

Rozwiązanie zadania 1.

Jeśli układ jest w równowadze, to moment siły \vec{F} względem podstawy płyty jest równy analogicznemu momentowi siły N napięcia liny:

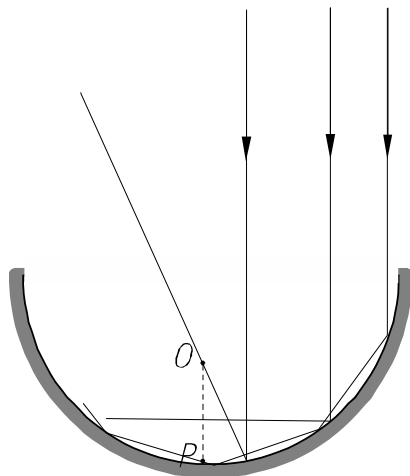
$$HF = \frac{\sqrt{L^2 - h^2}}{L} hN,$$

gdzie H jest wysokością płyty. Z powyższego wynika, że

$$N = \frac{HFL}{h\sqrt{L^2 - h^2}}.$$

Jeśli $h \rightarrow 0$ lub $h \rightarrow L$ przy ustalonym F , to $N \rightarrow \infty$, co oznacza, że dowolnie mała siła F spowoduje zerwanie liny. Jednak nie możemy po prostu przyjąć $h = 0$ lub $h = L$, bo wtedy płyta się przewraca, ale lina się nie rozciąga, a co za tym idzie nie może ulec zerwaniu. Zatem h powinno być zbliżone do 0 lub L – jak bardzo zbliżone zależy od rozciągliwości liny (która nigdy nie jest zerowa).

Rozwiązanie zadania 2.



Rys. 1: Schematyczny rysunek przedstawiający bieg wybranych promieni światła.

Zbadajmy najpierw sytuację, gdy na drodze promieni nie ma kulki. Rozważmy promień równoległy do osi optycznej lustra, odległy od niej o r . Niech O oznacza punkt przecięcia odbitego promienia z osią optyczną lustra, a P – punkt przecięcia osi optycznej z lustrem. Dla bardzo małych r długość d odcinka

OP jest równa $R/2$ – promień odbity przechodzi przez ognisko odpowiadające promieniom przyosiowym. Ze wzrostem r odległość d maleje. Dla $r = \sqrt{2}R/2$ kąt padania promienia na powierzchnię lustra wynosi 45° i po odbiciu światło porusza się prostopadle do osi optycznej, co daje $d = R(1 - \sqrt{2}/2)$. Gdy kąt padania promienia na powierzchnię lustra wynosi 60° ($r = \sqrt{3}R/2$) otrzymamy $d = 0$. Dla $r > \sqrt{3}R/2$ przed dotarciem do osi optycznej promień odbije się co najmniej jeszcze raz od lustra, przy czym jego największa odległość od powierzchni lustra wynosi $R - r$, czyli jest mniejsza niż $R(1 - \sqrt{3}/2)$. Zatem dla dowolnego r ($0 < r < R$) otrzymamy $d < R/2$. Ponieważ średnica kulki wynosi $R/2$, oznacza to, że gdy kulkę umieścimy tak, by stykała się z punktem P , wszystkie promienie równoległe do osi optycznej po odbiciu padną na kulkę (fakt, że po umieszczeniu kulki promienie o $r < R/4$ nie dotrą do powierzchni lustra nic tu nie zmienia, bo te promienie też padają na kulkę). Jeśli jednak kulka będzie się znajdowała choć trochę ponad czaszą lustra, to część promieni (o r bliskim R) nie padnie na kulkę.

Zatem kulkę należy umieścić tak, by jej środek był na osi optycznej lustra i by stykała się z jego powierzchnią.

Rozwiązanie zadania 3.

Gdy spinacz ślizga się po kartce, działa na niego siła tarcia nadająca mu przyspieszenie μg . Przyspieszenie to nie zależy od prędkości kartki. W ciągu czasu t prędkość spinacza osiągnie wartość $\mu g t$. Ponieważ kartka ma skończone rozmiary, należy ją ciągnąć jak najwolniej, aby spinacz był jak najdłużej przyspieszany, ale tak, by prędkości spinacza i kartki nie zrównały się, gdyż wtedy przestanie działać siła tarcia. Jeśli całkowity czas ciągnięcia wynosi T i $\mu g T \leq v_d$ to $L = v_d T - \mu g T^2/2$. W przypadku granicznym $v_d = \mu g T$, zatem $L = v_d^2/(2\mu g)$. Czyli kartkę powinniśmy ciągnąć z prędkością $\sqrt{2\mu g L}$.

Rozwiązanie zadania 4.

Podzielmy węża na w przybliżeniu punktowe fragmenty i rozważmy dwa takie fragmenty, o masie m każdy, położone symetrycznie względem środka masy węża. Jeśli początkowo odległość między tymi fragmentami wynosiła $2d$, to początkowe odległości tych fragmentów od środka planety wynosiły $r_1 = R - d$, $r_2 = R + d$, gdzie R jest odległością środka masy węża od planety. Zatem sumaryczna siła grawitacyjna działająca na te fragmenty wynosi

$$F_{\text{przed zwinięciem}} = \frac{GMm}{r_1^2} + \frac{GMm}{r_2^2},$$

gdzie M jest masą planety, a G – uniwersalną stałą grawitacyjną.

Tuż po zwinięciu się węża położenie i prędkość jego środka masy nie ulegnie zmianie, a ponieważ rozważane fragmenty znajdują się w pobliżu środka masy węża, sumaryczna siła grawitacyjna działająca na nie wyniesie

$$F_{\text{po zwinięciu}} = \frac{2GMm}{R^2}.$$

Ponieważ

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = \frac{1}{(R-d)^2} + \frac{1}{(R+d)^2} = \frac{(R+d)^2 + (R-d)^2}{(R-d)^2(R+d)^2} = 2 \frac{R^2 + d^2}{(R^2 - d^2)^2} > \frac{2}{R^2},$$

zatem $F_{\text{przed zwinięciem}} > F_{\text{po zwinięciu}}$. To rozumowanie można powtórzyć dla pozostałych fragmentów węża, z czego wynika, że po zwinięciu siła przyciągająca węża do planety zmalała. Ponieważ nie zmieniła się prędkość środka masy węża i odległość jego środka masy od planety, wąż zacznie się od niej oddalać.

(Oczywiście gdyby wąż miał bardzo ciężką głowę, powyższe rozumowanie należałoby odpowiednio zmodyfikować. Jednak zoologia nie zna takich przypadków.)

Rozwiązanie zadania 5:

Niech I_{1+} będzie nateżeniem wiązki biegnącej od pierwszej do drugiej płytki, I_{1-} – nateżeniem wiązki biegnącej od drugiej do pierwszej płytki, a I_{2+} – nateżeniem wiązki za drugą płytką. Zgodnie z po-

danym wzorem (zamieniając w nim I_0 przez aktualne natężenie wiązki) i uwzględniając, że pierwsza z wymienionych wiązek jest sumą wiązki przechodzącej i odbitej, mamy

$$I_{1+} = pI_0 + (1-p)I_{1-}, \quad I_{1-} = (1-p)I_{1+}, \quad I_{2+} = pI_{1+}.$$

Stąd

$$I_{2+} = \frac{p}{2-p}I_0.$$

Ten wynik można też otrzymać rozpatrując wielokrotne odbicia i sumując powstały szereg.

Rozwiązanie zadania 6.

Zauważmy, że nadanie przy skoku prędkości początkowej skierowanej pionowo w dół zmniejszy odległość, na jaką zbliżymy się do ziemi. Tak samo będzie, jeśli początkowo podskoczymy w górę, bo po chwili będziemy przelatywać obok punktu początkowego z prędkością skierowaną w dół.

Rozważmy teraz sytuację, gdy nasza prędkość początkowa jest pozioma – co powoduje, rozciągnięta guma nie będzie pionowa.

Jeśli guma jest rozciągnięta i jej koniec znajduje się o z niżej, niż punkt zawieszenia, to wydłużenie gumy wynosi $\Delta l = (z/\cos\alpha - l_0)$, gdzie α jest kątem jaki tworzy guma z pionem, a l_0 długością swobodną gumy. Pionowa składowa siły napięcia gumy wynosi zatem $\Delta l k \cos\alpha = (z - l_0 \cos\alpha) k \geq (z - l_0) k$. Oznacza to, że gdy gumka jest odchylona od pionu, siła przeciwstawiająca się grawitacji jest większa niż przy tym samym z dla gumy pionowej. Zatem jeśli przy skoku odbijemy się w kierunku poziomym, to mniej zbliżymy się do ziemi.

Rozwiązanie zadania 7.

Przyjmijmy, że w układzie odniesienia, w którym spoczywamy, odstęp czasu między śmiercią Elvisa Presleya a chwilą obecną wynosi T . Niech O' odpowiada szukanemu obserwatorowi, znajdującemu się w chwili obecnej w odległości d (w naszym układzie odniesienia) od nas i zbliżającym się do nas z prędkością v . Dla spoczywającego względem nas obserwatora O , którego w chwili obecnej mija obserwator O' , współrzędne czasoprzestrzenne śmierci Elvisa wynoszą (dla uproszczenia rozważamy tylko współrzędną czasową t i jedną współrzędną przestrzenną x) $t = -T$, $x = d$, a chwila obecna to $t = 0$. Zgodnie z transformacją Lorentza, współrzędna czasowa śmierci Elvisa w układzie O' (przyjmujemy, że początki układów O i O' się pokrywają) wynosi

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{-T - \frac{v}{c^2}d}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

gdzie c jest prędkością światła. Zatem aby $t' > 0$, tzn. by śmierć Elvisa była zdarzeniem przyszłym w układzie O' , musi być spełniony warunek

$$v < -\frac{T}{d}c^2,$$

przy czym dla realnych układów odniesienia

$$-c < v < c.$$

Oznacza to, że d oraz v powinny spełniać warunki

$$d > Tc, \quad c > -v > \frac{T}{d}c^2.$$

Przyjmując w przybliżeniu $T = 34$ lata (Elvis Presley zmarł 16 sierpnia 1977 roku), np. obserwator znajdujący się od nas w odległości 100 lat świetlnych i oddalający się od nas z prędkością $c/2$ spełnia warunki zadania.

Niestety, z faktu, że dla obserwatora O' Elvis Presley jeszcze żyje, nie wynika, że Elvis zaśpiewa temu obserwatorowi nowe, nie znane nam piosenki.

Rozwiązanie zadania 8.

Na pręt działa siła elektromagnetyczna $F = BId$, gdzie prąd $I = (U - Bvd)/R$, przy czym R jest oporem elektrycznym układu, a Bvd – wyindukowaną siłą elektromotoryczną. Siła przyspieszająca belkę będzie niezerowa jeśli I będzie niezerowe, czyli dla $v < U/(Bd)$. Czyli $U/(Bd)$ jest prędkością graniczną belki.

Rozwiązanie zadania 9.

Ponieważ oba przedmioty mają taką samą masę i ten sam moment bezwładności względem osi prostopadłej do nich, również długości prętów w obu przypadkach są takie same (co można też odczytać z rysunku), a masa każdego z prętów w przedmiocie (b) jest dwa razy mniejsza od masy pręta (a). W przypadku przedstawionym na rysunku jeden z prętów przedmiotu (b) jest stale prostopadły do osi obrotu, a zatem nie działa on momentem siły na wał. Ponieważ drugi pręt jest dwa razy lżejszy od pręta (a), zatem moment siły działający na wał pochodzący od przedmiotu (a) jest większy, niż moment siły pochodzący od przedmiotu (b).

Rozwiązanie zadania 10.

Silniki powinny działać tak, by wykonywać dodatnią pracę – z zasady zachowania energii ta praca spowoduje wzrost energii kinetycznej pociągu (lub pokonanie oporów ruchu). Zatem gdy pociąg wjeżdża w zakręt, silniki powinny zginać złącza międzywagonowe, a gdy wyjeżdża na prosty odcinek – wyprostowywać je. Gdy pociąg jedzie po fragmencie toru o stałym promieniu łuku (kąąt zgięcia jest stały), silniki nie wykonują pracy i nie mogą być wykorzystane do napędu pociągu.

Rozwiązanie zadania 11. Na Księżycu pierwsza prędkość kosmiczna to ok. 1,68 km/s, zatem przy poziomym kierunku strzału pocisk nie spadnie na powierzchnię Księżyca. Czyli maksymalny zasięg jest nieskończony.

Rozwiązanie zadania 12.

Zewnętrzne pole elektryczne powoduje rozsuniecie ładunków w rozważanej dielektrycznej kulce i powstanie niezerowego momentu dipolowego, w uproszczeniu równego Qd , gdzie d jest odległością między wyindukowanymi ładunkami $+Q$ i $-Q$. Można przyjąć, że d ma stałą wartość (w przybliżeniu równą promieniowi kulki). Przy dwukrotnym wzroście ładunku q , dwukrotnie wzrośnie natężenie wytwarzanego przez nie pola elektrycznego, a w konsekwencji o czynnik 2 wzrośnie wartość każdego z wyindukowanych ładunków. Zatem siła działająca na kulkę (proporcjonalna do $q \cdot Q$) wzrośnie czterokrotnie.

Rozwiązanie zadania 13.

Jeśli walec ma niezerową wysokość, to siła tarcia hamująca ruch postępowy klocka spowoduje, że przednia (zgodnie z kierunkiem ruchu walca) część walca będzie naciskała na podłoże mocniej niż tylna. Zatem siła tarcia działająca na przednią część podstawy walca będzie miała dużą składową prostopadłą do kierunku ruchu, przeważającą nad tą składową dla innych miejsc podstawy. Tor ruchu walca ulegnie odchyleniu w lewo.

Rozwiązanie zadania 14.

Z powodu falowej natury światła, na krawędzi przedmiotów ulega ono ugięciu (dyfrakcji). Jeśli kulka jest mała, to ugięte światło dobiegnie do osi równoległej do pierwotnego kierunku biegu światła i przechodzącej przez środek kulki. Tu światło ugięte na różnych fragmentach brzegu kulki ulega interferencji – konstruktywnej ze względu na jednakową przebytą drogę. Na ekranie zaobserwujemy jasny punkt. Zatem d) – przyczyną zjawiska są zjawiska falowe – dyfrakcja i interferencja światła.

Uwaga: omawiane zjawisko znane jest jako plamka Poissona.

Rozwiązanie zadania 15.

W wyniku rozpadu wydziela się energia powodująca wzrost temperatury kuli. Ponieważ w drugim przypadku liczba rozpadów jest znacznie mniejsza niż w pierwszym, całkowita energia wydzielana w pierwszej kuli będzie większa i kula ta będzie miała wyższą temperaturę. Zatem kule o wyższej temperaturze będą zawierały izotop ^{238}Pu .

Rozwiązanie zadania T1.

Z warunków równowagi mechanicznej wynika

$$m_1 g + p_0 S_1 - N = p S_1, \quad m_2 g + p_0 S_2 - N = p S_2, \quad (1)$$

gdzie N jest siłą naciągu nici, p – ciśnieniem gazu wewnątrz cylindrów, a $S_i = \pi R_i^2$, $i = 1, 2$. Stąd

$$p = \frac{(m_1 - m_2) g}{(S_1 - S_2)} + p_0. \quad (2)$$

Widzimy, że p nie zmienia się podczas podgrzewania gazu i przesunięcia tłoków. Ciepło dostarczone do gazu jest równe zmianie całkowitej energii układu

$$Q = n C_V \Delta T + (m_1 g + p_0 S_1) z_1 + (m_2 g + p_0 S_2) z_2, \quad (3)$$

gdzie z_i jest przesunięciem do góry i – tego tłoka, przy czym $z_2 = -z_1$. Zmiana objętości gazu wyniesie

$$\Delta V = z_1 S_1 + z_2 S_2 \quad (4)$$

$$= n R \Delta T / p, \quad (5)$$

przy czym w (5) skorzystaliśmy z równania stanu gazu doskonałego.

Korzystając z (4), (5) wyznaczamy przesunięcie tłoków

$$z_1 = -z_2 = \frac{\Delta V}{S_1 - S_2} = \frac{n R \Delta T}{p (S_1 - S_2)} \quad (6)$$

$$= \frac{n R \Delta T}{p_0 \pi (R_1^2 - R_2^2) + (m_1 - m_2) g}. \quad (7)$$

Wstawiając otrzymane z_1, z_2 do równania (3) otrzymamy

$$Q = n C_V \Delta T + \left[\frac{(m_1 - m_2) g}{S_1 - S_2} + p_0 \right] \frac{n R}{p} \Delta T \quad (8)$$

$$= n (C_V + R) \Delta T = n C_p \Delta T. \quad (9)$$

Powyższy wynik można otrzymać natychmiast wykorzystując to, że ciśnienie wewnątrz cylindrów jest stałe – wyrażenie (9) jest standardowym wyrażeniem na ciepło w przemianie izobarycznej.

Po podstawieniu danych liczbowych dostaniemy

$$Q = n (C_V + R) T \approx 14,5 \text{ J}, \quad (10)$$

$$z_1 = -z_2 = \frac{n R T}{p_0 \pi ((r_1)^2 - (r_2)^2) + (m_1 - m_2) g} \approx 7,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}. \quad (11)$$

Uwaga: Po wyznaczeniu na podstawie podanych danych liczbowych siły naciągu nici okazuje się, że jest ona ujemna, co oznacza, że nić nie może być napięta. Otrzymany wynik liczbowy odpowiada zatem sytuacji, w której zamiast nici mamy inny mechanizm zapewniający warunek $z_1 = -z_2$. Jeśli zawodnik zauważył ten problem i pokazał występowanie wymienionej sprzeczności, otrzymuje 1 pkt. za część zadania odpowiadającą wyznaczeniu wyników liczbowych oraz dodatkowo do 4 pkt. za część teoretyczną (patrz punktacja).

Punktacja zadania T1.

Warunki równowagi mechanicznej (wzory 1 lub równoważne) – 1 pkt.

Ciśnienie wewnątrz cylindrów (wzór 2 lub równoważny) - 2 pkt.

Warunek $z_1 = -z_2$ oraz związek zmiany objętości z przesunięciami tłoka (wzór 4 lub równoważny) – 1 pkt.

Związek zmiany objętości z temperaturą i ciśnieniem (wzór 5 lub równoważny) – 1 pkt.

Przesunięcie tłoków (wzór 7 lub równoważny) lub zauważenie (z uzasadnieniem), że podane dane liczbowe są sprzeczne z założeniem, że nie jest napięta – 2 pkt.

Dostarczone ciepło (wzór 9 lub równoważny) lub zauważenie (z uzasadnieniem), że podane dane liczbowe są sprzeczne z założeniem, że nie jest napięta – 2 pkt.

Wyniki liczbowe (wzory 1 lub równoważne) lub zauważenie (z uzasadnieniem), że podane dane liczbowe są sprzeczne z założeniem, że nie jest napięta – 1 pkt.

Rozwiązanie zadania T2.

Niech A oznacza punkt pierwszego uderzenia kulki w czaszę, O – środek sfery, której fragmentem jest wewnętrzna powierzchnia czaszy, natomiast niech α będzie kątem padania kulki na powierzchnię (kątem, jaki tworzy odcinek OA z pionem). Z treści zadania $\sin \alpha = (R/2)/R$, stąd $\alpha = 30^\circ$. Ponieważ odbicia są doskonale sprężyste, kąt odbicia β jest równy kątowi padania. Zatem tuż po pierwszym odbiciu prędkość kulki tworzyła kąt $\gamma = 90^\circ - (\alpha + \beta) = 30^\circ$ z poziomem.

Zauważmy, że aby kulka mogła powrócić do swojego początkowego miejsca po czterech odbiciach od czaszy, jej tor musi być symetryczny względem osi czaszy, a zatem za drugim razem powinna uderzyć w czaszę w odległości $R/2$ od jej osi. Zasięg l rzutu ukośnego jest dany wzorem

$$l = \frac{v^2 \sin 2\gamma}{g}, \quad (12)$$

gdzie w naszym przypadku $l = 2 \cdot R/2 = R$, a v jest prędkością kulki tuż po pierwszym odbiciu. Stąd

$$v^2 = \frac{gR}{\sin 2\gamma}. \quad (13)$$

Z drugiej strony, z zasady zachowania energii

$$mgH = mv^2/2, \quad (14)$$

gdzie m jest masą kulki. Zatem szukana wysokość H wynosi

$$H = \frac{v^2}{2g} = \frac{R}{2 \sin 2\gamma} \quad (15)$$

$$= \frac{R}{\sqrt{3}}. \quad (16)$$

Punktacja zadania T2.

Wyznaczenie kąta, jaki tworzyła z poziomem prędkość kulki \vec{v} tuż po pierwszym odbiciu (30°) – 2 pkt.

Zauważenie, że tor kulki musi być symetryczny względem osi czaszy (lub stwierdzenie równoważne) – 3 pkt.

Wyznaczenie prędkości v na podstawie zasięgu (wzór 13 lub równoważny) – 2 pkt.

Związek między prędkością v a wysokością H (wzór 14 lub równoważny) – 2 pkt.

Wynik końcowy (wzór 16) – 1 pkt.

Rozwiązanie zadania T3.

Jeśli pominiemy masę pręta oraz działającą na niego siłę elektrodynamiczną, każdy z ciężarków będzie poruszał się niezależnie, drgając z częstością $\omega = \sqrt{k/m}$. Odchylenie i – tego ciężarka od położenia równowagi w chwili t wynosi

$$x_i = z_i \cos \omega t, \quad (17)$$

gdzie z_i jest odchyleniem w chwili początkowej $t = 0$.

Pole ograniczone przez obwód elektryczny wynosi $S = l \cdot \left(h + \frac{x_1 + x_2}{2}\right)$, gdzie h jest długością sprężynki w stanie równowagi. Zgodnie z prawem Faradaya, siła elektromotoryczna indukowana w obwodzie wynosi

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}(BS) = -\frac{d}{dt}\left(Bl \cdot \frac{x_1 + x_2}{2}\right) \quad (18)$$

$$= \frac{Bl(z_1 + z_2)}{2} \omega \sin \omega t = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega t, \quad (19)$$

gdzie $\mathcal{E}_{\max} = \frac{Bl(z_1 + z_2)}{2} \omega$. Natężenie prądu płynącego w obwodzie wynosi $I = \mathcal{E}/R$, zatem ciepło wytwarzane w trakcie jednego drgania (trwającego $T = 2\pi/\omega$) jest równe

$$Q_1 = \frac{\mathcal{E}_{\max}^2}{2R} T = \frac{B^2 l^2 (z_1 + z_2)^2}{8R} \omega^2 T \quad (20)$$

$$= \frac{B^2 l^2 (z_1 + z_2)^2}{8R} 2\pi \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (21)$$

Energia mechaniczna drgań wynosi $E_{\text{mech}} = k(z_1^2 + z_2^2)/2$, zatem szukany współczynnik jest równy

$$\frac{Q_1}{E_{\text{mech}}} = \frac{B^2 l^2 \pi}{2R \sqrt{km}} \frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1^2 + z_2^2}. \quad (22)$$

W rozpatrywanych przypadkach szczególnych otrzymamy

$$\frac{Q_1}{E_{\text{mech}}} = \begin{cases} 2 \frac{B^2 l^2 \pi}{2R \sqrt{km}} & \text{dla } z_1 = d, z_2 = d; \\ 0 & \text{dla } z_1 = -d, z_2 = d; \\ \frac{B^2 l^2 \pi}{2R \sqrt{km}} & \text{dla } z_1 = 0, z_2 = d. \end{cases} \quad (23)$$

Wartości liczbowe wynoszą

$$\frac{Q_1}{E_{\text{mech}}} = \begin{cases} 1, 0 \cdot 10^{-3} & \text{dla } z_1 = d, z_2 = d; \\ 0 & \text{dla } z_1 = -d, z_2 = d; \\ 0, 5 \cdot 10^{-3} & \text{dla } z_1 = 0, z_2 = d. \end{cases} \quad (24)$$

W powyższym rozwiązaniu ruch układu wyznaczyliśmy pomijając działającą na pręt siłę elektrodynamiczną. Jednak w długim czasie, siła elektrodynamiczna, choć mała, powoduje tłumienie drgań i należy ją uwzględnić.

W przypadku $z_1 = d, z_2 = d$ pręt jest poziomy i na każdy z ciężarków działa taka sama siła tłumiąca – zatem pręt nadal będzie drgał pozostając w pozycji poziomej (nie zmieni się charakter ruchu), ale amplituda drgań będzie malała (po bardzo długim czasie do zera).

Najprostszą sytuacją jest w przypadku $z_1 = -d, z_2 = d$: tutaj nie indukuje się siła elektromotoryczna ($S = \text{const}$), nie płynie prąd i nie ma tłumienia. Zatem po bardzo dużym czasie ani charakter, ani amplituda drgań nie ulegnie zmianie.

W przypadku $z_1 = 0$, $z_2 = d$ natężenie prądu płynącego w każdym fragmencie pręta jest takie same, zatem wszędzie wzdłuż niego działa taka sama siła elektrodynamiczna. Oznacza to, że drgania ciężarka (2) będą tłumione, natomiast zostaną wzbudzone drgania ciężarka (1). Będzie to trwać do momentu, gdy ciężarki będą drgały zaczęły drgać w przeciwnej fazie i z tą samą amplitudą – tak jak w drugim z rozpatrywanych przypadków $z_1 = -d$, $z_2 = d$. Odtąd amplituda drgań nie będzie się już zmieniała.

Ogólną metodą analizy dowolnego ruchu naszego układu jest przedstawienie go jako złożenia drgań „typu 1” (w których pręt pozostaje poziomy) i drgań „typu 2” (w których środek pręta się nie porusza). Gdy pierwsza składowa zostanie wytłumiona, pozostanie tylko składowa druga. Łatwo wykazać, że w naszym trzecim przypadku ($z_1 = 0$, $z_2 = d$) amplituda końcowa będzie wynosiła $d/2$ – nie było to jednak wymagane od uczestników Olimpiady.

Punktacja zadania T3.

Zależność położenia ciężarków od czasu (wzór 17 wraz z $\omega = \sqrt{k/m}$ lub wzory równoważne) – 2 pkt.

Siła elektromotoryczna indukowana w obwodzie (wzór 19 lub równoważny) – 2 pkt.

Ciepło wydzielane w trakcie jednego drgania (wzór 21 lub równoważny) – 1 pkt.

Szukany stosunek w poszczególnych przypadkach (wzory 23) – 1 pkt.

Wartości liczbowe szukanego stosunku w poszczególnych przypadkach (wzory 24) – 1 pkt.

Opis ruchu układu po bardzo długim czasie w przypadkach $z_1 = -d$, $z_2 = d$ oraz $z_1 = d$, $z_2 = d$ – 1 pkt.

Opis ruchu układu po bardzo długim czasie w przypadku $z_1 = 0$, $z_2 = d$ – 2 pkt.

Rozwiązanie zadania numerycznego T4.

Poniżej x_n, y_n , odpowiada położeniu „fotonu”, s_k to wartość sinusa kąta α_k , jaki tworzy (dalszy) kierunek biegu promieni z osią Y , p_k to pomocnicza wielkość, odpowiadająca s_k wyliczonemu na podstawie prawa załamania, c_k to cosinus kąta α_k (z uwzględnieniem znaku), z_k to znak cosinusa kąta α_k ($= +1$ gdy promień biegnie do "góry" tzn. y rośnie, -1 gdy promień biegnie do "dołu" tzn. y maleje), o_k – czy mamy do czynienia z odbiciem (0 =nie, 1 =tak), n_k – wartość współczynnika załamania. Wskaźnik k odpowiada numerowi kroku obliczeń (chwili t_k). Stałymi są wielkości n_0, b oraz d – odstęp między kolejnymi wartościami x .

Krok wstępny: przypisanie wartości stałym; $n_0 = 10, b = -10$. Wartość d ustalono wstępnie na $0,01$, po obejrzeniu przebiegu promienia dla różnych wartości α_0 skorygowano ją na $0,0005$.

Krok 0: przypisanie $x_0 = 0, y_0 = 0, s_0 = \sin(\alpha_0), c_k = \cos(\alpha_0), p_0 = s_0, z_0 = 1, o_0 = 0$.

Krok k:

- przesunięcie „fotonu”, do nowego położenia: $x_k = x_{k-1} + d, y_k = y_{k-1} + d \cdot c_{k-1}/s_{k-1}$;
- wyznaczenie wartości współczynnika załamania w nowym położeniu: $n_k = n_0 + b \cdot y_k$;
- wstępne wyznaczenie wartości $\sin \alpha_k$, oznaczonej jako p_k , na podstawie prawa załamania $n_{k-1} \sin \alpha_{k-1} = n_k \sin \alpha_k$: $p_k = n_{k-1} s_{k-1} / n_k$; obliczona wartość p_k może mieć moduł większy od 1 – oznacza to, że w tym przypadku mamy do czynienia z odbiciem, a „foton”, przebywa w tym miejscu wirtualnie; gdy $|p_k| > 1$ przypisujemy $o_k = 1$, w przeciwnym razie $o_k = 0$;

- ustalenie nowego kierunku biegu promienia:

jeśli $o_k = 0$ (nie ma odbicia) to $z_k = z_{k-1}$ (jeśli promień biegł w górę, dalej będzie biegł w górę, jeśli biegł w dół, dalej będzie biegł w dół) $s_k = p_k$ (zgodnie z prawem załamania), $c_k = z_k \sqrt{1 - (s_k)^2}$ (korzystamy z jedyńki trygonometrycznej i z tego, że z_k "pamięta" znak $\cos \alpha_k$

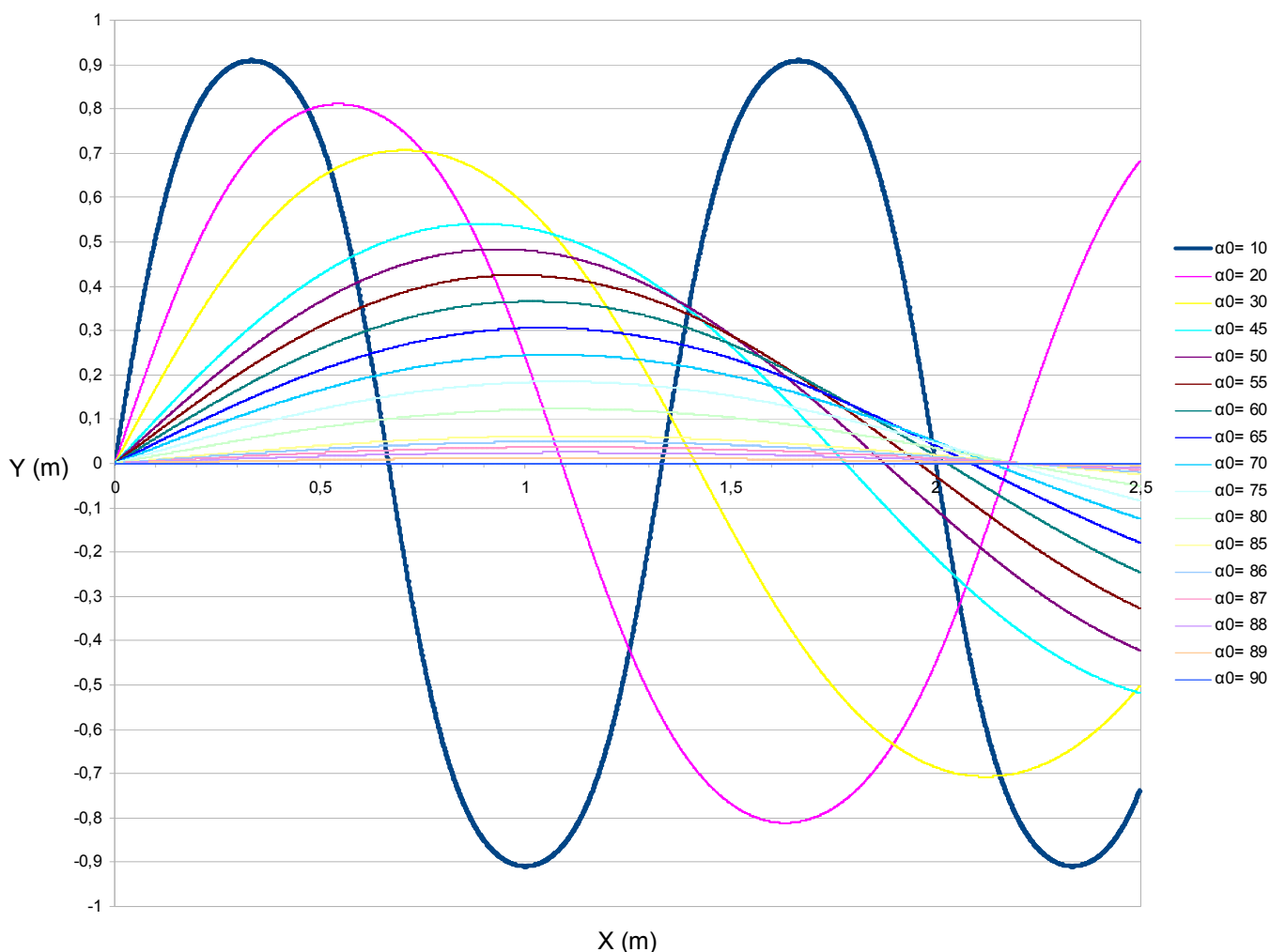
jeśli $o_k = 1$ (jest odbicie) to $z_k = -z_{k-1}$ (jeśli promień biegł w górę, to teraz będzie biegł w dół, jeśli biegł w dół, teraz będzie biegł w górę) $s_k = s_{k-1}$ (odbicie!), $c_k = z_k \sqrt{1 - (s_k)^2}$ (lub po prostu $c_k = -c_{k-1}$).

Implementacja powyższego algorytmu została dokonana na dwa sposoby: w programie komputerowym napisanym w języku *C++* oraz w arkuszu kalkulacyjnym. Są one dostępne na stronie <http://www.kgof.edu.pl>. Poniżej omówiono bardziej szczegółowo implementację przy użyciu arkusza kalkulacyjnego.

W przypadku arkusza kalkulacyjnego numer kroku odpowiada względnemu numerowi wiersza, zmienne x, y, n itp. odpowiadają kolumnom, a x_k, y_k, n_k – komórkom arkusza. Na podstawie wartości kolumn x, y stworzono w ramach tego samego arkusza wykres. Następnie tak dopasowywano wartość d i liczbę kroków (wierszy), by dla każdej z rozważanej wartości otrzymany wykres był gładki i by w przypadku okresowości (małe kąty α_0), fragmenty biegu promienia odpowiadające poszczególnym okresom były wizualnie identyczne. Sprawdzone również, że przy zmniejszeniu d widoczny na wykresie bieg promienia nie uległ zmianie. Ostatecznie przyjęto liczbę kroków równą 5000 , a $d = 2,5/5000 = 0,0005$.

Po ustaleniu parametrów i widoku arkusza powielono go (skopiowano) w ramach tego samego skoroszytu, ustawiając w każdym z powstałych arkuszy inną wartość α_0 , tak by otrzymać tor promienia dla każdej z wartości α_0 podanej w treści zadania. Następnie dodano jeszcze jeden arkusz, zawierający na jednym wykresie tory we wszystkich rozważanych przypadkach.

Otrzymany wykres jest przedstawiony na rysunku.



Na podstawie tego wykres można przyjąć, że promienie o α_0 zbliżonym do 90° ogniskują się w jednym punkcie, odległym od punktu początkowego o ok. 2,2 m.

Punktacja zadania numerycznego

Opis przyjętej metody, w tym wyjaśnienie sposobu postępowania w przypadku "odbicia" – 4 pkt.

Wykres zgodny z przedstawionym wykresem wzorcowym – 4 pkt.

Stwierdzenie, że promienie o α_0 zbliżonym do 90° ogniskują się w jednym punkcie i podanie przybliżonej odległości punkt początkowy – ognisko (ok. 2,2 m) – 2 pkt.