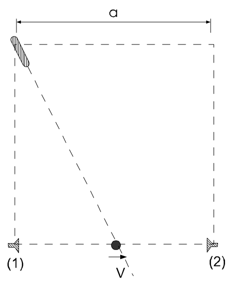
LX OLIMPIADA FIZYCZNA

ZAWODY II STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

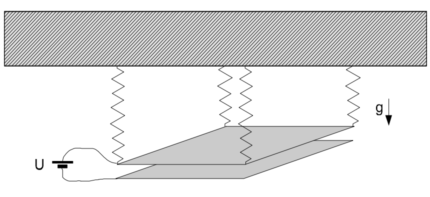
Zadanie 1.



W dwóch sąsiednich wierzchołkach kwadratu o boku a umieszczono dwa głośniki, a w jednym z pozostałych wierzchołków – mikrofon (patrz rys.). Oba głośniki wysyłają dźwięk o stałej częstotliwości f_0. Od głośnika (1) do głośnika (2) porusza się ze stałą prędkością krążek odbijający fale dźwiękowe. Głośniki i mikrofon są kierunkowe i tak ustawione, że dźwięk z głośników nie dociera bezpośrednio do mikrofonu, a jedynie po odbiciu od krążka, gdy znajduje się on w przybliżeniu w połowie odległości między głośnikami. Stwierdzono, że natężenie dźwięku docierającego do mikrofonu oscylowało z częstotliwością ν, przy czym $\nu \ll f_0$.
Jaka jest prędkość V krążka?

Prędkość dźwięku wynosi V_d. Przyjmij również, że $V/\nu \ll a$ oraz, że rozmiar krążka jest znacznie mniejszy od a. Dźwięk odbija się tylko od krążka. Amplituda fali dźwiękowej docierającej do mikrofonu od głośnika (1) jest w przybliżeniu równa amplitudzie fali dźwiękowej docierającej do mikrofonu od głośnika (2).
Wartości liczbowe podaj dla $f_0 = 1000$ Hz, $\nu = 10$ Hz, $a = 20$ m, $V_d = 340$ m/s.

Zadanie 2.

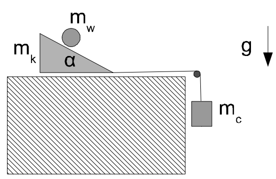


Kwadratowa, metalowa płytka o boku a i masie m wisi na czterech pionowych sprężynach tuż nad identyczną, umocowaną płytką. Płytki są podłączone do stałego napięcia U (patrz rys.). Wyznacz częstotliwość małych, pionowych drgań płytki, jeśli w stanie równowagi odległość między płytkami wynosi d_0, przy czym $d_0 \ll a$. Stała sprężystości każdej ze sprężyn jest równa k. Pomiń samoindukcję obwodu i opór powietrza.

Wynik liczbowy podaj dla $U = 1000$ V, $a = 0,1$ m, $d = 0,001$ m, $m = 0,1$ kg, $k = 25$ N/m. Przyspieszenie ziemskie $g = 9,8$ m/s, przenikalność elektryczna próżni $\epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12}$ F/m.

Uwaga: dla $|x| \ll 1$, w przybliżeniu liniowym mamy $(1+x)^n \approx 1 + nx$, $\ln(1+x) \approx x$, gdzie n jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Zadanie 3.



Rozważmy układ przedstawiony na rysunku. Walec o masie m_w, promieniu R i momencie bezwładności względem osi symetrii obrotowej $I_w = m_w R^2/2$ toczy się bez poślizgu i bez tarcia tocznego po pochyłej (o kącie nachylenia α) części klocka, a klocek o masie m_k przesuwa się bez tarcia po nieruchomym stole. Masa ciężarka wynosi m_c.

a) dla danych m_k, m_c, R, α wyznacz masę walca m_w, przy której walec może spoczywać względem klocka;
b) dla danych m_w, m_k, R , α wyznacz masę ciężarka m_c, przy której klocek może spoczywać względem stołu;
c) dla (dowolnych) danych m_k, R, m_w, α oraz przyspieszenia klocka a_k wyznacz masę ciężarka m_c.

Przyspieszenie ziemskie jest równe g.

I wersja rozwiązania zadania 1.

Ponieważ krążek się porusza, częstotliwość odbitej fali dźwiękowej będzie różna od f_0 (efekt Dopplera) i będzie wynosić

$$f = f_0 \left(1 - \frac{V}{V_d}\right) / \left(1 + \frac{V \cos\alpha}{V_d}\right), \tag{1}$$

gdzie przyjęliśmy, że krążek oddala się od głośnika, a kąt pod jakim fala uległa odbiciu wynosi α ($\alpha = 0$ odpowiada odbiciu z powrotem do głośnika). Obserwowany efekt zmian natężenia odbieranego dźwięku – dudnienie – bierze się nakładania się odbitych fal pochodzących z obu głośników. Ponieważ częstotliwość dudnienia jest równa różnicy częstotliwości fal składowych, dostajemy, że

$$\nu = \left| f_0 \left(1 - \frac{V}{V_d}\right) / \left(1 + \frac{V\cos\alpha_1}{V_d}\right) - f_0 \left(1 + \frac{V}{V_d}\right) / \left(1 + \frac{V\cos\alpha_1}{V_d}\right)\right| \tag{2}$$

$$= \left| f_0 \frac{2V}{V_d}\right| / \left(1 + \frac{V\cos\alpha_1}{V_d}\right), \tag{3}$$

gdzie kąt α_1 to kąt głośnik (1) – krążek (znajdujący się w połowie odległości między głosnikami) – mikrofon. We wzorze (2) wykorzystaliśmy fakt, że kąt głośnik (2) – krążek – mikrofon jest równy $\pi - \alpha_1$, oraz, że dla dźwięku pochodzącego od głośnika (2) należy we wzorze (1) zamienić V na $-V$.

Ze wzoru (3) możemy wyznaczyć V

$$V = V_d \frac{\nu}{2f_0} \frac{1}{1 - \frac{\nu}{2f_0}\cos\alpha_1}. \tag{4}$$

Z warunków zadania wynika, że $\cos\alpha_1 \approx 1/\sqrt{5}$, zatem

$$V = V_d \frac{\nu}{2f_0} \frac{1}{1 - \frac{\nu}{2\sqrt{5} f_0}} \tag{5}$$

Ponieważ $\nu \ll f_0$, w przybliżeniu otrzymujemy

$$V \approx V_d \frac{\nu}{2f_0} \tag{6}$$

$$\approx 1,7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{7}$$

Zauważmy, że ze wzoru (3) bez jawnego wyznaczania V wynika, że $V/V_d \ll 1$, a zatem przybliżenie (6) można otrzymać wprost z (3) przybliżając $1 + \frac{V\cos\alpha_1}{V_d} \approx 1$.

Punktacja I wersji rozwiązania zadania 1.

Zauważenie, że obserwowany efekt zmian natężenia dźwięku to zjawisko dudnienia i podanie, że częstotliwość dudnień jest równa różnicy częstotliwości dochodzących fal – 3 pkt.

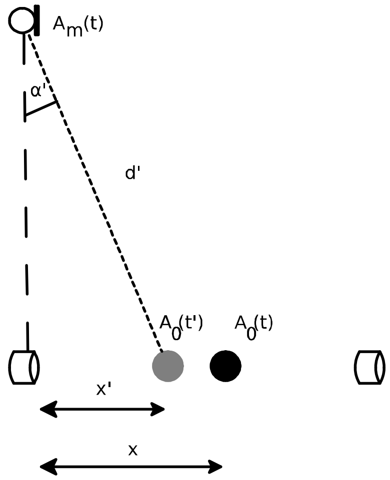
Częstotliwości fali "odbieranej" przez mikrofon (wzór (1) lub równoważny) – 2 pkt.

Częstotliwości dudnień (wzór (3) lub równoważny) – 2 pkt.

Wynik końcowy (6) lub (5) – 2 pkt.

Wynik liczbowy (7) – 1 pkt.

II wersja rozwiązania zadania 1.



Fale dźwiękowe rozchodzą się jako małe zaburzenia gęstości powietrza. Oznaczamy przez $n(t)$ gęstość powietrza w danym punkcie, a przez n_0 gęstość równowagową przy braku fal dźwiękowych. Amplitudę fal oznaczamy jako $A(t) = n(t) - n_0$. Rozważmy sytuację, w której głośniki w wierzchołkach kwadratu są wyłączone, a w krążku umieszczony jest głośnik wysyłający falę w kierunku mikrofonu (patrz rys.). Ponieważ według treści zadania prędkość dźwięku jest równa V_d, to amplituda fal zarejestrowana przez mikrofon A_m w chwili t ma się do amplitudy fali wyemitowanej przez krążek A_0 następująco

$$A_m(t) = \gamma' A_0(t') = \gamma' A_0(t - \frac{d'}{V_d}), \tag{8}$$

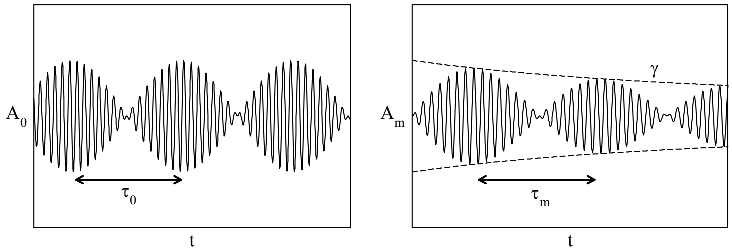
gdzie $d' = x'/\cos\alpha'$ jest odległością krążka od mikrofonu w chwili t', kiedy została wyemitowana fala dźwiękowa dochodząca do mikrofonu w chwili t, tj. spełniająca zależność $d' = V_d(t - t')$, natomiast γ' jest współczynnikiem odpowiadającym m. in. za osłabienie dźwięku ze wzrostem odległości d'. Zauważmy, że powyższa zależność jest ogólna, bowiem nie skorzystaliśmy jeszcze z żadnych założeń z treści zadania.

Przejdźmy teraz do problemu fal odbijających się od krążka. Amplituda fali odbitej zmienia się w czasie, w zależności od tego, czy fale (zaburzenia gęstości) pochodzące od dwóch głośników interferują ze sobą konstruktywnie czy destruktywnie. Ponieważ krążek znajduje się w polu fali stojącej wytworzonej przez oba głośniki, a odległość między dwoma węzłami wynosi $V_d/2f_0$, amplituda fal odbitych od krążka zmienia się z częstotliwością

$$\nu_0 = V\frac{2f_0}{V_d} \tag{9}$$

Ponieważ częstotliwość ta jest tego samego rzędu co częstotliwość ν zarejestrowana przez mikrofon, a $\nu \ll f_0$, wnioskujemy że $V \ll V_d$. Obliczmy teraz częstotliwość ν. Użyjemy w tym celu zależności (8). Rysunek poniżej pokazuje przykładowy przebieg zmienności amplitudy fali odbitej od krążka A_0 i zarejestrowanej przez mikrofon A_m. Częstotliwość oscylacji obliczamy jako odwrotność czasu pomiędzy kolejnymi maksimami powolnych zmian amplitudy (dudnień)

$$\begin{aligned} \nu_0 &= \frac{1}{\tau_0} \\ \nu_m &= \frac{1}{\tau_m} \end{aligned} \tag{10}$$



Ponieważ γ jest bardzo wolno zmienną funkcją czasu (charakterystyczny czas zmian jest rzędu a/V, dużo większym od $1/\nu$), nie ma ona wpływu na częstotliwość zarejestrowanych oscylacji. Obliczmy teraz ν_m biorąc pod uwagę dwa kolejne maksima wyemitowane przez krążek w strzałkach fali stojącej w położeniach x_1' i x_2'

$$\nu = \frac{1}{\tau_m} = \frac{1}{\tau_0 + \frac{d_2'-d_1'}{V_d}} \approx \nu_0 \left(\frac{1}{1 + \frac{x_2'-x_1'}{V_d \tau_0 \cos\alpha'}} \right). \tag{11}$$

Ponieważ $x_2' - x_1' = V\tau_0 \ll V_d\tau_0$, to w ramach przyjętych założeń $\nu = \nu_0$, a więc z równania (9)

$$V = \frac{V_d \nu}{2 f_0}. \tag{12}$$

Punktacja II wersji rozwiązania zadania 1.

Przyjęcie, że krążek porusza się w polu fali stojącej powstałej przez interferencję fal pochodzących z głośników – 2 pkt.

Częstotliwości zmian amplitudy fal odbitych od krążka (wzór (9) lub równoważny) – 3 pkt.

Uzasadnienie, że $V \ll V_d$ i w konsekwencji $\nu \approx \nu_0$ – 2pkt.

Wynik końcowy (6) – 2 pkt.

Wynik liczbowy (7) – 1 pkt.

Rozwiązanie zadania 2

Niech odległość między płytkami wynosi $d = d_0 + x$. Płytki tworzą kondensator płaski o pojemności $C = \epsilon_0 a^2/d$, zatem wartość ładunku na każdej z nich wynosi

$$Q = CU = \epsilon_0 a^2 U/d. \tag{13}$$

Pole elektryczne pomiędzy okładkami wynosi $E_{pom} = U/d$ i jest prostopadłe do ich powierzchni, natomiast pole na zewnatrz kondensatora jest zerowe. Źródłem różnicy jest pole elektryczne wytwarzane przez daną płytke. Pole to jest symetryczne i prostopadłe do powierzchni płytki, zatem każda z płytek znajduje się w polu elektrycznym o natężeniu $E_{zew} = U/(2d)$. Górna płytka jest więc przyciagana przez dolną siłą

$$F_E = QE_{zew} = \epsilon_0 a^2 U^2 / \left(2d^2\right) \tag{14}$$

Prócz tego na tę płytkę działają sprężynki oraz grawitacja, zatem równanie ruchu wiszącej płytki ma postać

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg + 4k\left(\Delta l - x\right) - \frac{\epsilon_0 a^2 U^2}{2d^2}, \tag{15}$$

gdzie Δl jest wydłużeniem sprężyny odpowiadającym stanowi równowagi, a $\Delta l - x$ – wydłużeniem sprężyny w danej chwili.

Dla małych x mamy $d^{-2} = d_0^{-2}\left(1 - 2x/d_0\right)$, zatem

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \left[-mg + 4k\Delta l - \frac{\epsilon_0 a^2 U^2}{2d_0^2}\right] - \left(4k - \frac{\epsilon_0 a^2 U^2}{d_0^3}\right)x. \tag{16}$$

Z warunku równowagi wynika, że niezależny od x wyraz w powyższym równaniu jest równy zeru.

Zatem otrzymujemy równanie ruchu oscylatora harmonicznego o częstotliwości

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4k}{m} - \frac{\epsilon_0 a^2 U^2}{m d_0^3}} \tag{17}$$

$$\approx 1,7\frac{1}{\mathrm{s}}. \tag{18}$$

Punktacja zadania 2.

Związek między Q i U (wzór (13) lub równoważny) – 1 pkt.

Siła elektryczna działająca na płytkę (wzór (14) lub równoważny) – 3 pkt.

Równanie ruchu wiszącej płytki (wzór (15) lub równoważny) – 2 pkt.

Przybliżone ruchu wiszącej płytki (wzór (16) lub równoważny) – 1 pkt.

Częstotliwość drgań płytki wokół położenia równowagi (wzór (17)) – 2 pkt.

Wartość liczbowa częstotliwości drgań płytki (wzór (18)) – 1 pkt.

Rozwiązanie zadania 3.

c) załóżmy że klocek (a zatem i ciężarek) poruszają się z przyspieszeniem a_k. W nieinercjalnym układzie związanym z klockiem wzdłuż pochyłości na klocek działają: siła tarcia T, składowa siły grawitacyjnej i składowa siły bezwładności, nadając nadając walcowi przyspieszenie a_w i przyspieszenie kątowe ε

$$m_w a_w = m_w g \sin\alpha - m_w a_k \cos\alpha - T, \tag{19}$$

$$I_w \varepsilon = TR, \tag{20}$$

przy czym z warunku braku poślizgu wynika

$$a_w = R\varepsilon. \tag{21}$$

Stąd

$$\begin{aligned} a_w &= \frac{m_w g \sin\alpha - m_w a_k \cos\alpha}{m_w + I_w/R^2} \\ &= \frac{2}{3}\left(m_w g \sin\alpha - m_w a_k \cos\alpha\right), \qquad (22) \\ T &= \frac{m_w g \sin\alpha - m_w a_k \cos\alpha}{m_w + I_w/R^2}\frac{I_w}{R^2} \\ &= \frac{g\sin\alpha - a_k\cos\alpha}{3} m_w \qquad (23) \end{aligned}$$

Prostopadle do klocka na walec działają odpowiednie składowe siły grawitacji i bezwładności równe w sumie sile reakcji klocka F_R

$$F_R = m_w g \cos\alpha + m_w a_k \sin\alpha. \tag{24}$$

Przyspieszenie układu klocek + ciężarek jest określone przez siłę ciężkości działająca na ciężarek, poziomą składową siły tarcia walca i poziomą składową siły nacisku walca:

$$(m_k + m_c)\, a_k = m_c g - F_R \sin\alpha + T \cos\alpha. \tag{25}$$

Stąd

$$m_c = \frac{F_R \sin\alpha - T\cos\alpha + m_k a_k}{g - a_k}. \tag{26}$$

Po wstawieniu wyznaczonych poprzednio F_R i T otrzymujemy

$$m_c = \frac{\frac{2}{3} m_w g \cos\alpha \sin\alpha - \frac{2}{3} m_w a_k \cos^2\alpha + m_w a_k + m_k a_k}{g - a_k}. \tag{27}$$

b) wstawiając w poprzednich wzorach $a_k = 0$ otrzymamy

$$m_c = \frac{-m_w g \cos\alpha \sin\alpha + \frac{m_w g \sin\alpha}{m_w + I_w/R^2} \frac{I_w}{R^2} \cos\alpha}{-g} \tag{28}$$

$$= \frac{2}{3} m_w \cos\alpha \sin\alpha. \tag{29}$$

a) wstawiając we wzorach z punku c) $a_w = 0$ otrzymamy

$$\begin{aligned} a_k &= g \operatorname{tg}\alpha, \\ T &= 0, \\ F_R &= \frac{m_w g}{\cos\alpha}, \\ (m_k + m_c)\, g \operatorname{tg}\alpha &= m_c g - m_w g \operatorname{tg}\alpha. \end{aligned}$$

Zatem

$$m_w = m_c / \operatorname{tg}\alpha - (m_k + m_c). \tag{30}$$

Oczywiście aby otrzymać wyniki w punktach a) i b) można od początku przyjąć $a_w = 0$ lub $a_k = 0$.

Punktacja zadania 3.

Masa walca odpowiadająca przypadkowi a) (wzór (30)) – 2 pkt.

Masa ciężarka odpowiadająca przypadkowi b) (wzór (29)) – 3 pkt.

Równania ruchu walca w układzie walca (wzory (19) i (20)) oraz warunek braku poślizgu (21)) lub wzory równoważne – 2 pkt.

Siła reakcji klocka (wzór (24) lub równoważny) – 1 pkt.

Równanie ruchu ukladu klocek + ciężarek (wzór (25) lub równoważny) – 1pkt.

Masa ciężarka w przypadku c) (wzór (27) lub równoważny) – 1 pkt.