LXII OLIMPIADA FIZYCZNA

ZAWODY II STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

Zadanie 1.

Szkło ścianki akwarium ma niewielką grubość i współczynnik załamania n_s, natomiast współczynnik załamania wody wynosi n_w. Mała rybka pływa w odległości d od ścianki (jej wewnętrznej strony), oświetlona przez punktowe, izotropowe źródło światła, umieszczone tuż przy ściance

a) w wodzie,

b) na zewnątrz akwarium.

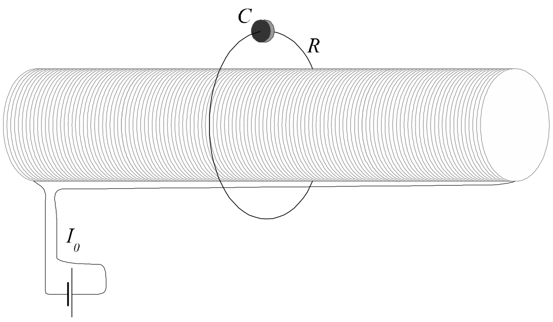
Przy przejściu światła z powietrza (poprzez ściankę akwarium) do wody jest pochłaniany ułamek jego początkowego natężenia równy $1 - \eta$, gdzie $0 < \eta < 1$. Pomiń pochłanianie świata w wodzie oraz jego odbicie na granicy ośrodków.

Ile wynosi I_b/I_a – stosunek natężeń oświetlenia rybki w obu przypadkach? Natężenie oświetlenia I definiujemy jako stosunek mocy padającego promieniowania do pola oświetlonej powierzchni.

Dla $n_s = 1,50$, $n_w = 1,33$, $d = 0,2$ m, $\eta = 0,7$ określ, w którym przypadku rybka jest lepiej oświetlona.

Prosta poprowadzona od źródła światła do rybki jest prostopadła do ścianki.

Zadanie 2.

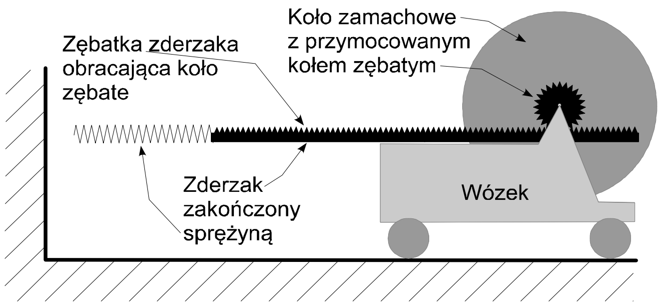


Rozważmy solenoid o promieniu r_1 i długości l z nawiniętymi N zwojami drutu ($N \gg 1$)), przez który płynie prąd o stałym natężeniu I_0, oraz bardzo odległą od niego pętlę z drutu o oporze R i promieniu r_2, przy czym $r_1 < r_2 \ll l$. Obwód pętli zawiera kondensator o pojemności C, początkowo nienaładowany. Pętlę nałożono na solenoid (patrz rys.) w ciągu czasu $T \ll RC$.

Wyznacz wartość ładunku elektrycznego na kondensatorze natychmiast po przemieszczeniu pętli.

Pomiń pole magnetyczne wytwarzane przez pętlę.

Zadanie 3.



Wózek o całkowitej masie M posiada ruchomy zderzak zakończony sprężyną o stałej sprężystości k (patrz rysunek). Ruch zderzaka względem wózka powoduje (poprzez koło zębate o promieniu r) obrót koła zamachowego o momencie bezwładności I.

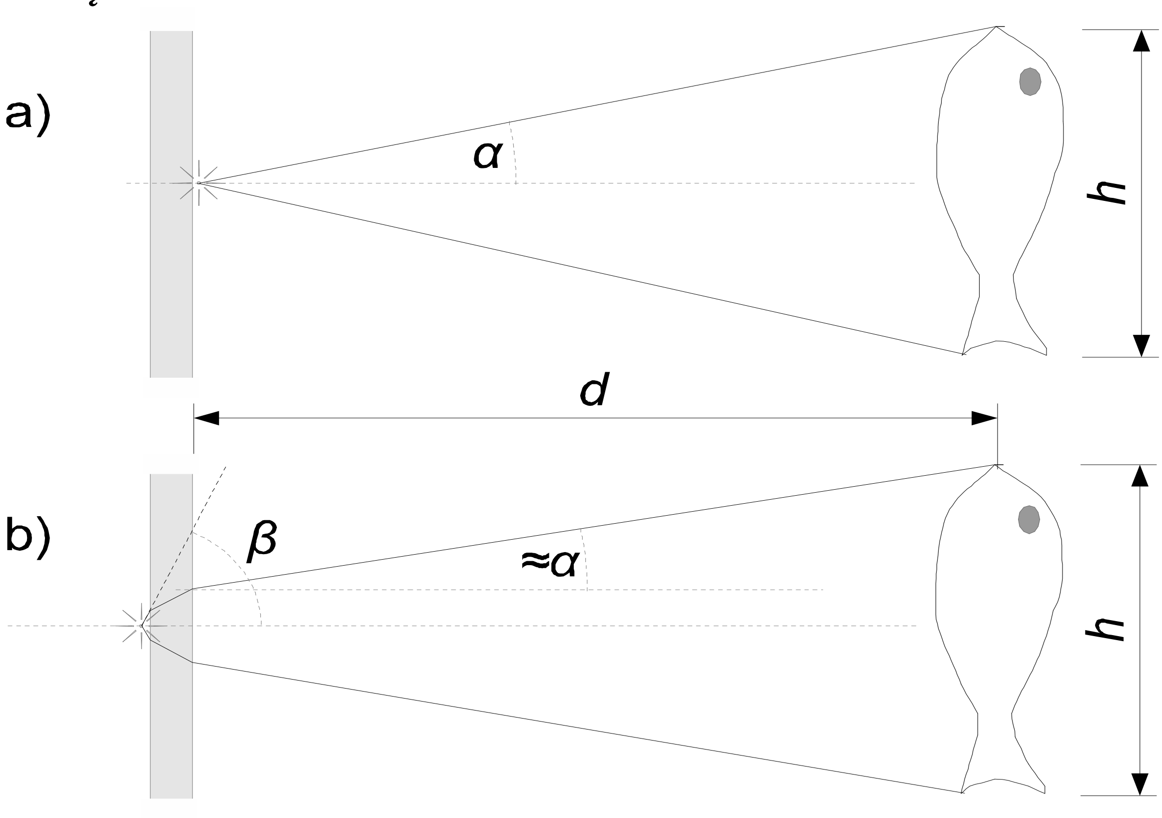
Wózek uderza z prędkością V_o w pionową ścianę. Wyznacz przyspieszenie wózka w zależności od czasu, jaki upłynął od chwili uderzenia zderzaka o ścianę.

Jaki warunek muszą spełniać M, k, I, V_0, r, aby wózek w pewnym momencie się zatrzymał?

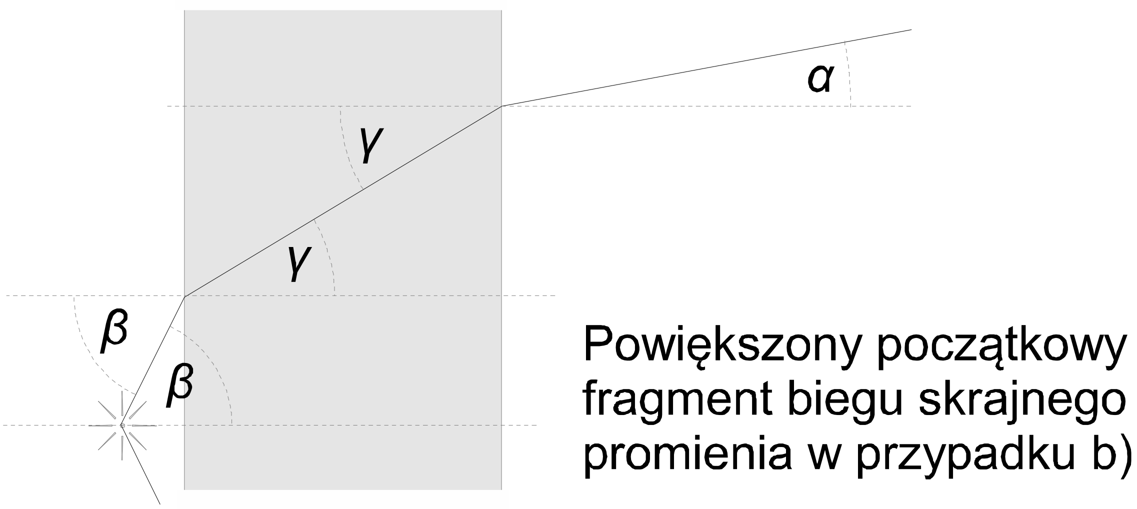
Pomiń tarcie, masę sprężyny i zderzaka oraz momenty bezwładności kół wózka. Początkowo spężyna jest nienaprężona, a koło zamachowe nie obraca się. Oś obrotu koła zamachowego nie przesuwa się względem wózka. Masa M zawiera masę koła zamachowego.

Rozważ tylko sytuację, gdy zderzak wystaje poza krawędź wózka, a sprężyna nie ulega całkowitemu ściśnięciu (sprężyny i zderzak są wystarczająco długie) ani wyboczeniu.

Rozwiązanie zadania 1



Rozważmy sytuację w rzucie na płaszczyznę prostopadłą do ścianki – jak np. na powyższym rysunku. Niech α będzie kątem, jaki skrajny promień padający na rybkę tworzy z normalną do płaszczyzny ścianki akwarium. Ponieważ grubość szkła ścianki jest bardzo mała, w obu rozważanych przypadkach ten kąt jest w przybliżeniu taki sam. W sytuacji przedstawionej na rysunku jest on dany wzorem $\alpha \approx \frac{h/2}{d}$, gdzie wykorzystaliśmy fakt, że $h \ll d$ (rybka jest mała). W przypadku a) kąt α jest kątem, jaki tworzy rozważany promień z normalna do ścianki akwarium tuż po wyjściu ze źródła. W przypadku b) kąt β, jaki tworzy rozważany skrajny promień z normalną do ścianki akwarium tuż po wyjściu ze źródła, jest większy z powodu załamania – patrz rysunek poniżej.



Stosując prawo Snelliusa kolejno do załamania na granicy powietrze-szkło i załamania na granicy szkło-woda otrzymujemy (patrz rysunek powyżej)

$$\sin\beta = n_s \sin\gamma,$$
$$n_s \sin\gamma = n_w \sin\alpha.$$

Zatem dochodzimy do wniosku, że

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \approx \frac{\beta}{\alpha} = n_w, \tag{1}$$

gdzie wykorzystaliśmy to, że kąty są małe (rybka jest mała). Zauważmy, że powyższy wzór obowiązuje również dla dowolnych innych skrajnych promieni padających na rybkę, np. jeśli rozważymy sytuację w płaszczyźnie prostopadłej do ścianki oraz płaszczyzny rozważanej dotychczas.

Ponieważ źródło jest izotropowe, natężenie oświetlenia rybki jest proporcjonalne do kąta bryłowego określonego przez te promienie wychodzące ze źródła, które następnie padają na rybkę. Ten kąt bryłowy w przypadku a) jest proporcjonalny do α^2, natomiast w przypadku b) jest proporcjonalny do β^2. Uwzględniając, że przy przejściu z powietrza do wody część promieniowania jest pochłaniana, otrzymujemy

$$I_b/I_a = \eta \cdot (n_w)^2 \tag{2}$$
$$\approx 1,24 > 1. \tag{3}$$

Ponieważ w rozpatrywanym przypadku $I_b/I_a > 1$, rybka jest lepiej oświetlona w przypadku b).

Rozwiązanie zadania 2

Zgodnie z prawem Faradaya siła elektromotoryczna indukowana w pętli wynosi

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, \tag{4}$$

gdzie Φ jest przechodzącym przez pętlę strumieniem indukcji pola magnetycznego. Zatem prąd, jaki by płynął w pętli, przy pominięciu napięcia na kondensatorze wyniósłby

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}. \tag{5}$$

Stąd ładunek, jakim zostałby naładowany kondensator przy pominięciu napięcia na kondensatorze wyniósłby

$$Q = -\frac{\Phi_k - \Phi_p}{R}, \tag{6}$$

gdzie Φ_p jest początkowym strumieniem indukcji magnetycznej przechodzącym przez pętlę, a Φ_k – końcowym.

Pole magnetyczne wewnątrz solenoidu można wyznaczyć np. z prawa Ampere'a, otrzymując

$$B = \mu_0 \frac{NI_0}{l},$$

gdzie μ_0 jest przenikalnością magnetyczną próżni. Ponieważ w dużej odległości od solenoidu nie ma pola magnetycznego, a pole przekroju poprzecznego solenoidu wynosi πr_1^2, mamy

$$\Phi_p = 0, \ \Phi_k = \frac{\mu_0 \pi r_1^2 I_0 N}{l}. \tag{7}$$

Zatem

$$Q = -\frac{\mu_0 \pi r_1^2 I_0 N}{Rl}. \tag{8}$$

Przy takim ładunku napięcie na kondensatorze wyniosłoby

$$U = \frac{Q}{C} = -\frac{\mu_0 \pi r_1^2 I_0 N}{RCl}. \tag{9}$$

Gdyby na kondensatorze przez cały czas przemieszczania pętli było napięcie U, to odpłynąłby z niego ładunek o wartości

$$Q_2 = -\frac{U}{R}T = -\frac{T}{RC}Q. \tag{10}$$

Ponieważ $\frac{T}{RC} \ll 1$, zatem $|Q_2| \ll |Q|$ i w dobrym przybliżeniu szukany ładunek wynosi $\left|\frac{\mu_0 \pi r_1^2 I_0 N}{Rl}\right|$.

Rozwiązanie zadania 3.

Niech F będzie siłą, z jaką ściana działa na zderzak , a_2 – przyspieszeniem wózka, ε – przyspieszeniem kątowym koła zamachowego. Z II zasady dynamiki dla ruchu postępowego otrzymamy

$$F = -Ma_2, \tag{11}$$

natomiast z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego mamy

$$Fr = I\varepsilon. \tag{12}$$

Dodatkowo mamy

$$F = kx_1, \tag{13}$$
$$a_2 - a_1 = \varepsilon r, \tag{14}$$

gdzie x_1 jest ściśnięciem sprężyny (różnicą między długością swobodną a długością aktualną), natomiast a_1 – odpowiadającym mu przyspieszeniem.

Stąd eliminując F, ε oraz a_2 otrzymamy

$$a_1 = -\frac{k}{M}\frac{I + Mr^2}{I}x_1. \tag{15}$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego o częstości $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}\frac{I+Mr^2}{I}}$. Rozwiązaniem tego równania jest

$$x_1 = A\sin\omega t + B\cos\omega t. \tag{16}$$

Uwzględniając, że w chwili uderzenia o ścianę $x_1 = 0$, a prędkość ściskania sprężyny wynosi V_0 otrzymamy

$$x_1 = \frac{V_0}{\omega}\sin\omega t. \tag{17}$$

Stąd szukane przyspieszenie

$$a_2 = -\frac{k}{M}\frac{V_0}{\omega}\sin\omega t \tag{18}$$
$$= -\frac{k}{M}\frac{V_0}{\sqrt{\frac{k}{M}\frac{I+Mr^2}{I}}}\sin\sqrt{\frac{k}{M}\frac{I+Mr^2}{I}}t. \tag{19}$$

Na podstawie powyższego wyrażenia prędkość wózka jest dana wzorem

$$V(t) = \frac{k}{M}\frac{V_0}{\omega^2}\cos\omega t + v_1, \tag{20}$$

gdzie stałą v_1 tak dobieramy, by $V\,(t = 0) = V_o$. Zatem

$$V(t) = \frac{k}{M}\frac{V_0}{\omega^2}\cos\omega t - \frac{k}{M}\frac{V_0}{\omega^2} + V_0 \tag{21}$$
$$= V_0\left(\frac{I}{I + Mr^2}\cos\sqrt{\frac{k}{M}\frac{I + Mr^2}{I}}t + \frac{Mr^2}{I + Mr^2}\right). \tag{22}$$

Aby wózek mógł się zatrzymać musi być spełniony warunek

$$I \geq Mr^2. \tag{23}$$

Można również wyznaczyć ruch wózka. Otrzymamy

$$x_2 = V_0 \left(\frac{I}{I + Mr^2} \frac{\sin \omega t}{\omega} + \frac{Mr^2}{I + Mr^2} t \right), \tag{24}$$

gdzie x_2 jest odległością, o jaką przesunął się wózek od chwili uderzenia sprężyny o ścianę.