LIX OLIMPIADA FIZYCZNA

ZADANIA ZAWODÓW III STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Zadanie 1.

Statek kosmiczny o masie m krąży wokół Słońca po orbicie kołowej o promieniu R, przy czym $R \gg r_s$, gdzie r_s jest promieniem Słońca. Statek wyposażony jest w składany żagiel kosmiczny, który po rozłożeniu ma powierzchnię S. Początkowo żagiel jest złożony. O jaką maksymalną wartość ΔR można zwiększyć odległość statku od Słońca nim dwukrotnie obiegnie on Słońce? Do napędu można wykorzystać jedynie rozważany żagiel.

Rozwinięty żagiel jest płaski i idealnie odbija promieniowanie elektromagnetyczne oraz jest stale ustawiony prostopadle do kierunku statek-Słońce. Powierzchnia statku wraz ze złożonym żaglem jest pomijalnie mała w porównaniu z powierzchnią rozłożonego żagla.

Podaj wartość liczbową ΔR dla

$R = 200 \cdot 10^9\,\mathrm{m}$, $m = 5000\,\mathrm{kg}$, $S = 10^4\,\mathrm{m}^2$.

Czas rozkładania (i ewentualnego składania) żagla jest pomijalnie mały w porównaniu z czasem obiegu statku wokół Słońca. Temperatura powierzchni Słońca wynosi $T_s = 5800\,\mathrm{K}$, masa Słońca

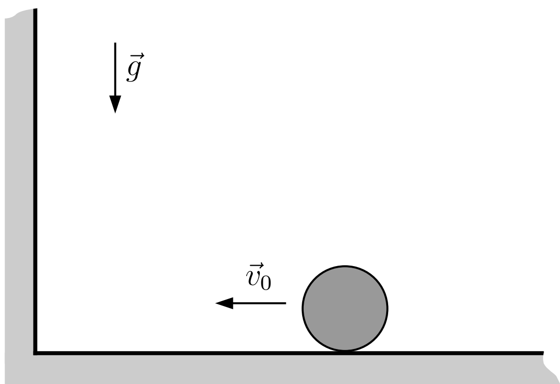
$M = 2,0 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$, a promień $r_s = 7,0 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$.

Stała Stefana-Boltzmanna jest równa $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W}/\left(\mathrm{m}^2\mathrm{K}^4\right)$, stała grawitacyjna $G = 6,7 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2$, prędkość światła $c = 3,0 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$.

Zadanie 2.

Dwie nieskończone, równoległe i uziemione płaszczyzny przewodzące są odległe o d. Pomiędzy nimi, w odległości x od jednej z nich znajduje się punktowy ładunek q. Wyznacz ładunki q_1 i q_2 wyindukowane na każdej z płaszczyzn.

Zadanie 3.



Jednorodna kula o masie m i promieniu r toczyła się bez poślizgu z prędkością v_0 po poziomej podłodze (patrz rysunek). Kula uderzyła prostopadle w

pionową ścianę. Wyznacz prędkość v_k oddalania się kuli od ściany po bardzo długim czasie.
Współczynnik tarcia kuli o podłogę jest równy μ, natomiast współczynnik tarcia kuli o ścianę jest bardzo duży. Podłoga, ściana i kula są idealnie sprężyste oraz nie ulegają odkształceniom stycznym do powierzchni. Przyjmij, że nie występuje tarcie toczne. Przyspieszenie ziemskie wynosi g. Moment bezwładności jednorodnej kuli względem jej środka $I = 2mr^2/5$. Przyjmij, że zderzenia trwają nieskończenie krótko. Pomiń opór powietrza.
Podaj wartość liczbową v_k dla
$m = 0,15\,\mathrm{kg}$, $r = 2\,\mathrm{cm}$, $\mu = 0,3$, $v_0 = 3\,\mathrm{m/s}$. Przyjmij $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

LIX OLIMPIADA FIZYCZNA

Rozwiązania zadań

ZADANIA ZAWODÓW III STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Zadanie 1.

Zgodnie z prawem Stefana-Boltzmanna moc promieniowana przez Słońce wynosi $P = 4\pi r_s^2 \sigma T_s^4$. Z symetrii i zachowania wypromieniowanej energii wynika, że na rozwinięty żagiel znajdujący sie w odległości r od Słońca pada światło o mocy

$$P_z = \frac{r_s^2 \sigma T_s^4}{r^2} S. \tag{1}$$

Ponieważ foton o energii E ma pęd E/c, z powyższego wynika, że na żagiel w jednostce czasu padają fotony o pędzie całkowitym

$$p_{pad} = \frac{P_z}{c}.$$

Żagiel idealnie idelnie odbija światło, zatem zmiana pędu fotonów w jednostce czasu, czyli siła, z jaką naciskają one na żagiel, wynosi

$$F = \frac{2 r_s^2 \sigma T_s^4}{r^2 c} S. \tag{2}$$

Uwzględniając przyciąganie grawitacyjne, po rozwinięciu żagla na statek znajdujący się w odległości r od Słońca działa siła

$$F_{sum} = \frac{GMm}{r^2} - 2\frac{\sigma T_s^4 r_s^2 S}{r^2 c} \tag{3}$$

przyciagajaca go w stronę Słońca. Zatem statek porusza się tak, jakby znajdował sie w polu grawitacyjnym o zmniejszonym natężeniu. Wprowadzając oznaczenia:

$$\begin{aligned} k &= GMm, \\ k_s &= 2\sigma T_s^4 r_s^2 S/c, \\ k_{ef} &= k - k_s, \end{aligned}$$

powyższe równanie możemy przepisać w postaci

$$F_{sum} = \frac{k - k_s}{r^2} = \frac{k_{ef}}{r^2}. \tag{4}$$

Zauważmy, że w naszym przypadku $k_s/k \approx 3,1 \cdot 10^{-3}$.

Ponieważ żagiel jest ustawiony prostopadle do kierunku statek-Słońce, obowiązuje zasada zachowania momentu pędu

$$mv_\perp r = J = \sqrt{mRk}, \tag{5}$$

gdzie $v_\perp$ jest prostopadłą do kierunku statek-Słońce składową aktualnej prędkości v statku, a r – jego aktualną odległością od Słońca.
Obowiązuje również zasada zachowania efektywnej energii

$$E_{ef} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k_{ef}}{r} = \text{const}\,. \tag{6}$$

Po rozwinięciu żagla statek zacznie się poruszać po elipsie. W aphelium i peryhelium jego prędkość nie będzie miała składowej radialnej, zatem w tym punkcie mamy

$$\frac{1}{2}mv_\perp^2 - \frac{k_{ef}}{r} = E_{ef}.$$

Korzystając z (5) możemy wyznaczyć $v_\perp$ i podstawić do powyższego wzoru otrzymując

$$\frac{J^2}{2mr_{\max}^2} - \frac{k_{ef}}{r_{\max}} = \frac{J^2}{2mr_{\min}^2} - \frac{k_{ef}}{r_{\min}},$$

gdzie w naszym przypadku $r_{\min} = R$. Jest to równanie kwadratowe na $\frac{1}{r_{\max}}$, którego jednym rozwiązaniem jest $1/r_{\max} = 1/r_{\min}$, a drugim

$$\frac{1}{r_{\max}} = \frac{2mk_{ef}}{J^2} - \frac{1}{r_{\min}} = \frac{1}{R}\left(1 - 2\frac{k_s}{k}\right). \tag{7}$$

Jeśli żagiel pozostawimy rozwinięty to poruszajac się po elipsie, po pewnym czasie zbliży się on do Słonca ponownie na odległość R. Jeśli jednak w aphelium zwiniemy żagiel to zbliży sie on do Słońca na odległość $r_{\min 2}$,mniejszą niż R, którą można wyznaczyć z analogicznych jak powyżej rozważań zamieniając we wzorze powyższych wzorach $r_{\max}$ na $r_{\min 2}$, $r_{\min}$ na $r_{\max}$ i k_{ef} na k :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_{\min 2}} &= \frac{2mk}{J^2} - \frac{1}{r_{\max}} = \\ &= \frac{2mk}{J^2} - \frac{2mk_{ef}}{J^2} + \frac{1}{r_{\min}}. \end{aligned} \tag{8}$$

Rozwijając ponownie żagiel w peryhelium możemy spowodować, że statek oddali się od Słońca na odległość $r_{\max 2}$ większą niż $r_{\max}$. Tę odległość możemy wyznaczyć zamieniając we wzorze (7) $r_{\min}$ na $r_{\min 2}$ i $r_{\max}$ na $r_{\max 2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_{\max 2}} &= \frac{2mk_{ef}}{J^2} - \frac{1}{r_{\min 2}} = \\
&= 2\frac{2mk_{ef}}{J^2} - \frac{2mk}{J^2} - \frac{1}{r_{\min}} = \\
&= \frac{2mk}{J^2}\left(2\frac{k}{k} - 1\right) - \frac{1}{r_{\min}} = \\
&= \frac{1}{r_{\max 1}} - \frac{2mk}{J^2}\frac{k_s}{k}.
\end{aligned} \tag{9}$$

W ostatnim z powyższych wzorów $1/r_{\max 1} = 1/r_{\max}$; napisaliśmy go w takiej postaci, ponieważ można ją łatwo uogólnić na przypadek n–tej "maksymalnejódległości

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_{\max n}} &= \frac{1}{r_{\max 1}} - (n-1)\,\frac{2mk}{J^2}\frac{k_s}{k} \\
&= \frac{2mk_{ef}}{J^2} - \frac{1}{r_{\min}} - (n-1)\,\frac{2mk}{J^2}\frac{k_s}{k}.
\end{aligned}$$

Powyższe uogólnienie nie jest nam niezbędne, gdyż mamy do dyspozycji tylko dwa obiegi, czyli czterokrotne przebycie toru od aphelium do peryhelium lub odwrotnie. Zatem odległości $r_{\max 2}$ jest szukaną maksymalną odległością. Podstawiając $r_{\min} = R$, $J = m2\pi R^2/T = \sqrt{mRk}$, otrzymamy

$$\frac{1}{r_{\max 2}} = \frac{1}{R}\left(1 - 4\frac{k_s}{k}\right). \tag{10}$$

Zatem

$$r_{\max 2} = \frac{R}{1 - 4\frac{k_s}{k}} \tag{11}$$

$$r_{\max 2} - R = \frac{4\frac{k_s}{k}}{1 - 4\frac{k_s}{k}}R \approx 4\frac{k_s}{k}R = \frac{8\sigma T_s^4 r_s^2 S}{GMmc}R \tag{12}$$

$$\approx 2,5 \cdot 10^6 \ \mathbf{km}. \tag{13}$$

Punktacja	
Siła, z jaką promieniowanie działa na żagiel (wzór (2) lub równoważny)	2 pkt.
Całkowita siła działająca na statek po rozwinięciu żagla (wzór (3) lub równoważny)	1 pkt.
Zauważenie, że w trakcie ruchy statku obowiazuje zasada zachowania momentu pędu (wzór (5) lub równoważny)	1 pkt.
Zauważenie, że w trakcie ruchy statku z rozwiniętym żaglem obowiazuje zasada zachowania efektywnej energii (wzór (6) lub równoważny)	1 pkt.
Wyznaczenie maksymalnej odległości, na jaką od Słońca oddali się statek po jednokrotnym rozłożeniu żagla (wzór (7) lub równoważny)	2 pkt.
Zauważenie, że aby oddalić statek maksymalnie od Słońca, należy rozkładać żagiel w peryhelium i składać w aphelium	1 pkt.
Wynik końcowy (wzór (12) lub równoważny)	2 pkt.
Wynik liczbowy (wzór (13) lub równoważny)	1 pkt.

Zadanie 2.

Zauważmy, że pojedynczy ładunek wytwarza pole o symetrii kulistej, więc rozkład indukowanych ładunków na płytach na pewno nie będzie jednorodny, a jego kształt wydaje się trudny do bezpośredniego wyznaczenia. Nas jednak nie interesuje ten rozkład, ale jedynie jedynie wartości całkowitych ładunków indukowanych na płytach.

Dla ułatwienia rozważań oznaczmy przez p płaszczyznę równoległą do rozważanych płyt, na której leży rozważany ładunek q.

Zauważmy, że z linowości równań elektrostatyki wynika, że jeśli ładunek q zastąpimy przez ładunek Q (położony w tym samym miejscu co q), to na płytach wyindukują się ładunki odpowiednio $Q_1 = (Q/q)\,q_1$ oraz $Q_2 = (Q/q)\,q_2$. Jeśli ten ładunek przesuniemy, pozostawiając go na płaszczyźnie p, to z symetrii wynika, że na płytach wyindukują się nadal ładunki $Q_1 = (Q/q)\,q_1$ oraz $Q_2 = (Q/q)\,q_2$. Zauważmy również, że w obu przypadkach (wyjściowego ładunku oraz ładunku Q znajdującego sie w dowolnym miejscu na płaszczyźnie p) spełnione są te same warunki brzegowe – potencjał znika na powierzchni płyt. Jeśli zatem na płaszczyźnie p umieścimy zarówno ładunek q jak i Q, to z zasady superpozycji wynika, że ładunki wyindukowane na płytach będą równe odpowiednio $(Q+q)\cdot q_1/q$ oraz $(Q+q)\cdot q_2/q$. Dodając kolejne ładunki leżące w łaszczyźnie p i powtarzając nasze rozumowanie, dochodzimy do wniosku, że stosunki ładunków wyindukowanych na płytach do całkowitego ładunku leżącego na płaszczyźnie p będą stałe. Zatem aby rozwiązać nasze zadanie, wystarczy znaleźć te stosunki dla dowolnego rozkładu ładunków na płaszczyźnie p.

Rozważmy sytuację, w której na płaszczyźnie p jest równomiernie rozłożony ładunek o gęstości powierzchniowej σ. Wtedy pole pomiędzy płytami jest ze względu na symetrię jednorodne i w związku z tym łatwe do wyznaczenia. Zauważmy, że obie płyty są uziemione, więc na zewnątrz nich pole elektryczne jest równe zero. Ponadto pole wewnątrz obszaru pomiędzy płytami jest do nich prostopadłe. Biorąc więc jako powierzchnię Gaussa dowolnie szeroki walec, którego podstawy są równoległe do płyt i umieszczone są w obszarze „na zewnątrz" widzimy, że całkowity strumień jest zero, więc:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma = 0, \tag{14}$$

gdzie σ_1 oraz σ_2 są gęstościami powierzchniowymi ładunków wyindukowanymi na płytach.
Załóżmy, że E_1 to pole pomiędzy płytą naładowaną ładunkiem o gęstości powierzchniowej σ_1, a płytą środkową, natomiast E_2 to pole pomiędzy płytą środkową, a tą naładowaną ładunkiem o gestości powierzchniowej σ_2 (za dodatnie przyjmujemy zwroty w kierunku płyty środkowej). Z prawa Gaussa i z faktu, że pole elektryczne znika wszędzie za wyjątkiem obszaru pomiedzy uziemionymi płaszczyznami

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0},\ E_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0}, \tag{15}$$

gdzie ϵ_0 jest przenikalnością elektryczną próżni.
Potencjał środkowej płyty jest równy $-E_1 x$ (idąc od lewej płyty) oraz $-E_2(d-x)$ (idąc od prawej płyty).
Zatem

$$-E_1 x = -E_2(d-x) \tag{16}$$

Z (14), (15), (16) dostajemy:

$$\sigma_1 = -\sigma\frac{d-x}{d}, \tag{17a}$$

$$\sigma_2 = -\sigma\frac{x}{d}. \tag{17b}$$

Wracając do naszego wyjściowego zadania otrzymamy

$$q_1 = -q\frac{d-x}{d}, \tag{18a}$$

$$q_2 = -q\frac{x}{d}. \tag{18b}$$

Punktacja	
Zauważenie i uzasadnienie (np. wykorzystując zasadę superpozycji), że do rozwiązania zadania można rozważyć jednorodnie naładowaną płaszczyznę znajdującą się w odległości x oraz $d-x$ od płaszczyzn uziemionych	4 pkt.
Ustalenie na podstawie prawa Gaussa, że całkowity ładunek jest równy 0 (wzór (14) lub równoważny)	1 pkt.
Związek między polem elektrycznym między płytami, a gęstością ładunku na nim (wzory (16) lub równoważne)	1 pkt.
Potencjał na środkowej płaszczyźnie (wzór (16)) lub równoważny warunek	1 pkt.
Gęstości ładunku wyindukowane na uziemionych płaszczyznach w przypadku rozważania jednorodnej gęstości ładunku (wzory (17))	2 pkt.
Wynik końcowy (wzory (18)	1 pkt.

Zadanie 3.
W rozwiązaniu stosuję układ współrzędnych o osi x prostopadłej do ściany i zwrocie skierowanym w lewo (patrz rysunek), natomiast oś y jest prostopadła do podłogi i ma zwrot do góry. Dodatnie prędkości kątowe odpowiadają obrotowi w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zagara.

a) Gdy kula toczy się bez poslizgu, to jej prędkość liniowa v_x i kątowa ω spełniają związek $\omega r = v_x$. Ponieważ nie występują siły oporu, a podłoga jest pozioma, kula uderzy w ścianę obracając się z prędkością kątową $\omega_0 = v_0/r$ i zbliżając do niej z prędkością v_0.

b) Zderzenie kulki ze ścianą trwa bardzo krótko, zatem siła nacisku kulki na ścianę oraz siła reakcji ściany są bardzo duże. Oznacza to, że w trakcie tego zderzenia możemy pominąć grawitację, siłę reakcji podłogi i siłę tarcia kulki o podłogę. W tej sytuacji momenty sił względem osi styczności kulki ze ścianą są równe zeru. Zatem całkowity moment pędu kulki względem tej osi jest w trakcie zderzenia zachowany

$$I\omega + mv_y r = \text{const}, \tag{19}$$

Ponieważ współczynnik tarcia kulki o ścianę jest bardzo duży, w trakcie zderzenia kulka przestanie się ślizgać względem ściany. Oznacza to, że tuż po zderzeniu pionowa składowa prędkości kulki v_{2y} oraz jej prędkość kątowa ω_2 spełniają związek $v_{2y} = \omega_2 R$. Uwzględniając, że tuż przed zderzeniem $\omega = v_0/r$, $v_y = 0$, ze stałości momentu pędu (19) otrzymamy

$$\omega_2 = \frac{I}{I + mr^2}\frac{v_0}{r} = \frac{2}{7}\frac{v_0}{r}, \tag{20}$$

$$v_{2y} = \omega_2 r = \frac{I}{I + mr^2} v_0 = \frac{2}{7} v_0. \tag{21}$$

Jednocześnie ponieważ ściana i kulka są idealnie sprężyste, całkowita praca wykonana przez prostopadłą do ściany siłę reakcji jest równa zero. Oznacza to, że nie ulegnie zmianie część enegii kinetycznej kulki związana z ruchem poziomym. Zatem pozioma składowa prędkości kulki po zderzeniu ze ścianą wynosi

$$v_{2x} = -v_0. \tag{22}$$

c) Po zderzeniu ze ścianą ruch kulki jest tu rzutem ukośnym z prędkością początkową $(v_{2x},\ v_{2y})$. Ponieważ podłoga i kulka są idealnie sprężyste, kulka będzie się od podłogi odbijać w nieskończoność, podskakując każdorazowo na tę samą wysokość (nie ma to jednak znaczenia dla ustalenia szukanej końcowej prędkości poziomej). W trakcie odbicia od podłogi będzie występowało tarcie posuwiste aż do momentu, gdy prędkość kątowa i pozioma prędkość kulki będą spełniały związek $v_{x\ \mathrm{konc}} = \omega_{\mathrm{konc}} r$. Z drugiej strony, każdorazowo podczas odbicia od podłogi jest zachowany moment pędu względem osi przechodzącej przez punkt styczności kulki z podłogą

$$I\omega + mv_x r = \mathrm{const}, \tag{23}$$

stąd

$$v_{x\ \mathrm{konc}} = \frac{I\omega_2 + mrv_{2x}}{I + mr^2} r \tag{24}$$

$$= \frac{\left(\frac{I}{mr^2}\right)^2 \frac{1}{1+I/(mr^2)} - 1}{1 + \frac{I}{mr^2}} v_0 \tag{25}$$

$$= -\frac{31}{49} v_0 \approx -1,9\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{26}$$

Punktacja	
Zauważenie, że w trakcie zderzenia ze ściana spełniona jest zasada zachowania momentu pędu (wzór (19) lub równoważny)	2 pkt.
Pozioma składowa prędkości kuli po odbiciu od ściany (wraz z uzasadnieniem; wzór (22))	2 pkt.
Prędkość kątowa kuli tuż po zderzeniu ze ścianą (wzór (20) lub równoważny)	1 pkt.
Zauważenie, że kula będzie odbijać się od podłogi i że w trakcie odbicia jest zachowany moment pędu (wzór (23) lub równoważny)	2 pkt.
Końcowa prędkość oddalania się kulki od ściany (wzór (25) lub równoważny)	2 pkt.
Liczbowa wartość końcowej prędkości oddalania się kulki od ściany (wartość bezwzględna z (26))	1 pkt.