LX OLIMPIADA FIZYCZNA

ZAWODY III STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

Zadanie 1.

Kulista, doskonale czarna sonda kosmiczna "Lord Darth Vader", wykorzystuje do zasilania promieniotwórczy izotop plutonu ^{238}Pu. Pluton o masie m jest umieszczony wewnątrz sondy w pojemniku, którego ścianki całkowicie pochłaniają produkty rozpadu plutonu. Temperatura pojemnika jest równa T_1, temperatura pozostałych elementów sondy nie zmienia się w czasie.

Przyjmując, że moc P wykorzystywana do działania sondy, jest wytwarzana przez idealny (odwracalny) silnik cieplny, który pobiera ciepło z pojemnika z plutonem, oblicz, ile wynosi ta moc.

Rozważ dwa przypadki:

a) cała praca wytworzona przez rozważany silnik jest wykorzystywana (po przetworzeniu na energię elektryczną) do zasilania komputerów pokładowych;

b) cała praca wytworzona przez rozważany silnik jest wysyłana na zewnątrz sondy (np. w postaci wiązki laserowej).

Czas połowicznego rozpadu ^{238}Pu wynosi $t_{1/2} =$ 87,7 lat. Przyjmij, że rozpad zachodzi zgodnie z reakcją

$$^{238}_{94}\mathrm{Pu} \rightarrow \, ^{234}_{92}\mathrm{U} + \, ^{4}_{2}\mathrm{He}$$

i pomiń inne reakcje jądrowe. Pomiń promieniowanie dochodzące do sondy z zewnątrz. Promień sondy wynosi R.

Wyniki liczbowe podaj dla $m = 2\,\mathrm{kg}$, $T_1 = 500\,\mathrm{K}$, $R = 0{,}5\,\mathrm{m}$.

Masy atomowe wynoszą $m_{^{238}_{94}\mathrm{Pu}} = 238{,}04955\,\mathrm{u}$, $m_{^{234}_{92}\mathrm{U}} = 234{,}04095\,\mathrm{u}$, $m_{^{4}_{2}\mathrm{He}} = 4{,}00260\,\mathrm{u}$, gdzie u $= 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$.

Stała Stefana-Boltzmanna $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W/(m^2K^4)}$, prędkość światła $c = 3{,}00 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$.

Zadanie 2.

Jednorodna rura o momencie bezwładności I względem jej osi, długości L i promieniach: wewnętrznym r_2 i zewnętrznym r_1 (przy czym $L \gg r_1$) znajduje się w jednorodnym, równoległym do jej osi polu magnetycznym o indukcji B_0. Rura jest wykonana z nieprzewodzącego, niemagnetycznego materiału. Jej powierzchnia zewnętrzna jest równomiernie naładowana ładunkiem o całkowitej wartości Q, a powierzchnia wewnętrzna jest równomiernie naładowana ładunkiem o całkowitej wartości $-Q$. Rura może się swobodnie obracać wokół swojej osi, ale początkowo jest nieruchoma. Znajdź końcową prędkość kątową rury, jeśli wartość indukcji zewnętrznego pola magnetycznego zmniejszono powoli od B_0 do 0.

Podaj wynik liczbowy dla $L = 0{,}5\,\mathrm{m}$, $r_1 = 0{,}010\,\mathrm{m}$, $r_2 = 0{,}009\,\mathrm{m}$, $B_0 = 1\,\mathrm{T}, Q = 6 \cdot 10^{-5}$ C, $I = 6 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$.

Przenikalność magnetyczna próżni wynosi $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$.

Zadanie 3.

Płasko - wypukła soczewka o promieniu krzywizny R i grubości (na osi optycznej) d jest wykonana z materiału o współczynniku załamania zmieniającym się z odległością r od jej osi zgodnie ze wzorem

$$n(r) = n_1 + a \cdot r^2,$$

gdzie n_1 i a są stałymi. Współczynnik załamania ośrodka na zewnątrz soczewki wynosi n_0.

a) Rozważmy promień równoległy do osi soczewki, padający na nią od strony płaskiej w odległości r_1 od tej osi. Opisz jakościowo i przedyskutuj dalszy bieg promienia.

b) Wyznacz zdolność skupiająca tej soczewki. Przyjmij, że $\frac{|\Delta r|}{d} \ll 1$, $\frac{|\Delta r|}{r_1} \ll 1$, gdzie Δr jest odległością, o jaką promień równoległy do osi optycznej soczewki, padający na płaską stronę tej soczewki w odległości r_1 od osi oddala się od tej osi w wyniku przejścia przez soczewkę. Rozważ promienie przyosiowe, tzn. przyjmij, że r_1 jest małe.

Uwaga: dla $|x| \ll 1$, w przybliżeniu liniowym mamy

$(1+x)^n \approx 1 + nx$, $\ln(1+x) \approx x$, gdzie n jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Rozwiązanie zadania 1.

Energia wytwarzana w trakcie jednego rozpadu wynosi

$$\varepsilon = \left(m_{^{238}_{94}\mathrm{Pu}} - m_{^{234}_{92}\mathrm{U}} - m_{^{4}_{2}\mathrm{He}}\right) c^2. \tag{1}$$

Zgodnie z prawem rozpadu promieniotwórczego po czasie t z N_0 jąder plutonu pozostaje $N(t) = N_0 \cdot 2^{-t/t_{1/2}}$. Oznacza to, że na jednostkę czasu rozpada się $n = -\frac{d}{dt}N(t) = N_0 \cdot \frac{\ln 2}{t_{1/2}} 2^{-t/t_{1/2}}$. Przyjmując $t = 0$ otrzymamy

$$n = N_0 \cdot \frac{\ln 2}{t_{1/2}}. \tag{2}$$

Wydzielona energia związana z tymi rozpadami wynosi

$$q_1 = n\varepsilon = \frac{m}{m_{^{238}_{94}\mathrm{Pu}}} \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \varepsilon \tag{3}$$

$$\approx 1136\,\mathrm{W}. \tag{4}$$

Chłodnicą w naszym przypadku może być tylko zewnętrzna obudowa sondy. Ilość ciepła w jednostce czasu wypromieniowana przez obudowę wynosi $4\pi R^2 \sigma T_2^4$, gdzie T_2 jest jej temperaturą.

Z drugiej strony, skoro nasz silnik jest silnikiem odwracalnym, ciepło na jednostkę czasu q_2, jakie silnik musi musi oddawać chłodnicy, wynosi

$$q_2 = \frac{T_2}{T_1} q_1. \tag{5}$$

W przypadku a) całe q_1 musi być w końcowym rozrachunku wypromieniowane na zewnątrz, zatem

$$4\pi R^2 \sigma T_2^4 = q_1, \tag{6}$$

co daje w przypadku a)

$$T_2 = \left(\frac{q_1}{4\pi R^2 \sigma}\right)^{1/4} \approx 283\,\mathrm{K}. \tag{7}$$

W przypadku b) na zewnątrz musi być wypromieniowane tylko ciepło q_2, zatem

$$4\pi R^2 \sigma T_2^4 = q_2. \tag{8}$$

co daje $4\pi R^2 \sigma T_2^4 = \frac{T_2}{T_1} q_1$. Stąd w przypadku b)

$$T_2 = \left(\frac{q_1}{4\pi R^2 \sigma T_1}\right)^{1/3} \approx 234\,\mathrm{K}. \tag{9}$$

Uwzględniając, że

$$P = q_1 - q_2, \tag{10}$$

otrzymamy szukaną moc;
w przypadku a):

$$P = q_1 \left(1 - \frac{1}{T_1}\left(\frac{q_1}{4\pi R^2 \sigma}\right)^{1/4}\right) \tag{11}$$

$$\approx 494\,\mathrm{W}, \tag{12}$$

w przypadku b):

$$P = q_1 \left(1 - \frac{1}{T_1} \left(\frac{q_1}{4\pi R^2 \sigma T_1} \right)^{1/3} \right) \tag{13}$$

$$\approx 605\,\mathrm{W}. \tag{14}$$

Rozwiązanie zadania 2.

Z prawa Ampere'a wynika, że gdy indukcja pola magnetycznego wynosi B_{zew} a rura obraca się z prędkością kątową ω, przy czym kierunek i zwrot $\vec{B}_{zew}$ oraz $\vec{\omega}$ są takie same, to indukcja pola magnetycznego w odległości r od osi jest równa

$$B = \begin{cases} B_{zew} & \text{dla } \ r \geq r_1, \\ B_{zew} + \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi L} & \text{dla } \ r_1 > r \geq r_2, \\ B_{zew} & \text{dla } \ r < r_2. \end{cases} \tag{15}$$

Jeśli pole magnetyczne ulega zmianie, to, zgodnie z prawem Faradaya, indukuje się pole elektryczne. Na zewnętrznej powierzchni rury będzie ono wynosić:

$$E_1 = -\frac{1}{2\pi r_1}\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{1}{2\pi r_1}\left[\pi\left(r_1^2 - r_2^2\right)\left(\frac{dB_{zew}}{dt} + \frac{\mu_0 Q}{2\pi L}\frac{d\omega}{dt}\right) + \pi r_2^2 \frac{dB_{zew}}{dt}\right], \tag{16}$$

natomiast na wewnętrznej będzie równe

$$E_2 = -\frac{1}{2\pi r_2}\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{1}{2\pi r_2}\left[\pi r_2^2 \frac{dB_{zew}}{dt}\right]. \tag{17}$$

Pole elektryczne stara się obrócić naszą rurę. Moment siły wynosi

$$M = QE_1 r_1 - QE_2 r_2. \tag{18}$$

Po podstawieniu wzorów na E_1 i E_2 otrzymamy równanie ruchu obrotowego rury

$$\begin{aligned} I\frac{d\omega}{dt} &= -\frac{Q}{2\pi}\left[\pi\left(r_1^2 - r_2^2\right)\left(\frac{dB_{zew}}{dt} + \frac{\mu_0 Q}{2\pi L}\frac{d\omega}{dt}\right) + \pi r_2^2 \frac{dB_{zew}}{dt}\right] + \\ &\quad + \frac{Q}{2\pi}\left[\pi r_2^2 \frac{dB_{zew}}{dt}\right] \qquad (19) \\ &= -\frac{Q}{2\pi}\left[\pi\left(r_1^2 - r_2^2\right)\left(\frac{dB_{zew}}{dt} + \frac{\mu_0 Q}{2\pi L}\frac{d\omega}{dt}\right)\right]. \qquad (20) \end{aligned}$$

Przekształcając powyższy wzór otrzymamy

$$\left[I + \frac{Q}{2\pi}\pi\left(r_1^2 - r_2^2\right)\frac{\mu_0 Q}{2\pi L}\right]\frac{d\omega}{dt} = -\frac{Q}{2\pi}\pi\left(r_1^2 - r_2^2\right)\frac{dB_{zew}}{dt}. \tag{21}$$

Stąd końcowa prędkość kątowa wynosi

$$\begin{aligned} \omega_{konc} &= \frac{\frac{Q}{2}\left(r_1^2 - r_2^2\right) B_0}{I + \left(r_1^2 - r_2^2\right)\frac{\mu_0 Q^2}{4\pi L}} \qquad (22) \\ &= 0{,}095\,\frac{1}{\text{s}}. \qquad (23) \end{aligned}$$

Znak + powyżej oznacza, że jeśli patrzymy zgodnie z $\vec{B}_o$, to rura zacznie się obracać zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

Rozwiązanie zadania 3.

a) Promień biegnąc wewnątrz soczewki ulegnie odchyleniu 'od' osi optycznej, gdy $a > 0$, a odchyli się 'do' osi optycznej gdy $a < 0$. Na granicy soczewka – ośrodek na zewnątrz soczewki zajdzie zwykłe załamanie promienia – w zależności wartości względnego współczynnika załamania kąt odchylenia 'do' lub 'od' osi optycznej może ulec zmniejszeniu lub zwiekszeniu. Może też zajść całkowite wewnętrzne odbicie, jeśli kąt padania będzie wiekszy od kata granicznego.

b) **I wersja rozwiązania.** Z geometrii wynika, że grubość soczewki x w zależności od odległości y od osi jest równa

$$x(y) = d + \sqrt{R^2 - y^2} - R \tag{24}$$

$$\approx d - \frac{y^2}{2R}. \tag{25}$$

Do wyznaczenia ogniskowejwykorzystamy zasadę Fermata. W tym celu należy wyznaczyć drogę

optyczną promienia. Zgodnie z przybliżeniami podanymi w treści zadania, droga optyczna promienia padającego prostopadle na płaską część soczewki w odległości y od jej osi jest wewnątrz soczewki równa $x(y) \cdot n(y)$. Załóżmy, że promień po przejściu przez krążek, przetnie oś optyczną w odległości f od soczewki. Droga optyczna, jaką on przebędzie od miejsca, gdzie padł na krążek, wynosi

$$l(y) = n_0\sqrt{[f + d - x(y)]^2 + y^2} + x(y) \cdot n(y). \tag{26}$$

Powyższy wzór jest prawdziwy tylko, gdy $f > 0$; gdy $f< 0$ powinniśmy uwzględnić, że ognisko

znajduje się po tej samej stronie soczewki, co padające promienie. Można to uwględnić pisząc w przypadku $f < 0$

$$l(y) = -n_0\sqrt{[f + d - x(y)]^2 + y^2} + x(y) \cdot n(y). \tag{27}$$

Obie te sytuacje są automatycznie uwzględnione, jeśli napiszemy

$$l(y) = n_0 f\sqrt{1 + \frac{y^2 + 2\,[d - x(y)]\,f + [d - x(y)]^2}{f^2}} + x(y) \cdot n(y). \tag{28}$$

Dla małych y

$$l(y) = n_0 f + n_0\frac{y^2}{2f} + n_0\frac{y^2}{2R} + dn_1 - n_1\frac{y^2}{2R} + da \cdot y^2. \tag{29}$$

Zgodnie z zasadą Fermata, jeśli f jest ogniskową, to $l(y)$ nie powinno zależeć od y, co oznacza

$$\frac{1}{f} = \frac{n_1/n_0 - 1}{R} - \frac{2da}{n_0}. \tag{30}$$

Zauważmy, że dla $a = 0$, mamy do czynienia ze zwykłą soczewką płasko-wypukłą i otrzymujemy zwykły wzór odpowiadajacy temu przypadkowi. Gdy $a \neq 0$, zmienna gęstość optyczna ośrodka działa jak druga soczewka - gdy $a > 0$ jak soczewka rozpraszająca, gdy $a < 0$ – jak soczewka skupiająca. W szczególności dla odpowiednio dużych a cały układ działa jak soczewka rozpraszająca.

b) **II wersja rozwiązania**

Rozważmy bieg promienia wewnątrz krążka. Z prawa załamania wynika, że wewnątrz soczewki spełnione jest

$$n(r)\cos\left[\alpha\left(r\right)\right]=n\left(r_1\right), \tag{31}$$

gdzie r jest aktualną odległościa promienia od osi natomiast $\alpha\left(r\right)$ – kątem, jaki tworzy on z osią. Niech x będzie odległością od brzegu krążka, a $y=r-r_1$. Ponieważ $\cos\left[\alpha\left(r\right)\right]=1/\sqrt{1+y'\left(x\right)^2}$, mamy

$$n\left(r_1+y\left(x\right)\right)=n\left(r_1\right)\sqrt{1+y'\left(x\right)^2}. \tag{32}$$

Dla małych $y(x)/r_1$, $y'(x)$, uwzględniając postać zależności $n\left(r\right)$ otrzymamy

$$n\left(r_1\right)+2ar_1y(x)=n\left(r_1\right)+\frac{1}{2}n\left(r_1\right)y'\left(x\right)^2. \tag{33}$$

Powyższe równanie ma analogiczną postać jak zasada zachowania energii mechanicznej w rzucie pionowym (gdzie x jest czasem, a y' – prędkością), zatem rozwiązanie jest następujące

$$y\left(x\right)=\frac{ar_1}{n\left(r_1\right)}x^2, \tag{34}$$

$$y'\left(x\right)=\frac{2ar_1}{n\left(r_1\right)}x\approx\frac{2ar_1}{n_1}x. \tag{35}$$

Na granicy ośrodków spełnione jest prawo załamania

$$n\left(r\right)\sin\theta=n_0\sin\beta, \tag{36}$$

gdzie θ jest kątem, pod jakim promień pada na granicę soczewka-otaczający ośrodek, β jest kątem załamania. Normalna do granicy soczewka-otaczający ośrodek tworzy z osią optyczną kąt

$$\psi=\arcsin\frac{r}{R}\approx\frac{r}{R} \tag{37}$$

$$\approx\frac{r_1}{R}, \tag{38}$$

zatem mamy

$$\theta=\psi-\alpha\left(r_1+y\left(d\right)\right)=\frac{r_1}{R}-y'\left(d\right)=\frac{r_1}{R}-\frac{2ar_1}{n_1}d, \tag{39}$$

$$\beta=\gamma+\psi=\frac{r_1}{f}+\frac{r_1}{R} \tag{40}$$

Gdzie $\gamma\approx y_1/f$ jest katem jaki tworzy z osią optyczną promień po przejściu przez soczewkę. W przybliżeniu zatem (36) przyjmie postać

$$n_1\cdot\left(\frac{r_1}{R}-\frac{2ar_1}{n_1}d\right)=n_0\cdot\left(\frac{r_1}{f}+\frac{r_1}{R}\right). \tag{41}$$

Stąd

$$\frac{1}{f}=\frac{n_1/n_0-1}{R}-\frac{2ad}{n_0}.$$