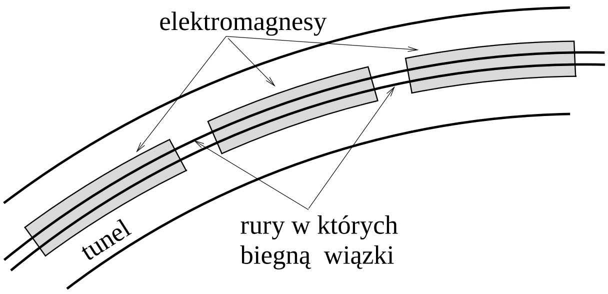
(Za każde z zadań można otrzymać maks. 20 pkt.)

ZADANIE 1

W Wielkim Zderzaczu Hadronów (LHC) w CERN pod Genewą protony o energii $E = 7 \cdot 10^{12}$ eV będą krążyć w tunelu o kształcie zbliżonym do torusa. Mają to być dwie wiązki, każda w osobnej rurze o promieniu wewnętrznym $r = 0,028$ m (rys. 1). Tor ruchu protonów jest zakrzywiany przez 1232 nadprzewodzące elektromagnesy, z których każdy ma długość (wzdłuż kierunku biegu wiązki) $l_0 = 14,3$ m. Każdy z tych elektromagnesów wytwarza wewnątrz przechodzących przez niego fragmentów rur w przybliżeniu jednorodne pole magnetyczne. W każdym z ośmiu sektorów, na jakie podzielony jest cały tunel, elektromagnesy są połączone szeregowo w jeden obwód elektryczny. W przypadkach awaryjnych w ten obwód włączany jest specjalny opornik oddający ciepło do bloku stali o masie $M = 8000$ kg, a zasilanie jest odłączane.



Rys. 1. Szkic fragmentu tunelu LHC. Pominięto niektóre elementy występujące w rzeczywistości. Skala nie jest zachowana.

Oblicz wzrost ΔT temperatury takiego bloku w przypadku awaryjnego zmniejszenia do zera natężenia prądu płynącego w elektromagnesach (a tym samym zmniejszenia do zera natężenia pola magnetycznego) w jednym z ośmiu sektorów.

Przyjmij, że energia pola magnetycznego na zewnątrz rur jest w przybliżeniu równa energii pola magnetycznego wewnątrz rur (taka zależność wynika z rozważenia idealnego zagadnienia, w którym prąd płynie tylko po powierzchni rur, a na zewnątrz nie ma magnetyków).

Pomiń straty energii związane z promieniowaniem elektromagnetycznym i oddawaniem ciepła przez blok do otoczenia.

Prędkość światła $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s, przenikalność magnetyczna próżni $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \mathrm{VsA^{-1}m^{-1}}$, masa protonu $m \approx 1 \cdot 10^9$ eV$/c^2$, ciepło właściwe stali $c_w = 450$J/(kg $\cdot$ K), ładunek protonu $q \approx 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, 1 eV $\approx 1,6 \cdot 10^{-19}$ J.

Informacja dodatkowa: Prócz magnesów zakrzywiających tor protonów, w tunelu znajdują się też magnesy ogniskujące i korygujące wiązkę. Tych magnesów tu nie rozważamy. Z tego względu i z powodu niedokładnego oszacowania energii pola magnetycznego poza rurami, w których biegnie wiązka, rzeczywisty wzrost temperatury jest większy, niż wynika z rozwiązania tego zadania.

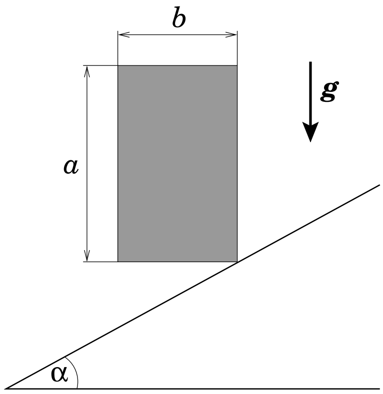
ZADANIE 2

Jednorodny, prostopadłościenny klocek o wymiarach $a \times b \times c$ postawiono na równi pochyłej o kącie nachylenia α (rys. 2). W momencie postawienia klocek się nie obraca, krawędzie o długości a są pionowe, a krawędź o długości c styka się z równią. Zauważono, że w pierwszej chwili po postawieniu klocek nie ślizga się po równi, lecz obraca się względem osi styczności z równią.

Ile wynosi najmniejsza wartość współczynnika tarcia μ_{gr}, dla której jest to możliwe?

Dla $a = b$ przedyskutuj zależność μ_{gr} od α i naszkicuj wykres tej zależności.

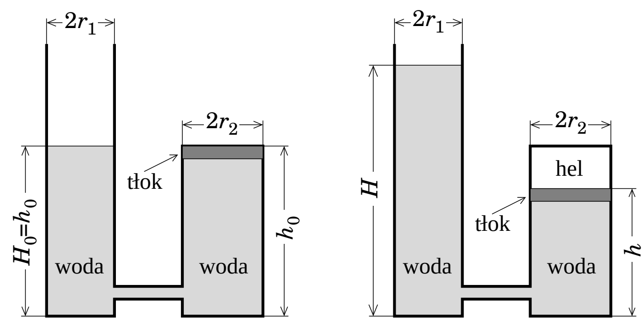
Moment bezwładności jednorodnego prostopadłościanu o masie m względem osi obrotu przechodzącej przez jego środek masy i równoległej do krawędzi o długości c jest równy $I_0 = m\left(a^2 + b^2\right)/12$.



Rys. 2

ZADANIE 3

Rozważmy przedstawiony na rysunku 3 układ składający się z połączonych ze sobą cylindrów o promieniach r_1 oraz r_2. Prawy cylinder – o promieniu r_2 – jest od góry szczelnie zamknięty, a lewy – otwarty. W prawym cylindrze, nad wodą, znajduje się tłok o średniej gęstości równej gęstości wody. Początkowo tłok styka się z wieczkiem prawego cylindra, a jego górna powierzchnia znajduje się na tej samej wysokości, co powierzchnia wody w lewym cylindrze. Następnie do prawego cylindra wpuszczono nad tłok pewną ilość helu. Po ustaleniu się stanu równowagi jego ciśnienie wynosiło $p = 2p_0$ (gdzie p_0 jest ciśnieniem zewnętrznym), a temperatura była równa T_0.



Rys. 3

Oblicz molowe ciepło właściwe helu w cylindrze w rozpatrywanym układzie.

Szukane molowe ciepło właściwe c jest stosunkiem $(Q/\Delta T)/N$, gdzie Q jest ciepłem niezbędnym do podwyższenia temperatury helu od T_0 do $T_0 + \Delta T$, gdzie ΔT jest małe, a N jest liczbą moli helu.

Tłok nie przepuszcza gazów i może przesuwać się bez tarcia.

Ciśnienie zewnętrzne $p_0 = 1000$ hPa, gęstość wody $\rho = 1000$ kg/m^3, przyspieszenie ziemskie $g = 10$m/s^2, $r_1 = 2,5$ cm, $r_2 = 5$ cm, $T_0 = 300$ K, uniwersalna stała gazowa $R = 8,3$ J/(mol $\cdot$ K).

Rozwiązanie zadania 1
Gdy cząstka o ładunku q porusza się z prędkością $\vec{v}$ w polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$, działa na nią siła

$$\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}. \tag{1}$$

Ta siła powoduje zmianę pędu $\vec{p}$ cząstki

$$\frac{d}{dt}\vec{p}=\vec{F}. \tag{2}$$

Ponieważ cząstka jest relatywistyczna, jej pęd jest dany wzorem

$$\vec{p}=\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\vec{v}\frac{E}{c^2}, \tag{3}$$

gdzie $\vec{v}$ jest prędkością cząstki, m – jej masą, E– energią całkowitą, a c – prędkością światła. Ponieważ $\vec{F}$ jest prostopadłe do $\vec{v}$, siła nie zmienia wartości prędkości ani energii. Zatem w tym przypadku równanie (2) sprowadza się do

$$\frac{E}{c^2}\vec{a}=q\vec{v}\times\vec{B}. \tag{4}$$

gdzie $\vec{a}$ jest przyspieszeniem cząstki. Jest to przyspieszenie dośrodkowe, ponieważ $\vec{a}$ jest prostopadłe do $\vec{v}$. Z drugiej strony przyspieszenie dośrodkowe jest równe $a=v^2/R$. Zatem nasza cząstka porusza się po okręgu o promieniu R

$$R=\frac{vE}{qBc^2}. \tag{5}$$

Skoro są 1232 magnesy w sumie zmieniające kierunek biegu cząstki o 360^{o}, to cząstka wewnątrz magnesu porusza się po okręgu o promieniu

$$R=\frac{1232l_0}{2\pi}. \tag{6}$$

Ze wzorów (5) i (6) możemy wyznaczyć indukcję pola magnetycznego wewnątrz magnesu

$$B=\frac{2\pi Ev}{qc^2 1232l_0}. \tag{7}$$

Prędkość v możemy wyznaczyć ze związku

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \tag{8}$$

ale ponieważ w naszym zagadnieniu $E/\left(mc^2\right)$ jest duże, możemy we wzorze (7) przyjąć

$$v\approx c.$$

Daje to

$$\begin{aligned} B&=\frac{2\pi E}{qc1232l_0} && (9)\\ &\approx 8{,}3\ \mathrm{T}. && (10)\end{aligned}$$

Sumaryczna objętość obu rur wewnątrz jednego magnesu wynosi

$$V_1=\pi r^2 l_0\cdot 2. \tag{11}$$

Zatem sumaryczna energia pola magnetycznego wewnątrz fragmentów rur przechodzących przez elektromagnesy znajdujące się w jednym sektorze wynosi

$$\begin{aligned} W_{\text{magwew/sektor}}&=\frac{1232}{8}\cdot\frac{V_1B^2}{2\mu_0} && (12)\\ &=\frac{\pi^3r^2\left(E/q\right)^2}{2\mu_0c^2 1232l_0}. && (13)\end{aligned}$$

Przyjmując zgodnie z założeniem z treści zadania, że energia pola magnetycznego na zewnątrz rur jest równa powyższej, całkowita energia pola magnetycznego w jednym sektorze wynosi

$$\begin{aligned} W_{\text{mag/sektor}}&=\frac{\pi^3r^2\left(E/q\right)^2}{\mu_0c^2 1232l_0} && (14)\\ &\approx 0{,}6\ \mathrm{GJ}. && (15)\end{aligned}$$

Gdy natężenie prądu zmaleje do zera, zmaleje do zera również energia pola magnetycznego. Zgodnie z założeniami, cała zmiana energii pola magnetycznego zostanie zużyta na podgrzanie bloku o masie $M = 8 \cdot 10^3$ kg i cieple właściwym $c_w = 450\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$, zatem temperatura wzrośnie o

$$\Delta T = \frac{W_{\text{mag/sektor}}}{Mc_w} = \frac{\pi^3 r^2 \left(E/q\right)^2}{\mu_0 c^2 1232 l_0 M c_w} \tag{16}$$

$$\approx 166^{\text{o}}\text{C}. \tag{17}$$

Punktacja do zadania 1

Związek między promieniem okręgu, po jakim porusza się proton, indukcją pola magnetycznego i energią oraz prędkością protonu (wzór (5) lub równoważny) – 3 pkt.
Energia pola magnetycznego wewnątrz rur w jednym sektorze (wzór (12) lub równoważny) wyrażona przez B – 2pkt.
Energia pola magnetycznego w jednym sektorze (wzór (14)) wyrażona przez E – 2pkt.
Szukany przyrost temperatury (wzór (16)) – 2pkt.
Wartość liczbowa przyrostu temperatury (wzór (17)) – 1pkt.

Rozwiązanie zadania 2
I sposób
Ponieważ klocek obraca się wokół osi styczności z równią, jego przyspieszenie kątowe ε spełnia związek

$$mg\frac{b}{2} = \left[I_0 + m\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right)\right]\varepsilon, \tag{1}$$

stąd

$$\varepsilon = \frac{gb}{2\left[I_0/m + \left(a^2+b^2\right)/4\right]}. \tag{2}$$

Z zależności geometrycznych przyspieszenie środka masy klocka wzdłuż równi a_x oraz prostopadłe do niej a_y są dane równaniami

$$a_x = \varepsilon\left(\frac{b}{2}\sin\alpha + \frac{a}{2}\cos\alpha\right), \tag{3}$$

$$a_y = \varepsilon\left(\frac{b}{2}\cos\alpha - \frac{a}{2}\sin\alpha\right). \tag{4}$$

Z równań ruchu środka masy mamy

$$mg\sin\alpha - T = ma_x, \tag{5}$$

$$mg\cos\alpha - N = ma_y. \tag{6}$$

gdzie T jest siłą tarcia (dodatnie T oznacza, że jest skierowane w górę równi), a N jest siłą reakcji równi.
Zatem

$$\begin{aligned}\frac{T}{N} &= \frac{g\sin\alpha - a_x}{g\cos\alpha - a_y}\\ &= \frac{g\sin\alpha - \varepsilon\left(b\sin\alpha + a\cos\alpha\right)/2}{g\cos\alpha - \varepsilon\left(b\cos\alpha - a\sin\alpha\right)/2}\\ &= \frac{\left(4I_0/m + a^2\right)\sin\alpha - ab\cos\alpha}{\left(4I_0/m + a^2\right)\cos\alpha + ab\sin\alpha}\\ &= \frac{\left(4a^2/3 + b^2/3\right)\sin\alpha - ab\cos\alpha}{\left(4a^2/3 + b^2/3\right)\cos\alpha + ab\sin\alpha} && (7)\\ &= \mathrm{tg}\left(\alpha - \beta\right), && (8)\end{aligned}$$

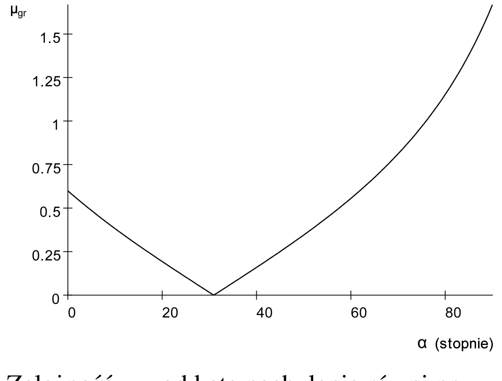
gdzie β jest określone równaniem

$$\mathrm{tg}\,\beta = ab/\left(4I_0/m + a^2\right) = 3ab/\left(4a^2 + b^2\right). \tag{9}$$

Z definicji współczynnika tarcia $\mu \geq |T/N|$, zatem jego szukana wartość graniczna jest równa

$$\begin{aligned}\mu_{\mathrm{gr}} &= \left|\frac{\left(4a^2 + b^2\right)\sin\alpha - 3ab\cos\alpha}{\left(4a^2 + b^2\right)\cos\alpha + 3ab\sin\alpha}\right| && (10)\\ &= \left|\mathrm{tg}\left(\alpha - \beta\right)\right|. && (11)\end{aligned}$$

Zauważmy, że nawet dla bardzo małych wartości α szukane μ_{gr} jest niezerowe, następnie maleje ze wzrostem α i osiąga wartość 0 dla $\alpha = \beta$, a następnie rośnie. (Zauważmy, że ogólny charakter tej zależności nie zależy od konkretnych wartości a i b – pod warunkiem, że $a \neq 0$ i $b \neq 0$.)



Zależność μ_{gr} od kąta nachylenia równi przy $a = b$.

II sposób

Jeśli T jest siłą tarcia (dodatnie T oznacza, że jest skierowane w górę równi), a N jest siłą reakcji równi, to równanie ruchu obrotowego względem środka masy klocka przyjmuje postać

$$I_0\varepsilon = N\left(\frac{b}{2}\cos\alpha - \frac{a}{2}\sin\alpha\right) + T\left(\frac{b}{2}\sin\alpha + \frac{a}{2}\cos\alpha\right). \tag{12}$$

Równania ruchu środka masy są dane wzorami (5) i (6).

Przez krawędź klocka stykającą się z równią przechodzi oś obrotu, co oznacza, że przyspieszenie tego boku jest równe zero

$$a_x - \varepsilon\left(\frac{b}{2}\sin\alpha + \frac{a}{2}\cos\alpha\right) = 0, \tag{13}$$

$$a_y - \varepsilon\left(\frac{b}{2}\cos\alpha - \frac{a}{2}\sin\alpha\right) = 0. \tag{14}$$

Z równań (12), (5), (6), (13) i (14) można wyznaczyć przyspieszenie kątowe klocka dane wzorem (2), a następnie stosunek T/N dany wzorem (7). Dalsze analiza przebiega jak w I sposobie.

Punktacja do zadania 2

Równanie ruchu obrotowego (wzór (1) lub wzór (12) lub równoważny) – 1pkt.
Równania ruchu środka masy (wzory (5) i (6) lub równoważne) – 1pkt.
Związki (wzory (3) i (4) lub (13) i (14) lub równoważne) wynikające z faktu, że oś styczności klocka z równią jest chwilową osią obrotu – 2pkt.
Wyznaczenie przyspieszenia kątowego (wzór (2)) – 2 pkt.
Szukane μ_{gr} (wzór (10) lub równoważny) – 2 pkt.
Dyskusja zależności μ_{gr} od α (funkcja malejąca w przedziale $[0,\ \beta]$, gdzie β jest pewnym kątem określonym przez a i b, $\mu_{\mathrm{gr}} = 0$ dla $\alpha = \beta$, funkcja rosnąca w przedziale $[\beta,\ 90^{\mathrm{o}}]$ i szkic wykresu – 2 pkt.

Rozwiązanie zadania 3

Ponieważ woda jest nieściśliwa mamy

$$S_1 (H - H_0) + S_2 (h - h_0) = 0, \tag{1}$$

gdzie $S_1 = \pi r_1^2$ jest powierzchnią cieczy w lewym cylindrze, $S_2 = \pi r_2^2$ – w prawym, H – wysokością poziomu powierzchni wody w lewym cylindrze, a h – wysokością górnej powierzchni tłoka. Stąd

$$H - H_0 = -\frac{S_2}{S_1}(h - h_0) = \frac{V}{S_1}, \tag{2}$$

gdzie V jest objętością helu.

Z hydrostatyki ciśnienie helu jest równe

$$p = \rho g (H - h) + p_0. \tag{3}$$

Uwzględniając poprzednie wyniki otrzymamy

$$p = \left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}\right)\rho g V + p_0. \tag{4}$$

Podstawiając to do równania stanu gazu doskonałego dostaniemy

$$\left[\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}\right)\rho g V + p_0\right] V = NRT. \tag{5}$$

Traktując V jako funkcję T i różniczkując to równanie stronami po T dostaniemy

$$\rho g \left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}\right) 2V \frac{dV}{dT} + p_0 \frac{dV}{dT} = NR. \tag{6}$$

Zatem związek między małymi zmianami temperatury ΔT i małymi zmianami objętości ΔV jest w rozważanym układzie dany równaniem

$$\left[2\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}\right)\rho g V + p_0\right]\Delta V = NR\Delta T. \tag{7}$$

Z pierwszej zasady termodynamiki wynika, że ciepło dostarczone do helu jest równe

$$Q = \Delta U + p\Delta V, \tag{8}$$

gdzie $\Delta U = (3/2)\, NR\Delta T$ jest zmianą energii wewnętrznej helu, a $-p\Delta V$ jest pracą wykonaną nad helem przez otoczenie.

Uwzględniając związek (7) otrzymujemy

$$Q = \frac{3}{2} NR\Delta T + p \frac{NR\Delta T}{2\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}\right)\rho g V + p_0} \tag{9}$$

Z warunku $p = 2p_0$ dostaniemy $\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}\right)\rho g V = p_0$, a zatem

$$Q = \frac{3}{2} NR\Delta T + \frac{2}{3} NR\Delta T. \tag{10}$$

Zatem szukane molowe ciepło właściwe wynosi

$$c = \frac{13}{6} R \tag{11}$$

$$\approx 18{,}0\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol \cdot K}}. \tag{12}$$

Punktacja do zadania 3

Związek między objętością helu, a zmianą poziomów wody w każdym z cylindrów (wzór (2) lub równoważny) – 1 pkt.

Związek między ciśnieniem helu a jego objętością w rozważanej sytuacji (wzór (4)) – 1 pkt.

Związek między temperaturą helu a jego objętością w rozważanej sytuacji (wzór (5) lub równoważny) – 1 pkt.

Związek między zmianami temperatury helu a zmianami jego jego objętości w rozważanej sytuacji (wzór (7) lub równoważny) – 2 pkt.

Pierwsza zasada termodynamiki (wzór (8) lub równoważny) i zastosowanie jej w rozwiązaniu zadania – 2 pkt.

Szukane ciepło molowe (wzór (11)) – 3 pkt.