LIX OLIMPIADA FIZYCZNA

Rozwiązania zadań

ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA

CZĘŚĆ I

Zadanie 1.

Zauważmy, że siła tarcia każdej kulki o ścianę jest równa zeru, gdyż w przeciwnym razie działałby na nią niezrównoważony moment siły.
Zatem dolna kulka musi naciskać na podstawę siłą $10mg$. Analogicznie, pionowa składowa siły $\vec{F}_{12}$, z jaką działa ta kulka na kulkę na niej leżącą, wynosi $9mg$. W stabilnym stanie równowagi najniższa kulka dotyka jednej z węższych ścianek naczynia, a leżąca na niej – przeciwległej ścianki. Ponieważ kulki działają na siebie wzdłuż prostej łączącej ich środki, z geometrii wynika, że pozioma składowa siły $\vec{F}_{12}$ jest równa

$$9\,mg \cdot \frac{3R-2R}{\sqrt{(2R)^2-(3R-2R)^2}} = 3\sqrt{3}\,mg.$$

Ponieważ dolna kulka jest w równowadze, z taką samą siłą działa ona na tę węższą ściankę, z która sie styka. Jednocześnie z geometrii zagadnienia wynika, że siła nacisku na każdą z szeszych ścianek, jest równa zeru.

Zadanie 2.
Tor ruchu młotka będzie elipsą okrążającą Ziemię i przecinającą tor ruchu stacji (bo w momencie wypuszczenia młotka te tory miały punkt wspólny). Okres obiegu młotka wokół Ziemi T_m będzie różny od czasu obiegu stacji wokół Ziemi T_s. Jeśli T_m i T_s są współmierne – i wtedy po iluś obiegach stacja i młotek znajdą się w tym samym miejscu, co w chwili wypuszczenia młotka. Jeśli T_m i T_s nie są współmierne, to po odpowiednio długim czasie młotek i stacja mogą się znaleźć dowolnie blisko siebie. Zatem w obu przypadkach wystarczy odpowiednio długo poczekać, a młotek przyleci na tyle blisko, że będzie można go złapać. Oczywiście czas czekania może być bardzo, bardzo długi...

Zadanie 3.
Parcie promieniowania słonecznego na żagiel zawsze ma składową działającą „od" Słońca i nie jest możliwe „halsowanie" statku w stronę źródła promieniowania. Jednak zmieniając kat ustawienia żagla możemy w dowolnym stopniu zmieniać stosunek składowej parcia działającej „od" Słońca do składowej do niej prostopadłej. Możemy zatem zmniejszyć jego moment pędu względem Słońca. W skrajnym przypadku, gdybyśmy zmniejszyli ten moment pędu do zera, a następnie zwinęli żagiel, to po pewnym czasie statek spadłby na Słońce. Oznacza to, że odpowiednio ustawiając żagiel, a potem go zwijając (niekoniecznie dopiero wtedy, gdy moment pędu będzie równy zeru), możemy doprowadzić do zbliżenia się statku do Słońca. Nawet ustawienie

żagla prostopadle do prostej łaczącej statek ze Słońcem, a nastęnie zwinięcie go, doprowadzi po pewnym czasie do zbliżania statku do Słońca – podobnie jak pociagnięcie w dół i puszczenie kulki wiszącej na sprężynie doprowadzi do wyskoczenia jej ponad początkowe położenie.
Zatem żagiel kosmiczny można wykorzystać do zbliżenia statku do Słońca.

Zadanie 4.
Ponieważ ściśliwość benzyny jest dużo większa niż ściśliwość wody, położenie batyskafu jest niestabilnym położeniem równowagi.

Zadanie 5.
Gdy jedziemy wolno, zawieszenie praktycznie się nie ugina, natomiast podnosi się środek ciężkości samochodu. Praca potrzebna do podniesienia tego środka przy przejeździe przez nierówność obu osi jest nieco mniejsza (tym mniejsza, im wyżej znajduje się środek ciężkości samochodu) niż mgh, gdzie m jest masą samochodu, h – wysokością przeszkody, g – przyspieszeniem grawitacyjnym.
Gdy jedziemy szybko, środek ciężkości podnosi się w minimalny sposób, ale musimy wykonać pracę na ugięcie zawieszenia. Ta praca jest równa N_1h+N_2h, gdzie N_1 jest średnim naciskiem (w trakcie uginania) przedniej osi na podłoże, a N_2 jest średnim naciskiem tylnej osi. Ponieważ $N_1 + N_2 > mg$ (siła nacisku wzrasta przy uginaniu sprężyny, a prócz tego koło musi się poruszać z niezerowym pionowym przyspieszeniem), energia zużyta na wjechania przez koła na wierzchołek nierówności jest mniejsza przy przejeżdżaniu z bardzo małą prędkością. Ponieważ koła mają niezerową średnicę, część tej energia jest odzyskiwana gdy koła zjeżdżają z nierówności. Jednak analogiczne jak w przypadku wjeżdżania rozumowanie prowadzi do wniosku, że odzyskana energia jest tym mniejsza, im szybciej pokonujemy nierówność. Zatem przejeżdżanie nierówności z mniejszą predkościa jest bardziej korzystne energetycznie.

Zadanie 6.
Rozważmy chwilę, gdy wysokość protonu nad powierzchnią wynosi y i załóżmy, że jego prędkość tworzy z pionem kąt α. Z zasady zachowania energii jego prędkość wynosi $v = \sqrt{2g\,(h-y)}$, a przyspieszenie prostopadłe do kierunku ruchu wynosi $a_\perp = (q/m)\,vB - g\sin\alpha$. Zatem w tym momencie proton porusza się po okręgu o promieniu

$$r = \frac{v^2}{a_\perp} = \frac{2mg\,(h-y)}{qB\sqrt{2g\,(h-y)} - mg\sin\alpha}$$

Dla $y < h/2$ wartość r jest mniejsza niż

$$r_{\max} = \frac{2mgh}{qB\sqrt{2g\,(h/2)} - mg} \approx 2,4\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m} \ll h/4$$

($r_{\max}$ otrzymaliśmy tu biorąc największą możliwą wartość licznika i najmniejszą możliwą wartość mianownika wyrażenia na r dla $0 \le y \le h/2$). Zatem gdyby proton doleciał do wysokości $y < h/2$ to dalej poruszałby się po torze bardziej zakrzywionym (ciągle w tę samą stronę) niż okrąg o promieniu $h/4$. Zatem do momentu, gdy jego prędkość będzie pozioma, proton nie doleci do rozważanej płaszczyzny. Z symetrii równań ruchu wynika, że dalszy tor będzie odbiciem dotychczasowego względem osi pionowej, a zatem proton nigdy nie doleci do rozważanej płaszczyzny.

Uwaga: Ścisły rachunek pokazuje, że proton doleci tylko do wysokości

$$h - \frac{2m^2 g}{q^2 B^2} \approx 9,77 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}.$$

Zadanie 7.
Z prawa załamania wynika, że spełnione są warunki

$$n_A \sin\alpha_{A2} = n_B \sin\alpha_{B2},$$
$$n_A \sin\alpha_{A1} = n_B \sin\alpha_{B1},$$

gdzie α_{A2} jest kątem padania promienia na sferę o promieniu r_2, α_{B2} – kątem załamania po przejściu przez tę sferę, α_{B1} – kątem padania promienia na sferę o promieniu r_1, α_{A1} – kątem załamania po przejściu przez tę drugą sferę.
Dodatkowo z czysto geometrycznych rozważań wynika, że

$$r_2 \sin\alpha_{B2} = R = r_1 \sin\alpha_{B1},$$

gdzie R jest odległością wspólnego środka sfer od prostej, po której porusza się promień po przejściu przez sferę o promieniu r_2.
Powyższe wzory oznaczają, że

$$r_2 \sin\alpha_{A2} = r_1 \sin\alpha_{A1},$$
$$n_A r_2 \sin\alpha_{A2} = n_B r_1 \sin\alpha_{B1}. \qquad (1)$$

Jeśli $n_B > n_A$ to przy maksymalnym szukanym kącie padania będziemy mieli $\alpha_{A2} = 90^{\mathrm{o}}$ (światło wpadające do obszaru $r < r_1$ będzie styczne do sfery $r = r_1$) zatem $\sin\alpha_{\max} = r_1/r_2$.
Jeśli $n_B < n_A$ to przy maksymalnym szukanym kącie padania będziemy mieli $\alpha_{B2} = 90^{\mathrm{o}}$ (światło padające na sferę $r = r_1$ będzie do niej styczne) a zatem $n_A r_2 \sin\alpha_{\max} = n_B r_1$. Stąd $\sin\alpha_{\max} = n_B r_1 / (n_A r_2)$. W tym przypadku może się zdarzyć, że $n_B r_1 / (n_A r_2) > 1$ i wtedy $\alpha_{\max} = 90^{\mathrm{o}}$.

Uwaga: jeśli rozważymy ośrodek o zmiennym, ale zależnym tylko od r współczynniku załamania, to wzór (1) łatwo można uogólnić do postaci

$$r \cdot n(r) \sin\alpha\,(r) = \mathrm{const}\,.$$

Zadanie 8.
Podzielmy krążek na kawałki o małej powierzchni podstawy. Praca przeciwko siłom tarcia wykonana przez taki kawałek jest równa $N\mu l$, gdzie N jest siłą nacisku tego kawałka na podłoże, a l – przebytą przez niego drogą. Ponieważ N nie zależy od tego, czy krążek się obraca, a l jest najmniejsze gdy kawałek porusza się po prostej, krążek któremu nadano tylko ruch postępowy, przebył większą drogę.

Zadanie 9.
Rozważmy zagadnienie w układzie obracającym się razem z naczyniem. Powierzchnia wody będzie w każdym punkcie prostopadła do wektora $\vec{g}_{eff} = g\vec{e}_z + \omega^2\vec{r}$, gdzie $\vec{e}_z$ jest skierowane w górę, a $\vec{r}$ jest prostopadłym do $\vec{e}_z$ wektorem od osi obrotu do danego punktu.
Oznaczmy przez p_n prostą przechodzącą przez środek masy drugiego klocka i przecinającą pod kątem prostym powierzchnię wody, a przez $g_{\perp eff}$ składową $\vec{g}_{eff}$ równoległą do p_n. Ze wzoru na $\vec{g}_{eff}$ wynika, że gdy przesuwamy się wzdłuż p_n, $g_{\perp eff}$ jest większe pod powierzchnią wody, niż nad nią. W konsekwencji średnia z $g_{\perp eff}$ w zanurzonej części klocka jest większa jest większa niż średnia z $g_{\perp eff}$ w całym klocku. Zatem, aby pozorny ciężar wody wypartej przez drugi klocek był równy pozornemu ciężarowi tego klocka, jej objętość musi być mniejsza niż objętość wody wypartej przez klocek znajdujący się na osi obrotu.
Czyli klocek znajdujący się z dala od osi obrotu wyprze mniej wody, niż klocek na tej osi.

Zadanie 10.
Ponieważ powłoka jest metalowa, ładunki w jej wnętrzu rozmieszczą sie tak, by pole elektryczne tuż nad jej powierzchnią było do niej prostopadłe. Z drugiej strony, całkowity strumień tego pola przez sferę otaczającą powłokę i współśrodkową z nią musi wynosić q/ε_0. Te warunki spełnia pole, na zewnatrz powłoki równe polu wytworzonemu przez ładunek q znajdujący się w jej środku. Zatem $E = q/\left(4\pi\varepsilon_0 R^2\right)$.

Zadanie 11.
Z wymiarowych rozważań wynika, że szukany moment bezwładności wynosi $I = kma^2$, gdzie k jest nieznaną stałą liczbową.
Dywan składa się z ośmiu mniejszych dywanów o masie $m/8$ i boku $a/3$. Z twierdzenia Steinera otrzymujemy

$$I = kma^2 = 8k\frac{m}{8}\left(\frac{a}{3}\right)^2 + 4\frac{m}{8}\left(\frac{a}{3}\right)^2 + 4\frac{m}{8}\left(\sqrt{2}\frac{a}{3}\right)^2,$$

gdzie uwzględniliśmy, że środki masy czterech spośród mniejszych dywanów znajdują się w odległości $a/3$ od osi obrotu i czterech – w odległości $\sqrt{2}a/3$ od tej osi.
Z powyższej równości otrzymujemy

$$\frac{8}{9}k = \frac{3}{2}\frac{1}{9},$$

a zatem
$$k = \frac{3}{16}, \quad I = \frac{3}{16} m a^2.$$

Zadanie 12.
W pierwszym przypadku nóż wycina z blachy krążek o promieniu r, jednak blacha ulega skróceniu zgodnie ze skróceniem Lorentza. Po zatrzymaniu wyciętego krążka będzie on miał kształt elipsy, której półosie są równe r i $r/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$. Sytuacja będzie identycznie wyglądała w drugim przypadku w układzie wycinarki, zatem z obu linii produkcyjnych będą schodzić monety o takim samym kształcie.

Zadanie 13.
Woda, a więc również ciało żaby, jest diamagnetykiem. Pod wpływem pola magnetycznego w diamagnetku indukuje się moment magnetyczny skierowany przeciwnie do kierunku pola. Taki moment magnetyczny możemy traktować jako dwa, bliskie sobie przeciwne bieguny magnetyczne (czyli jak magnes). Aby na układ tych dwóch biegunów działała wypadkowa siła, nateżenie pola magnetycznego w pobliżu jednego powinno być inne niż w pobliżu drugiego, czyli to pole musi być niejednorodne. Zatem punkty b) i d) są prawdziwe, pozostałe – nie.

Zadanie 14.
Moc siły hamującej jest równa ciepłu wydzielanemu przez indukowane prądy wirowe i jest proporcjonalna do kwadratu ich natężenia. Te prądy są proporcjonalne do szybkości zmian strumienia pola magnetycznego, a ta jest proporcjonalna do prędkości v pociągu. Zatem moc siły hamującej jest proporcjonalna do v^2, czyli sama siła hamująca jest proporcjonalna do v. To oznacza, że gdy prędkość zmaleje dwukrotnie, również dwukrotnie zmaleje siła hamująca.

Zadanie 15.
W skrajnym przypadku, gdy opóźnienie wynosi a, nacisk tylnej opony na jezdnię jest równy zeru, a zatem użycie tylnego hamulca nie powoduje pojawienia się dodatkowej siły poziomej. Jednak hamowanie tylnego koła powoduje zmniejszenie jego prędkości obrotowej, co oznacza, że to koło działa na pozostała część motocykla pewnym momentem siły, starającym się obrócić motocykl wokół przedniego koła. Oznacza to, że jeśli motocyklista używa tylnego hamulca, to maksymalne opóźnienie zmaleje.