblicz jaką drogę może przebyć ten samochód po jednym napełnieniu zbiornika. Przyjmij, że praca mechaniczna wykonana przez silnik tego samochodu jest taka sama, jak praca mechaniczna wykonana na tej samej drodze przez silnik samochodu spalinowego zużywającego 5 l benzyny na 100 km . Załóż, że sprawność silnika spalinowego wynosi 30% .

Wzory, które mogą być przydatne:

(i) praca wykonana przez gaz doskonały w trakcie rozprężania adiabatycznego

$$W = \frac{R}{c_V} p_1 V_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{R/(c_V+R)} \right];$$

(ii) ciepło dostarczane do gazu doskonałego w trakcie przemiany izotermicznej

$$Q = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2};$$

gdzie p_1 i V_1 są początkowymi ciśnieniem i objętością gazu, a p_2 – ciśnieniem końcowym, c_V – molowym ciepłem właściwym przy stałej objętości, R – uniwersalną stałą gazową.

ZADANIA DOŚWIADCZALNE

Przesłać należy rozwiązania dwóch (i tylko dwóch) zadań dowolnie wybranych z trzech podanych zadań doświadczalnych. Za każde zadanie można otrzymać maksimum 40 punktów.

Zadanie D1

Współczynnik załamania oleju jadalnego

Masz do dyspozycji:

- olej jadalny,
- naczynie z matowym płaskim dnem, wykonane z nieprzezroczystego materiału (np. garnek o średnicy 10 – 15 cm),
- wskaźnik laserowy,
- linijkę,
- papier milimetrowy,
- nożyczki,
- zaciemnione pomieszczenie.

Jeśli wiązkę światła laserowego skierować na dno naczynia wypełnionego do pewnego poziomu olejem, to można zaobserwować, że wokół jasnego punktu na dnie, na który pada promień światła laserowego, tworzy się mniej oświetlony obszar w kształcie koła. Wykorzystując to zjawisko wyznacz współczynnik załamania oleju jadalnego względem powietrza.

Uwaga:

Wykonując pomiary zachowaj szczególną ostrożność! Uważaj, aby odbita wiązka światła laserowego nie trafiła w oczy!

Zadanie D2

Gwizdząca butelka

Masz do dyspozycji:

- plastikową butelkę o pojemności 1,5 – 2 l z szyjką o walcowym kształcie i długości ok. 3 cm,
- naczynie o znanej pojemności, znacznie mniejszej niż pojemność butelki,
- komputer z kartą dźwiękową, mikrofonem i oprogramowaniem umożliwiającym wykorzystanie komputera jako oscyloskopu z pamięcią,
- wodę.

Dmuchając nad otworem butelki można sprawić, że z butelki zacznie wydobywać się dźwięk.

1. Wypełniając butelkę wodą, wyznacz zależność częstotliwości tego dźwięku od objętości powietrza zawartego w butelce. Wykonując pomiary zawsze próbuj wydobyć z butelki dźwięk o możliwie najniższej częstotliwości. Wykonaj wykres tej zależności dla możliwie szerokiego zakresu objętości.
2. Zbadaj czy uzyskaną doświadczalną zależność można przedstawić w postaci potęgowej:

$$f = f_0 \left(\frac{V}{V_0} \right)^\alpha,$$

gdzie f_0 , V_0 , α – pewne stałe.

Uwaga:

Do pomiarów możesz wykorzystać program winscope.exe dostępny na stronie Olimpiady Fizycznej: <http://www.kgof.edu.pl/> lub wykorzystać program Oscyloskop dostępny na płycie CD

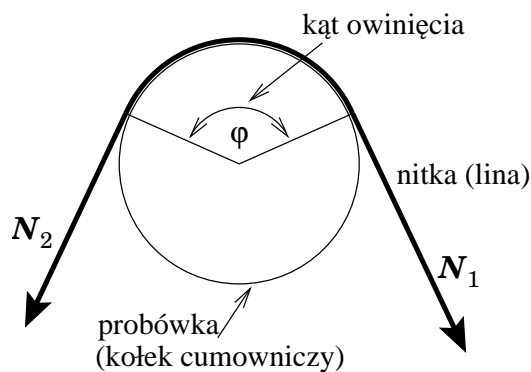
dołączonej do podręcznika J. Blinowski, W. Zieliński, *Fizyka z astronomią. Kształcenie w zakresie rozszerzonym*, tom. I, WSiP, Warszawa 2002 (i 2003, II wydanie).

Zadanie D3

Tarcie nitki o probówkę

Statki cumuje się do nabrzeża owijając linę wokół pachołka cumowniczego. Jako model tej sytuacji rozważamy nitkę owiniętą wokół probówki (patrz rysunek). Zdefiniujemy parametr $\gamma = N_1/N_2$, gdzie N_1 i N_2 oznaczają naprężenia na dwóch końcach nitki.

Niech Γ oznacza maksymalną wartość parametru γ , przy którym nitka nie ślizga się po probówce.



rys. 3

Masz do dyspozycji:

- 3 jednakowe probówki,
- 3 statywy z uchwytami,
- linijkę,
- nitkę,
- 50 spinaczy biurowych.

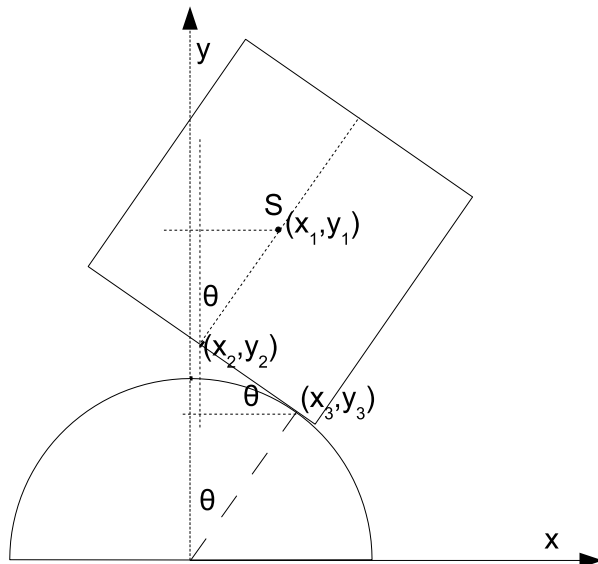
Wyznacz zależność parametru Γ od kąta nawinięcia nitki. Sprawdź czy zależność tę można opisać równaniem $\Gamma(\varphi) = e^{\mu\varphi}$, gdzie μ – pewna stała.

Wskazówki:

1. Możesz wykorzystać nawijanie nitki na więcej niż jedną probówkę. Całkowity kąt nawinięcia jest wówczas równy sumie kątów nawinięcia na poszczególne probówki.
2. Zadbaj o czystość nitki i probówek.

Rozwiązanie zad 1.

Rozstrzygnięcia, czy opisane ustawienie prostopadłościanu jest stanem równowagi trwałej można dokonać analizując przemieszczenie środka masy S podczas wychylenia (patrz rysunek). Zauważmy, że ponieważ podstawa prostopadłościanu jest płaska, wystarczy rozpatrywać wychylenie prostopadłościanu tylko w jednej, dowolnie wybranej płaszczyźnie. Umieścimy początek układu współrzędnych w środku podstawy półkuli i skierujemy oś y pionowo do dóry, a oś x – poziomo, zgodnie z kierunkiem wychylenia klocka. Niech (x_1, y_1) oznacza współrzędne środka masy klocka, (x_2, y_2) – współrzędne środka podstawy klocka, a (x_3, y_3) – współrzędne punktu styczności klocka z półkulą. Kąt wychylenia klocka oznaczymy przez θ .



I sposób – rozważenie momentów sił względem chwilowej osi obrotu.

Warunkiem równowagi jest, aby moment siły ciężkości klocka względem chwilowej osi obrotu przeciwstawiał się wychyleniu klocka. Ponieważ ponieważ ta oś przechodzi przez punkt styczności klocka z półkulą, oznacza to, że dla $x_3 > 0$ (tak jak na rysunku) powinno być $x_1 - x_3 < 0$.

Ponieważ klocek toczy się po półkuli bez poślizgu, odległość środka podstawy klocka od punktu styczności klocka z półkulą wynosi $R\theta$. Stąd

$$x_2 - x_3 = -R\theta \cos \theta. \quad (1)$$

Z rozważań geometrycznych dostaniemy

$$x_1 - x_2 = \frac{L}{2} \sin \theta, \quad (2)$$

a zatem

$$x_1 - x_3 = \frac{L}{2} \sin \theta - R\theta \cos \theta. \quad (3)$$

Dla małych θ otrzymamy

$$x_1 - x_3 \approx \frac{L}{2}\theta - R\theta = \left(\frac{L}{2} - R\right)\theta. \quad (4)$$

Ponieważ warunek równowagi oznacza $x_1 - x_3 < 0$ dla $\theta > 0$, otrzymujemy

$$\frac{L}{2} - R < 0.$$

Stan równowagi mamy więc dla

$$L < 2R. \quad (5)$$

II sposób – rozważenie energii potencjalnej.

Dane położenie jest położeniem równowagi trwałej, jeśli energia potencjalna jest tam (lokalnie) minimalna. W rozważanym zagadnieniu energia potencjalna jest równa mgh , gdzie m jest masą klocka, a $h = y_1$, zatem wystarczy rozważyć wysokość, na jakiej znajduje się środek masy.

W stanie równowagi ta wysokość wynosi

$$h_0 = R + \frac{L}{2}.$$

Po wychyleniu prostopadłościanu o kąt θ , wysokość na jakiej znajdzie się środek masy będzie równa

$$h = y_1 = (y_1 - y_2) + (y_2 - y_3) + y_3,$$

gdzie, jak wynika z rysunku, mamy

$$y_1 - y_2 = \frac{L}{2} \cos \theta, \quad (6)$$

$$y_2 - y_3 = R\theta \sin \theta, \quad (7)$$

$$y_3 = R \cos \theta. \quad (8)$$

Przy obliczeniu $y_2 - y_3$ uwzględniliśmy, że ze względu na brak poślizgu odległość środka podstawy klocka od punktu styczności klocka z półkulą wynosi $R\theta$.

Zmiana wysokości środka masy wynosi zatem,

$$\Delta h = y_1 - h_0 = \left(\frac{L}{2} + R \right) (\cos \theta - 1) + R\theta \sin \theta. \quad (9)$$

Położenie początkowe będzie położeniem równowagi trwałej, jeśli wraz ze wzrostem kąta θ będzie wzrastało Δh . W przybliżeniu małych θ mamy

$$\Delta h \approx \left(R - \frac{L}{2} \right) \frac{\theta^2}{2}. \quad (10)$$

Z powyższego dostajemy warunek (5): $L < 2R$.

Zamiast stosować przybliżenie małych θ , możemy obliczyć drugą pochodną Δh względem θ dla $\theta = 0$ (pierwsza pochodna jest w tym punkcie równa 0 ze względu na symetrię Δh jako funkcji θ):

$$\left. \frac{d^2 \Delta h}{d\theta^2} \right|_{\theta=0} = \left[- \left(\frac{L}{2} + R \right) \cos \theta + 2R \cos \theta - R\theta \sin \theta \right]_{\theta=0} = R - \frac{L}{2}. \quad (11)$$

Ponieważ funkcja ma minimum w danym punkcie, gdy druga pochodna jest tam większa od zera, a pierwsza pochodna się zeruje, dostajemy znowu warunek (5).

Punktacja:

I sposób

Zauważenie, że warunkiem równowagi jest, by $x_1 - x_3 < 0$ gdy $x_3 > 0$ (lub $x_1 - x_3 > 0$ gdy $x_3 < 0$) – 2 pkt.

Określenie odległości w poziomie środka podstawy klocka od jego środka masy (wzór (2)) – 1 pkt.

Określenie odległości w poziomie punktu styczności od środka podstawy klocka (wzór (1)) – 2 pkt.

Określenie odległości w poziomie środka masy klocka od punktu styczności z kulą (wzór (3)) – 1 pkt.

Wzór (4) na odległość w poziomie środka masy klocka od punktu styczności z kulą w przybliżeniu małych odchyłeń – 2pkt.

Warunek równowagi (wzór (5)) – 2 pkt.

II sposób

Określenie odległości pionie środka podstawy klocka od jego środka masy (wzór (6)) – 1 pkt.

Określenie odległości w pionie punktu styczności od środka podstawy klocka (wzór (7)) – 2 pkt.

Określenie, na jakiej wysokości będzie punkt styczności klocka z półkulą po odchyleniu klocka (wzór (8)) – 1 pkt.

Całkowita zmiana wysokości klocka (wzór (9)) – 2 pkt.

Wzór (10) na zmianę wysokości środka masy klocka w przybliżeniu małych odchyłeń lub druga pochodna w $\theta = 0$ wysokości środka masy klocka (wzór (11)) – 2 pkt.

Warunek równowagi (wzór (5)) – 2 pkt.

Rozwiązanie zad 2.

Zgodnie z prawem Faradaya siła elektromotoryczna indukowana w obwodzie, po pominięciu jego samoindukcji, jest równa

$$U = -\frac{d(BS \cos \alpha)}{dt} = BS \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}, \quad (12)$$

gdzie $S = a^2$, zaś α jest mierzonym od pionu kątem odchylenia płaszczyzny, w której w danym momencie znajduje się drut.

Prędkość kątową $d\alpha/dt$ możemy wyznaczyć z zasady zachowania energii. Po pominięciu energii zgromadzonej w kondensatorze mamy

$$\frac{I}{2} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - mgh \cos \alpha = 0, \quad (13)$$

gdzie

$$h = 2a/3 \quad (14)$$

jest odległością środka masy drutu od osi obrotu, a

$$I = 5ma^2/9 \quad (15)$$

– momentem bezwładności drutu względem osi obrotu. Z powyższego

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{\frac{2mgh}{I} \cos \alpha}. \quad (16)$$

Zatem

$$U = BS \sin \alpha \sqrt{\frac{2mgh}{I} \cos \alpha}. \quad (17)$$

Funkcja $\sin \alpha \sqrt{\cos \alpha}$ ma maksimum dla $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ równe

$$\max(\sin \alpha \sqrt{\cos \alpha}) = \sqrt[4]{3} \sqrt{2}/3 \approx 0,62. \quad (18)$$

(Położenie maksimum można wyznaczyć z warunku $d(\sin \alpha \sqrt{\cos \alpha})/d\alpha = (3 \cos^2 \alpha - 1)/\sqrt{\cos \alpha}/2 = 0$, ale zgodnie z treścią zadania można też było oszacować jego wartość na podstawie wykresu funkcji.)

Maksymalna siła elektromotoryczna jest zatem równa

$$U_{\max} = \sqrt{\frac{8}{15}} \sqrt[4]{3} Ba^2 \sqrt{\frac{g}{a}} \approx 1,0 \cdot Ba^2 \sqrt{\frac{g}{a}}. \quad (19)$$

Ponieważ dioda przepuszcza prąd tylko w jedną stronę, napięcie między okładkami kondensatora będzie równe maksymalnej sile elektromotorycznej.

Podstawiając wartości liczbowe B , a , g otrzymamy

$$U_{\max} \approx 0,05 \text{ V.} \quad (20)$$

Punktacja:

Ogólny wzór na wyindukowaną zgodnie z prawem Faradaya siłę elektromotoryczną (wzór (12))) – 2 pkt.

Wzór (16) na prędkość kątową ramki – 2 pkt.

Moment bezwładności ramki względem osi obrotu (wzór (15)) oraz odległość środka masy ramki od osi obrotu (wzór (14)) – 1 pkt.

Zależność wyindukowanej siły elektromotorycznej od kąta odchylenia ramki (wzór (17)) – 1 pkt.

Zauważenie, że szukane napięcie na kondensatorze jest równe maksymalnej wyindukowanej sile elektromotorycznej – 2 pkt.

Szukane napięcie na kondensatorze (wzór (19)) – 1 pkt.

Wynik liczbowy (wzór (20)) – 1 pkt.

Rozwiązanie zadania 3.

Energia sprężonego powietrza będzie maksymalnie wykorzystana, jeśli opuszczając silnik będzie ono miało ciśnienie i temperaturę otoczenia, a przemiana będzie odwracalna. Wynika to z następujących rozważań: wylatujące powietrze nie może mieć ciśnienia mniejszego niż otoczenie, bo inaczej nie opuściło by silnika. Jeśli to ciśnienie byłoby większe od ciśnienia otoczenia, to rozprężając powietrze można by było uzyskać dodatkową pracę. A gdyby temperatura wylatującego powietrza była inna niż temperatura otoczenia, to można by zbudować silnik cieplny wykorzystujący tę różnicę temperatur.

W rozważanym przypadku najprościej jest rozważyć rozprężanie izotermiczne. Zauważmy jednak, że jeśli stan końcowy i początkowy oraz parametry otoczenia są ustalone, to praca wykonana w dowolnym procesie odwracalnym jest taka sama.

Zatem energia, którą można wykorzystać jest równa pracy wykonanej przez gaz przy rozprężaniu izotermicznym

$$E = pV \ln \frac{p}{p_0}, \quad (21)$$

gdzie p jest ciśnieniem w zbiorniku o objętości V , p_0 – ciśnieniem otoczenia.

Objętość zbiornika jest równa

$$V = \pi r^2 l + \frac{4}{3} \pi r^3. \quad (22)$$

W naszym przypadku otrzymamy

$$E = 48 \text{ MJ} \quad (23)$$

Dla silnika spalinowego o sprawności 30%, przyjmując, że ciepło spalania benzyny jest równe 44 MJ/kg \approx 32 MJ/l, otrzymujemy, że energia potrzebna do przejechania 100 km wynosi

$$E_{100} = 0.3 \cdot 32 \text{ MJ/l} \cdot 5 \text{ l} = 48 \text{ MJ.} \quad (24)$$

Zatem przy założeniu, że silnik osiąga maksymalną teoretyczną sprawność, odległość jaką może przebyć rozważany samochód wynosi około 100 km.

Uwaga: Ze wzoru na energię wewnętrzną gazu $U = c_V N T$ wynika, że energia wewnętrzna gazu w zbiorniku i po opuszczeniu silnika jest taka sama. A zatem cała praca wykonana przez rozpatrywany silnik jest równa ciepłu pobranemu z otoczenia. To oznacza, że dużym praktycznym problemem przy konstruowaniu silnika takiego typu jest wydajne ogrzewanie rozprężającego się powietrza.

Punktacja:

Zauważenie, że silnik wykona maksymalną pracę, jeśli pracuje w sposób odwracalny, a wylatujące powietrze ma temperaturę i ciśnienie takie jak otoczenie – 3pkt.

Całkowita praca, jaką może wykonać silnik przy rozprężaniu powietrza (wzór (21)) – 2 pkt.

Wzór (22) na objętość zbiornika – 1 pkt.

Wartość liczbowa całkowitej pracy, jaką może wykonać silnik przy rozprężaniu powietrza (wzór (23)) – 1 pkt.

Wyznaczenie energii potrzebnej do przejechania 100km na podstawie zużycia paliwa przez samochód z silnikiem spalinywym (wzór (24)) – 1 pkt.

Wynik liczbowy (ok. 100km – wynik może być inny, jeśli przyjęta została inna wartość ciepła spalania benzyny) na odległość jaką może przebyć rozważany samochód – 2 pkt.

Uwaga dla sprawdzających: Podany w treści zadania wzór na pracę wykonaną przez gaz doskonały w trakcie rozprężania adiabatycznego ma błędny współczynnik. Przedstawione rozwiązanie nie korzysta z tego wzoru, jednak zgodnie z uwagą w treści zadania, maksymalną pracę można uzyskać w dowolnym procesie odwracalnym, również zawierającym rozprężanie adiabatyczne. Rozprężony w ten sposób gaz należałoby jednak potem w sposób odwracalny podgrzać, np. używając silnika Carno działającego między otoczeniem a gazem (o zmiennej temperaturze). Otrzymamy:

Praca wykonana w procesie adiabatycznym

$$W_{ad} = k \cdot pV \left[1 - \left(\frac{p_1}{p} \right)^{R/(c_V+R)} \right],$$

gdzie p , V są początkowym ciśnieniem i objętością gazu w zbiorniku, p_1 – ciśnieniem gazu na końcu tego procesu, a k – współczynnikiem. Rozsądne jest przyjęcie, że po tym rozprężaniu gaz będzie miał objętość równą objętości końcowej $V_0 = pV/p_0$ (w przeciwnym razie prócz podgrzewania, trzeba go będzie jeszcze sprężyć lub rozprężyć). Korzystając z równania adiabaty $pV^\kappa = p_1V_0^\kappa$, gdzie $\kappa = (c_V + R)/c_V$, otrzymamy

$$p_1 = p \left(\frac{V}{V_0} \right)^\kappa = p \left(\frac{p_0}{p} \right)^\kappa,$$

zatem

$$W_{ad} = k \cdot pV \left[1 - \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\kappa R/(c_V+R)} \right] = k \cdot pV \left[1 - \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/c_V} \right].$$

Uwzględniając, że mamy do czynienia z $n = pV/(RT_0)$ molami gazu, jego temperatura gazu po tym procesie będzie równa

$$T_1 = \frac{p_1V_0}{nR} = \frac{p_1V_0}{pV}T_0 = \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\kappa-1} T_0.$$

Pobierając ciepło z otoczenia o temperaturze T_0 i podgrzewając w procesie odwracalnym n moli gazu od temperatury T do $T + dT$, możemy uzyskać pracę

$$dW = \frac{T_0 - T}{T} nc_v dT,$$

zatem całkowita praca uzyskana przy podgrzewaniu gazu wynosi

$$\begin{aligned} W_{\text{podg}} &= \int_{T_1}^{T_0} \frac{T_0 - T}{T} n c_v dT = n c_v \left(T_0 \ln \frac{T_0}{T_1} - T_0 + T_1 \right) \\ &= \frac{c_v}{R} p V \left[\ln \left(\frac{p_0}{p} \right)^{1-\kappa} - 1 + \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\kappa-1} \right] \\ &= p V \ln \frac{p}{p_0} + p V \left[1 - \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/c_v} \right]. \end{aligned}$$

Zatem cała praca jest równa

$$W = W_{ad} + W_{\text{podg}} = p V \ln \frac{p}{p_0} + \left(k - \frac{c_v}{R} \right) p V \left[1 - \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/c_v} \right].$$

Przyjmując $k = c_v/R$ dostaniemy wzór (21), jednak dla współczynnika podanego w treści zadania dostajemy błędnie

$$W = p V \ln \frac{p}{p_0} + \left(\frac{R}{c_v} - \frac{c_v}{R} \right) p V \left[1 - \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/c_v} \right].$$

Jeśli uczeń, przeprowadzając przedstawione rozumowanie, uwzględniając $k = R/c_v$, dostał powyższy wzór, ten fragment rozwiązania należy uznać za poprawny.

Jeszcze innym sposobem wyznaczenia szukanej pracy, jest rozprężenie adiabatyczne do ciśnienia otoczenia p_0 , a następnie izobaryczne podgrzewanie gazu przy użyciu silnika Carno. Wynik, jaki uzyskamy w takim przypadku, jest następujący

$$W = p V \ln \frac{p}{p_0} + \left(k - \frac{c_v}{R} \right) p V \left[1 - \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/(c_v+R)} \right].$$

Zadanie D1

Współczynnik załamania oleju jadalnego

Masz do dyspozycji:

- olej jadalny;
- naczynie z matowym płaskim dnem, wykonane z nieprzezroczystego materiału (np. garnek o średnicy 10-15 cm);
- wskaźnik laserowy;
- linijkę;
- papier milimetrowy;
- nożyczki;
- zaciemnione pomieszczenie.

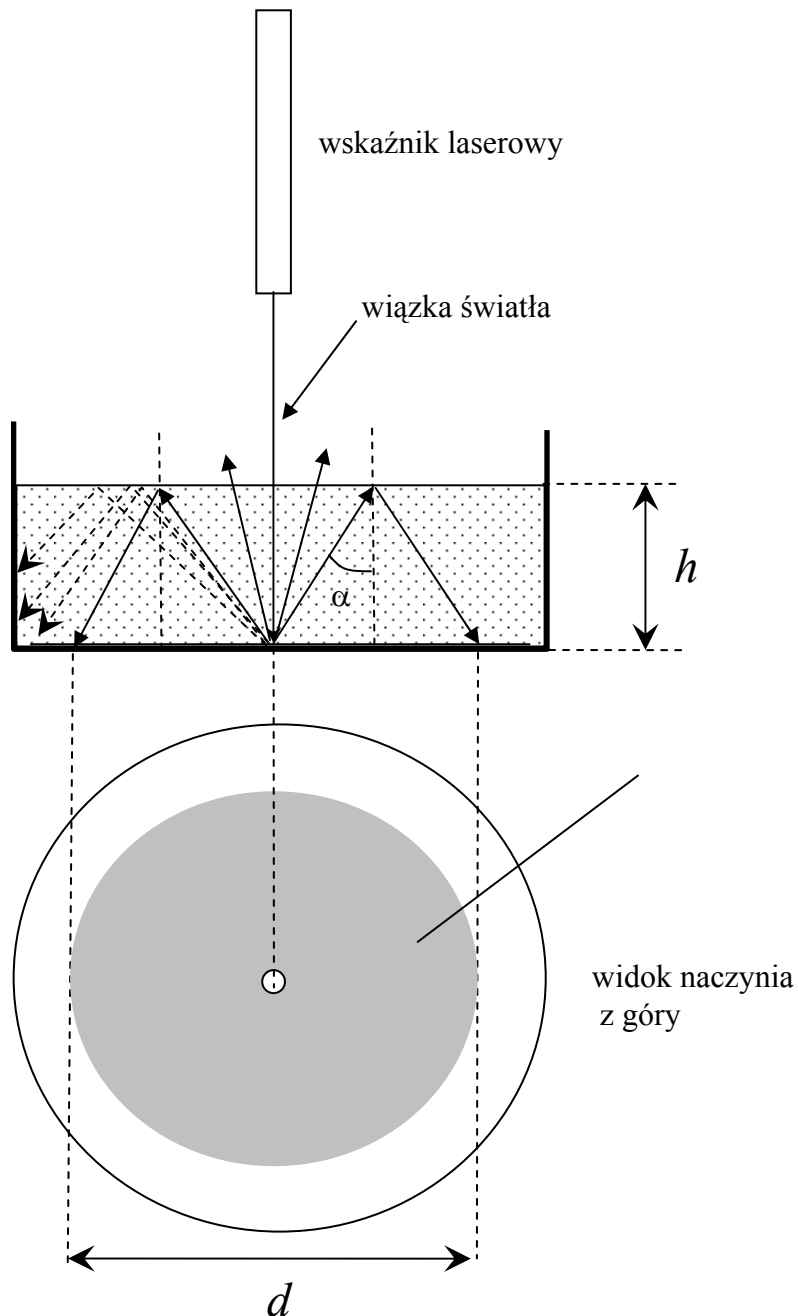
Jeśli wiązkę światła laserowego skierować na dno naczynia wypełnionego do pewnego poziomu olejem, to można zaobserwować, że wokół jasnego punktu na dnie, na który pada promień światła laserowego, tworzy się mniej oświetlony obszar w kształcie koła. Wykorzystując to zjawisko wyznacz współczynnik załamania oleju jadalnego względem powietrza.

Uwaga:

Wykonując pomiary zachowaj szczególną ostrożność! Uważaj, aby odbita wiązka światła laserowego nie trafiła w oczy!

Rozwiązanie

Jeden ze sposobów rozwiązania zadania polega na wykorzystaniu zjawiska całkowitego wewnętrznego odbicia rozproszonego światła laserowego od powierzchni oleju. Odpowiednie doświadczenie można wykonać w układzie doświadczalnym przedstawionym na rys. 1.



Rys. 1

Światło laserowe rozprasza się na (matowym) dnie naczynia. Promienie, które padają po rozproszeniu na dnie naczynia na powierzchnię oleju pod kątem większym niż kąt graniczny, ulegają całkowitemu wewnętrznemu odbiciu i padają ponownie na powierzchnię dna. Z

wyjątkiem jasnej plamki powstającej w miejscu bezpośredniego padania światła laserowego, środkowa część dna naczynia o średnicy d jest słabiej oświetlona. Średnica ciemniejszego obszaru zależy od grubości warstwy oleju h oraz jego współczynnika załamania. Warunek całkowitego wewnętrznego odbicia światła na granicy olej-powietrze można zapisać w postaci:

$$n = \frac{1}{\sin(\alpha)} = \frac{d/4}{\sqrt{h^2 + (d/4)^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{4h}{d}\right)^2}, \quad (1)$$

gdzie n – współczynnik załamania oleju, α - kąt graniczny odpowiadający całkowitemu wewnętrznemu odbiciu.

Zatem, żeby wyznaczyć współczynnik załamania oleju wystarczy wyznaczyć średnicę obszaru ciemnego dla danej grubości warstwy oleju h . Grubość warstwy oleju można zmierzyć linijką. Ze względu na menisk tworzący się przy powierzchni linijki, pomiar grubości warstwy oleju jest obarczony błędem systematycznym. Żeby zwiększyć dokładność pomiaru współczynnika załamania należy wykonać pomiary średnicy d ciemnego obszaru dla kilku różnych grubości h warstwy oleju. W tym celu na dnie naczynia należy umieścić papier milimetrowy z zaznaczoną podziałką ułatwiająca odczytywanie średnicy ciemnego obszaru.

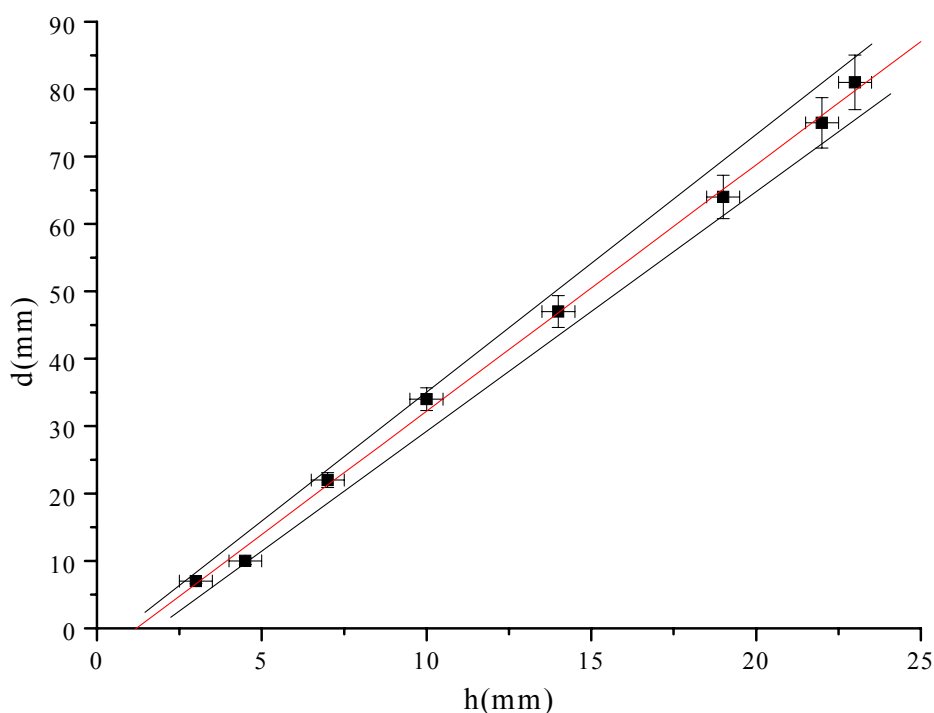
Ze związku (1) wynika, że średnica ciemnego obszaru jest proporcjonalna do grubości warstwy oleju:

$$d = \frac{4}{\sqrt{n^2 - 1}} h \quad (2)$$

Zatem, z dopasowania prostej do zależności średnicy d od grubości h można wyznaczyć

współczynnik proporcjonalności $\beta = \frac{4}{\sqrt{n^2 - 1}}$.

Wyniki uzyskane dla kilku różnych grubości warstwy oleju przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2

Z rysunku 2 wynika, że z dokładnością do niepewności pomiarowych dane doświadczalne układają się na prostej. Warto jednak zauważyć, że prosta ta nie przechodzi przez początek układu współrzędnych. Wynika to z błędu systematycznego popełnianego przy pomiarze grubości cieczy (menisk) oraz niepewności określenia średnicy ciemnego obszaru. Z dopasowania prostej do danych doświadczalnych uzyskano wartość współczynnika $\beta = (3,64 \pm 0,10)$. Odpowiada mu wartość współczynnika załamania

$$n = \sqrt{1 + \frac{16}{\beta^2}} = (1,485 \pm 0,020).$$

Proponowana punktacja

- 1) Jakościowe wyjaśnienie obserwowanego zjawiska optycznego do 4 pkt.
- 2) Propozycja układu pomiarowego, w którym można wyznaczyć współczynnik załamania oleju (przy wykorzystaniu środków określonych w treści zadania) do 2 pkt.
- 3) Wyprowadzenie związku pomiędzy średnicą ciemnego obszaru, grubością warstwy i współczynnikiem załamania oleju. do 4 pkt.
- 4) Wykonanie pomiarów dla możliwie szerokiego zakresu grubości warstwy oleju, (po 1 pkt. za każdy punkt pomiarowy, maksymalnie 5 pkt.) do 5 pkt.
- 5) Wykonanie wykresu i dopasowanie prostej uwzględniające niepewności pomiarowe, lub równoważna analiza uwzględniająca błąd systematyczny związany z meniskiem do 4 pkt.
- 6) Uzyskanie wyniku końcowego wraz niepewnością pomiarową do 1 pkt.

Zadanie D2

Gwizdząca butelka

Masz do dyspozycji:

- plastikową butelkę o pojemności 1,5-2 l z szyjką o walcowym kształcie i długości ok. 3 cm,
- naczynie o znanej pojemności, znacznie mniejszej niż pojemność butelki,
- komputer z kartą dźwiękową, mikrofonem i oprogramowaniem umożliwiającym wykorzystanie komputera jako oscyloskopu z pamięcią,
- wodę.

Dmuchając nad otworem butelki można sprawić, że z butelki zacznie wydobywać się dźwięk.

- 1) Wypełniając butelkę wodą, wyznacz zależność częstotliwości tego dźwięku od objętości powietrza zawartego w butelce. Wykonując pomiary zawsze próbuj wydobyć z butelki dźwięk o możliwie najniższej częstotliwości. Wykonaj wykres tej zależności dla możliwie szerokiego zakresu objętości.
- 2) Zbadaj czy uzyskaną doświadczalną zależność można przedstawić w postaci potęgowej:

$$f = f_0 \left(\frac{V}{V_0} \right)^\alpha,$$

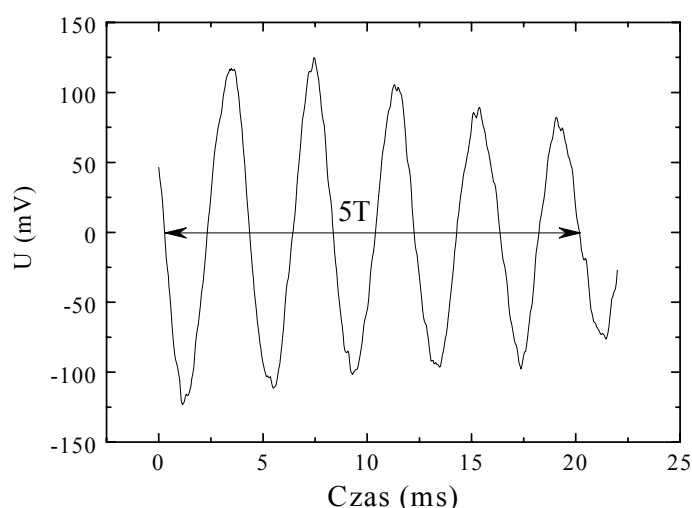
gdzie f_0 , V_0 , α - pewne stałe.

Uwaga:

Do pomiarów możesz wykorzystać program winscope.exe dostępny na stronie Olimpiady Fizycznej: <http://www.kgof.edu.pl/> lub wykorzystać program Oscyloskop dostępny na płycie CD dołączonej do podręcznika J. Blinowski, W. Zielicz, „Fizyka z astronomią. Kształcenie w zakresie rozszerzonym”, tom. I, WSiP, Warszawa 2002 (i 2003, II wydanie).

Rozwiązanie

Idea rozwiązania zadania nie jest skomplikowana. Po wypełnieniu butelki wodą należy odlewać z niej kolejne porcje wody i dmuchając ponad otworem butelki rejestrować emitowany dźwięk. Do odmierzenia wody należy wybrać naczynie o pojemności znacznie mniejszej niż pojemność butelki. Należy się spodziewać, że im więcej punktów pomiarowych będziemy mieć do dyspozycji tym lepiej będzie można zweryfikować hipotezę postawioną w drugiej części zadania. Trzeba jednak wziąć również pod uwagę to, że wybierając zbyt małe naczynie zwiększamy niepewność wyznaczania objętości powietrza zawartego w butelce. W doświadczeniu wykonanym przez recenzenta używane było naczynie o pojemności $V_0=0.175$ l i butelka o pojemności 2 l. Rejestrację sygnałów akustycznych można przeprowadzić używając mikrofonu podłączonego do karty dźwiękowej komputera. Wykorzystując odpowiedni program komputerowy (np. program Oscyloskop) można zapisać uzyskane dane pomiarowe w plikach i analizować je przy użyciu innych programów. Typowa zależność napięcia U odpowiadająca sygnałowi dźwiękowemu, zarejestrowanemu po odlaniu z butelki dwóch porcji wody ($2V_0=0,35$ l) przedstawiona jest na rys. 1.

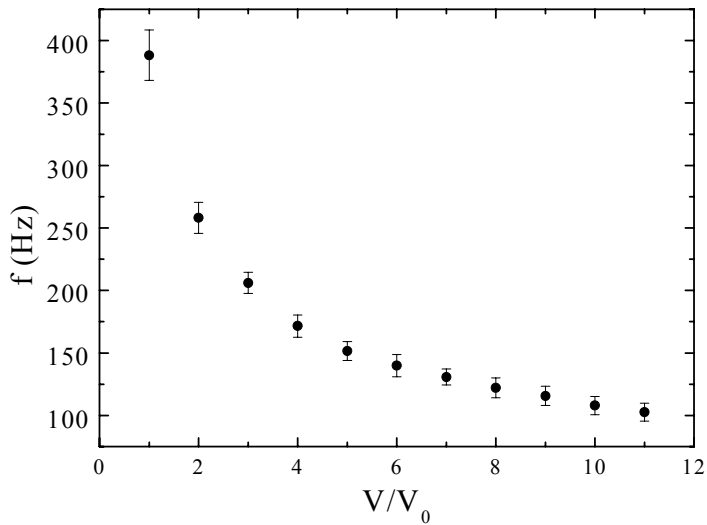


Rys. 1

Pomimo tego, że amplituda sygnału zmniejsza się z upływem czasu, można wyznaczyć przedział czasu odpowiadający np. pięciokrotnej wielokrotności okresu drgań T . Dzięki pomiarowi czasu trwania kilku okresów drgań można zwiększyć dokładność wyznaczenia częstotliwości dźwięku emitowanego przez butelkę $f = 1/T$. Na rys. 2 przedstawiono zależność częstotliwości drgań od objętości powietrza w butelce wyznaczoną na podstawie 3-4 kolejnych rejestracji dźwięku dla danego wypełnienia butelki. Niepewność wyniku pomiarowego oszacowano biorąc pod uwagę rozrzut statystyczny kolejno wyznaczonych częstotliwości drgań. Z wykresu przedstawionego na rys. 2 wynika, że częstotliwość emitowanego dźwięku maleje wraz ze wzrostem objętości powietrza w butelce. Żeby sprawdzić, czy zmiany częstotliwości można opisać zależnością potęgową, wygodnie jest skorzystać z własności funkcji logarymicznej. Logarytmując obie strony wzoru podanego w treści zadania dostajemy zależność liniową:

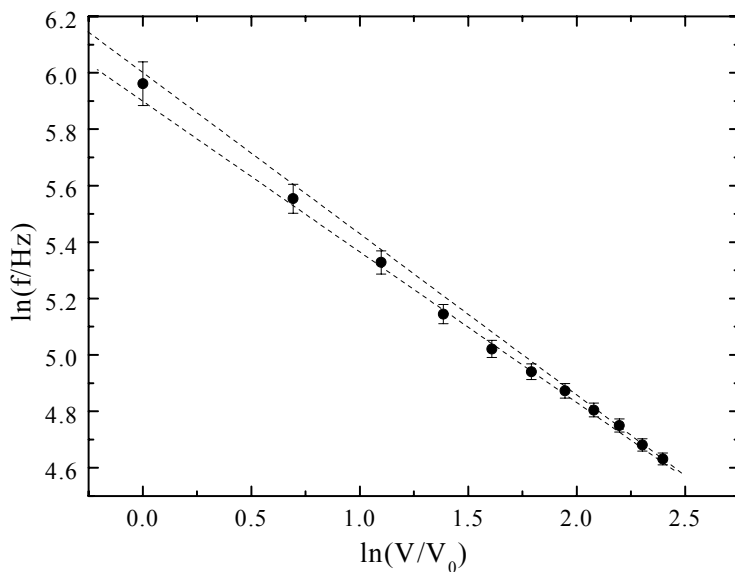
$$\ln f = \alpha \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) + \ln f_0, \quad (1)$$

Jeśli więc zależność częstotliwości drgań od objętości zawartego w butelce powietrza można opisać funkcją potęgową, to w skali podwójnie logarytmicznej punkty doświadczalne powinny układać się na prostej o nachyleniu α .



rys. 2

Po odpowiednim przeliczeniu danych doświadczalnych sporządzono wykres przedstawiony na rys. 3.



Rys. 3

Wynika z niego, że w ramach dokładności pomiarowej punkty doświadczalne układają się na prostej, co oznacza, że uzyskaną doświadczalne zależność częstotliwości od objętości powietrza w butelce można przedstawić w postaci potęgowej. Z dopasowania prostej otrzymujemy wartość parametru $\alpha = (-0,54 \pm 0,01)$. Oznacza to, że częstotliwość dźwięku jest w przybliżeniu odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka z objętości powietrza w butelce. Taką zależność można przewidzieć rozważając mechanizm powstawania drgań powietrza w butelce (patrz dodatek).

Proponowana punktacja

- 1) Pomysł wykonania doświadczenia do 1 pkt.
- 2) Wykonanie pomiarów częstotliwości dźwięku emitowanego przez butelkę do 6 pkt.
(w zależności od liczby punktów pomiarowych oraz zakresu objętości, 1 pkt. dla 2 punktów pomiarowych, po jednym punkcie za każdy następny aż do 5 punktów, 1 punkt za zakres stosunku objętości powyżej 7)
- 3) Wyznaczenie niepewności pomiarowych częstotliwości do 1 pkt.
- 4) Wykonanie wykresu zależności częstotliwości drgań od objętości do 2 pkt.
(zakres objętości, zaznaczenie niepewności pomiarowej)
- 5) Sprawdzenie hipotezy postawionej w treści zadania do 8 pkt.
(sprowadzenie zależności potęgowej do zależności liniowej – do 2pkt, wykonanie wykresu w skali logarytmicznej – do 3 pkt., dopasowanie prostej uwzględniające niepewności pomiarowe do 3 pkt. lub równoważna analiza umożliwiająca sprawdzenie hipotezy)
- 8) Jeśli z uzyskanych pomiarów wynika poprawny wniosek końcowy do 2 pkt.

Dodatek

Rozważamy ruch powietrza w szyjce o długości l pod wpływem zmian ciśnienia w środku butelki. Przyjmijmy, że objętość V butelki jest znacznie większa od objętości szyjki. Jeśli powietrze w szyjce potraktujemy jako coś w rodzaju sztywnego korka, to po przesunięciu go o x ciśnienie w środku butelki wyniesie dla procesu adiabatycznego:

$$\Delta p = -\frac{\kappa p}{V} \Delta V = -\frac{\kappa p}{V} Sx$$

Na powietrze w szyjce zacznie działać siła zwrotna:

$$F_x = \Delta p S = -\frac{\kappa p}{V} S^2 x$$

Równanie ruchu powietrza w szyjce butelki można napisać w postaci

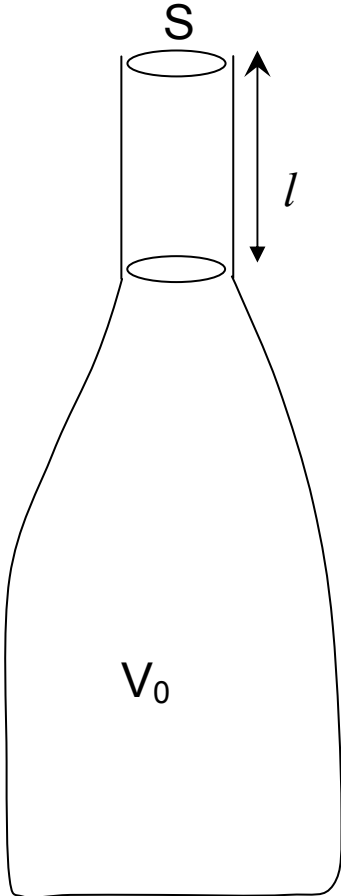
$$\rho l S \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\kappa p}{V} S^2 x$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego o częstotliwości:

$$\omega^2 = \frac{\kappa p}{\rho} \frac{S}{V l} = u^2 \frac{S}{V l}$$

Z tych uproszczonych rozważań wynika, że częstotliwość drgań powietrza powinna zmieniać się odwrotnie proporcjonalnie do pierwiastka z jego objętości.

Badana butelka miała objętość 2l, szyjka miała średnicę 2.1 cm i długość 3 cm. Odpowiada to okresowi drgań ok. 8 ms. Wynik ten jest w bardzo dobrej zgodności z wynikiem doświadczenia.



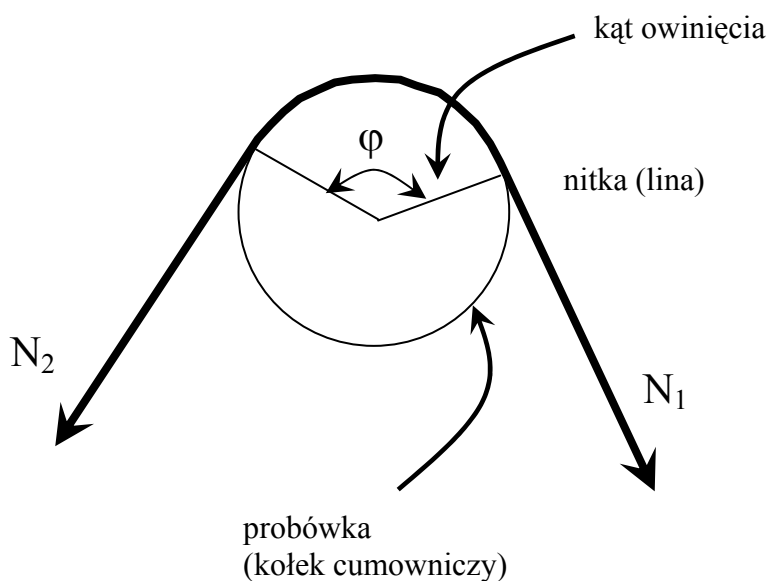
Zadanie D3

Tarcie nitki o probówkę

Statki cumuje się do nadbrzeża owijając linę wokół kołka cumowniczego. Jako model tego zjawiska rozważamy nitkę owiniętą wokół probówki (patrz rysunek). Zdefiniujmy parametr

$\gamma = \frac{N_2}{N_1}$, gdzie N_2, N_1 , oznaczają naprężenia na dwóch końcach nitki.

Niech Γ oznacza maksymalną wartość parametru γ , przy którym nitka nie ślizga się po probówce.



Mając do dyspozycji

- 3 jednakowe probówki;
- 3 statywy z uchwytami;
- linijkę;
- nitkę;
- 50 spinaczy biurowych,

wyznacz zależność parametru Γ od kąta nawinięcia nitki. Sprawdź czy zależność tę można opisać równaniem $\Gamma(\varphi) = e^{\mu\varphi}$, gdzie μ - pewna stała.

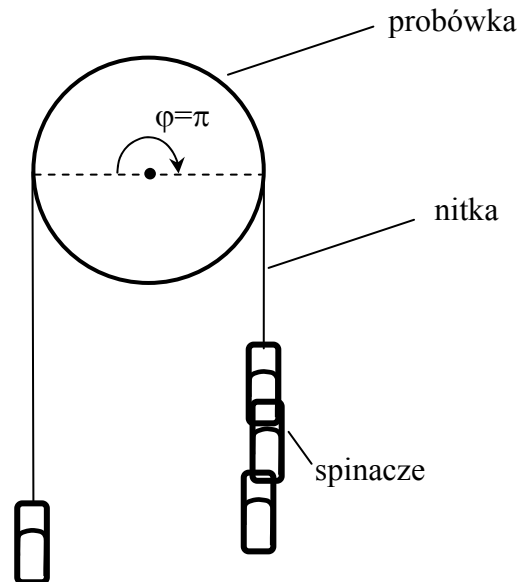
Wskazówki

- 1) Możesz wykorzystać nawijanie nitki na więcej niż jedną probówkę. Całkowity kąt nawinięcia jest wówczas równy sumie kątów nawinięcia na poszczególne probówki.
- 2) Zadbaj o czystość nitki i probówek.

Rozwiązanie

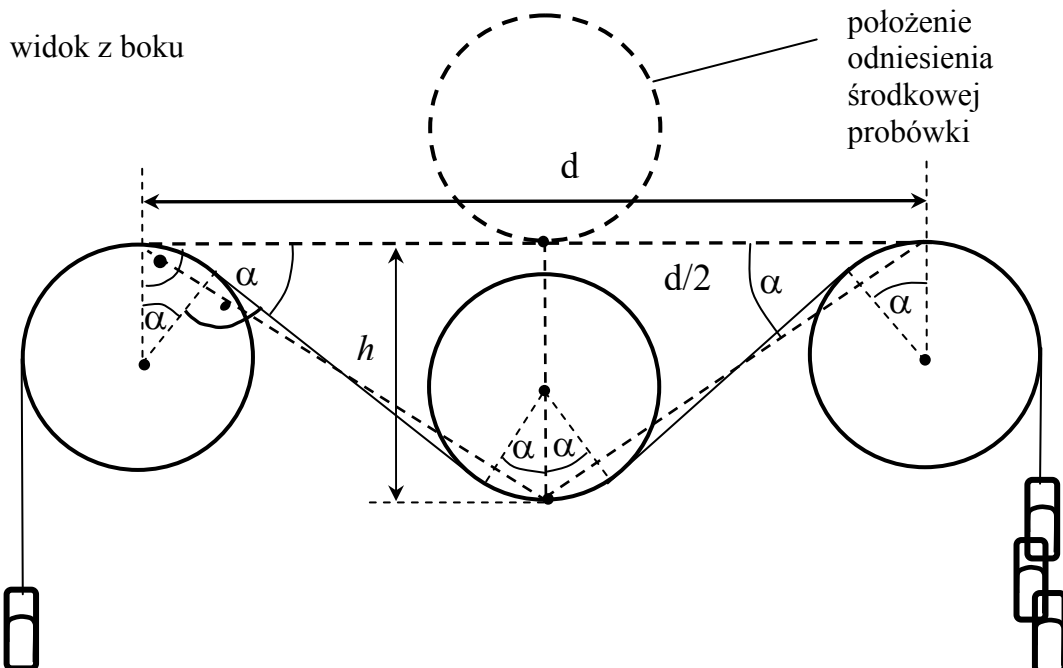
Z treści zadania wynika, że należy badać siłę tarcia dla różnych kątów owinięcia próbki. Najprostszy układ doświadczalny, w którym można wykonać takie pomiary przedstawiono schematycznie na rys. 1. Naprężenie nitki (a więc i tarcie) można zmieniać zawieszając na jej końcach spinacze biurowe.

widok z boku



Rys. 1

W praktyce okazuje się, że już dla dwóch i pół owinięcia siła tarcia utrzymuje wszystkie dostępne spinacze. Żeby uzyskać więcej punktów pomiarowych można zbudować układ złożony z trzech próbek, np. taki jak przedstawiony na Rys. 2.



Rys. 2

Dwie z próbek umieszczono poziomo na tej samej wysokości. Po przewieszeniu nitki przez próbki, po środku między nimi umieszczono, na pewnej wysokości, (również poziomo) trzecią próbkę. Zmieniając wysokość środkowej próbki można zmieniać sumaryczny kąt owinięcia próbek. Zawieszając spinacze na jednym z końców nitki można w tym układzie znaleźć warunki, w których nitka zacznie się ślizgać po próbkach. Mierząc odległość h o jaką środkowa próbka obniża się w stosunku do położenia, w którym styka się z nitką (położenie odniesienia zaznaczone na rys. 2) oraz odległość d pomiędzy skrajnymi próbkami można wyznaczyć sumaryczny kąt owinięcia

$$\varphi = \pi + 4\alpha \quad (1)$$

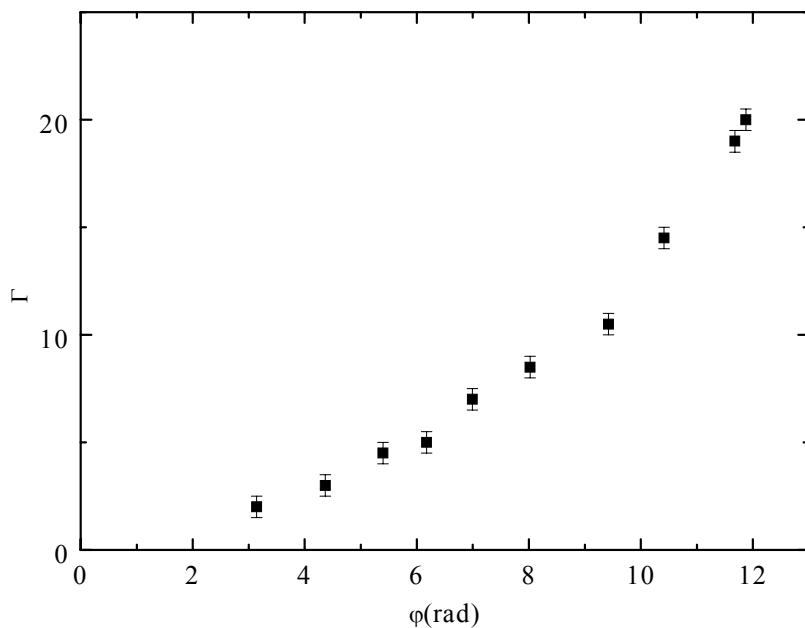
gdzie 4α - kąt o jaki zwiększa się sumaryczne owinięcie. Z rozważań geometrycznych wynika, że w rozważanym układzie doświadczalnym, gdy promień próbki $\ll d$ zachodzi związek

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{h}{2d} \quad (2)$$

Przykładowe wyniki uzyskane przez recenzenta przy użyciu próbek o średnicy 1,5 cm zebrano w tabeli 1. Odległość między zewnętrznymi próbkami wynosiła 28,5 cm. Jeden z końców nitki obciążony był $N_1=2$ spinaczami. Stosunek liczby spinaczy na obu końcach nitki, przy którym nitka zaczyna się przesuwac po próbkach wyznacza maksymalną wartość parametru γ , przy którym nitka nie ślizga się po próbce, czyli parametr Γ . Pomiar wykonano w dwóch konfiguracjach: startując z początkowego kąta owinięcia równego π oraz przy początkowym kącie owinięcia równym 3π (jedna z próbek owinięta dodatkowym zwojem nitki). W ten sposób udało się rozszerzyć badany zakres sił tarcia.

Lp.	h (cm)	φ (rad)	Liczba spinaczy (drugi koniec nitki)	Γ
1.	0	π	4	2
2.	4,5	4,36	6	3
3.	9,0	5,39	9	4.5
4.	13,5	6,18	10	5
5.	20,5	6,99	14	7
6.	39,0	8,02	17	8.5
po nawinięciu dodatkowego zwoju na jedną z próbek				
7.	0	3π	21	11.5
8.	3,6	10,41	28	14
9.	9,0	11,68	38	19
10.	10,0	11,87	40	20

Na podstawie uzyskanych wyników sporządzono wykres (rys. 3) prezentujący zależność maksymalnego stosunku sił naciągu obu końców nitki $\Gamma=N_2/N_1$ od kąta owinięcia φ . Ponieważ siłę potrzebną do poruszenia nitki wyznaczono z dokładnością do ciężaru jednego spinacza to jako niepewność wartości Γ przyjęto 0,5.

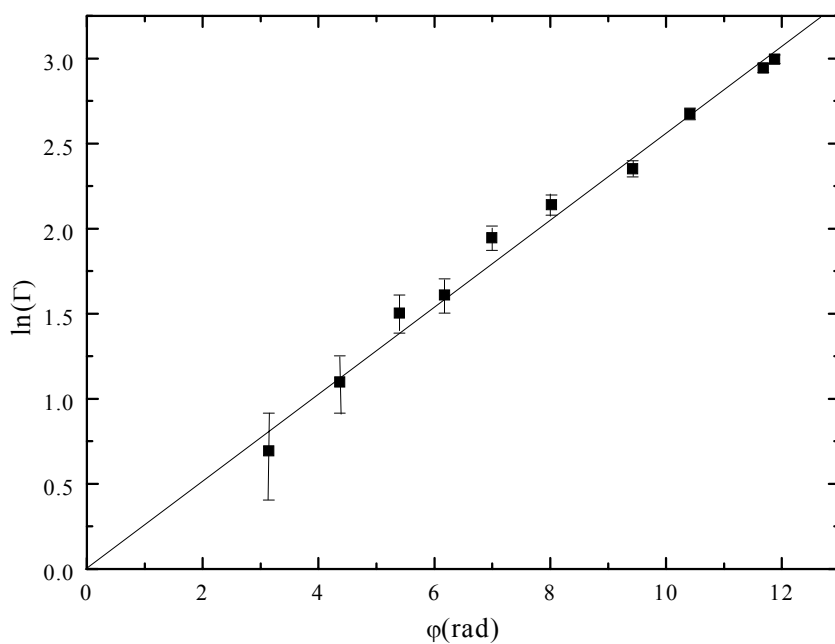


Rys. 3

Z wykresu przedstawionego na rys. 3 wynika, że parametr Γ rośnie wraz ze wzrostem kąta owinięcia. Żeby sprawdzić, czy wzrost ten można opisać zależnością wykładniczą wygodnie jest zlogarytmować obie strony wzoru podanego w treści zadania. Otrzymamy wtedy zależność liniową, której wykres powinien przechodzić przez początek układu współrzędnych:

$$\ln \Gamma(\varphi) = \mu \varphi \quad (3)$$

Po odpowiednim przeliczeniu danych pomiarowych sporządzono wykres przedstawiony na rys. 4.



Rys. 4

Z wykresu przedstawionego na rys. 4 wynika, że z dokładnością do niepewności pomiarowych, punkty eksperymentalne układają się na prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych. Potwierdza to prawdziwość hipotezy, że zależność parametru Γ od kąta owinięcia można opisać równaniem $\Gamma(\varphi) = e^{\mu\varphi}$.

Na podstawie dopasowania można wyznaczyć wartość współczynnika tarcia nitki o szkło, która wynosi $\mu = 0,25 \pm 0,02$. Nie było to jednak przedmiotem zadania.

Proponowana punktacja

1. Pomysł przeprowadzenia doświadczenia pozwalającego wyznaczyć zależność parametru Γ od kątów owinięcia: układ pozwalający wyznaczyć zależność Γ od kątów owinięcia będących nieparzystą wielokrotnością π (np. układ z jedną próbówką) - do 2 pkt. gdy układ umożliwia badanie siły tarcia dla kątów owinięcia różniących się od $\pi, 3\pi, \dots$ itd. – dodatkowo do 5 pkt.)
w sumie do 7 pkt.
3. Wyprowadzenie związku pomiędzy wzajemnym położeniem probówek i kątem owinięcia (równoważny wzorowi 2) do 3pkt.
4. Wykonanie pomiarów umożliwiających wykreślenie zależności parametru Γ od kąta owinięcia (2 pkt. za wyznaczenie parametru Γ dla dwóch kątów, po jednym punkcie za każdy dodatkowy pomiar, maksymalnie 3 pkt. dodatkowo) do 5 pkt.
5. Wykonanie wykresu lub równoważna analiza umożliwiająca sprawdzenie hipotezy postawionej w treści zadania: wykonanie wykresu w skali logarytmicznej 3 pkt. (za skalę logarytmiczną 1 pkt., dodatkowo 1 pkt. gdy na wykresie umieszczone są tylko dwa punkty pomiarowe, do 2 pkt. za umieszczenie na wykresie większej liczby punktów pomiarowych), ocena niepewności pomiarowych 1 pkt., poprawny wniosek końcowy, zgodny z uzyskanymi rezultatami doświadczenia 1 pkt.) do 5 pkt.