Rozwiązanie zadania T1.

Zagadnienie to można rozwiązać korzystając z zasady zachowania energii mechanicznej oraz zasady zachowania momentu pędu.

Całkowita energia mechaniczna planetoidy wynosi

$$E = \frac{m}{2}v^2 - \frac{GMm}{r}, \tag{1}$$

gdzie v to prędkość planetoidy względem Ziemi, r – odległość od jej środka, M oraz m to masy odpowiednio Ziemi oraz planetoidy, G – stała grawitacyjna.

Moment pędu planetoidy względem Ziemi to

$$J = mr^2\omega, \tag{2}$$

gdzie ω to prędkość kątowa planetoidy względem środka Ziemi.

W chwili, gdy zaobserwowano planetoidę

$$E = \frac{m}{2}\left(v_0^2 + \omega_0^2 r_0^2\right) - \frac{GMm}{r_0}, \tag{3}$$

$$J = mr_0^2\omega_0. \tag{4}$$

Z zachowania momentu pędu wynika, że prędkość kątowa ω_d planetoidy, gdy znajduje się ona w odległości r_d wynosi

$$\omega_d = \frac{J}{mr_d^2}. \tag{5}$$

Gdy planetoida znajduje się w punkcie najbliższym środka Ziemi, jej prędkość radialna jest równa 0, zatem jej energia wynosi

$$\frac{m}{2}\omega_d^2 r_d^2 - \frac{GMm}{r_d}. \tag{6}$$

Z zasady zachowania energii otrzymujemy

$$\frac{m}{2}\left(v_0^2 + \omega_0^2 r_0^2\right) - \frac{GMm}{r_0} = \frac{m}{2}\frac{r_0^4}{r_d^2}\omega_0^2 - \frac{GMm}{r_d}. \tag{7}$$

Jest to równanie kwadratowe na $\frac{1}{r_d}$, którego rozwiązaniem odpowiadającym mniejszemu r_d jest

$$r_d = \frac{r_0^4\omega_0^2}{GM + \sqrt{2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\left(v_0^2+\omega_0^2 r_0^2\right) - \frac{GM}{r_0}\right)\cdot r_0^4\omega_0^2 + (GM)^2}}, \tag{8}$$

$$r_d \approx 6130 \text{ km}. \tag{9}$$

Otrzymana minimalna odległość planetoidy od środka Ziemi $r_d \approx 6130$ km jest mniejsza od promienia Ziemi, a zatem planetoida jej nie ominie.

Rozwiązanie zadania T2.

Jeśli odparowywana jest masa Δm azotu, to jej objętość początkowa jest objętością cieczy i wynosi $\frac{\Delta m}{\rho_1}$, a objętość końcowa, zgodnie z założeniami, jest objętością gazu doskonałego równą $\frac{RT_1}{p_1}\frac{\Delta m}{\mu}$. Ponieważ w trakcie rozprężania część pracy musi być zużyta na pokonanie zewnętrznego ciśnienia p_0, użyteczna praca wykonana przez parę wynosi

$$W_1 = (p_1 - p_0)\left(\frac{RT_1}{p_1}\frac{\Delta m}{\mu} - \frac{\Delta m}{\rho_1}\right). \tag{10}$$

W drugim etapie objętość początkowa wynosi $\frac{RT_1}{p_1}\frac{\Delta m}{\mu}$, końcowa $\frac{RT_0}{p_0}\frac{\Delta m}{\mu}$. Ponieważ zależność ciśnienia od objętości jest linowa, wykonana praca jest równa pracy przy średnim ciśnieniu w cylindrze równym $\frac{p_1+p_0}{2}$. Zatem w tym etapie wykonana praca użyteczna to

$$W_2 = \left(\frac{p_1+p_0}{2} - p_0\right)\left(\frac{RT_0}{p_0} - \frac{RT_1}{p_1}\right)\frac{\Delta m}{\mu}. \tag{11}$$

Ponieważ w pozostałych etapach cyklu praca nie jest wykonywana, całkowita praca to

$$W = W_1 + W_2 = (p_1 - p_0)\left(\frac{RT_1}{2p_1\mu} + \frac{RT_0}{2p_0\mu} - \frac{1}{\rho_1}\right)\Delta m. \tag{12}$$

Stąd moc

$$P = (p_1 - p_0)\cdot\left(\frac{RT_1}{2p_1\mu} + \frac{RT_0}{2p_0\mu} - \frac{1}{\rho_1}\right)\frac{\Delta m}{\Delta t} \tag{13}$$

$$\approx 1,4\ \mathrm{kW}. \tag{14}$$

Rozwiązanie zadania T3.

Rozważmy porcję wody o masie dm_w. Początkowo ta woda spoczywa w jeziorze (lub innym zbiorniku) i jej pęd wynosi 0. Następnie jest ona wsysana, przepływa rurami i jest wyrzucana przez dysze. Końcowy pęd tej porcji wynosi $dm_w v$. Zatem zmiana pędu (od wciągnięcia do wyrzucenia) tej porcji wody to

$$dp = dm_w v. \tag{15}$$

Porcja wody o masie dm_w jest wyrzucana przez dysze w ciągu czasu $dt = dm_w / \left(\rho v s_1\right)$ i w ciągu takiego samego czasu jest wciągana przez rurę następna porcja o masie dm_w. Czyli w ciągu czasu dt zmiana pędu wody jest równa $dp = \rho v s_1 dt$.

Zatem siła jaka unosi pojazd do góry wynosi

$$F = \frac{dp}{dt} = \rho v^2 s_1, \tag{16}$$

Siła ta musi równoważyć całkowity ciężar pojazdu, co oznacza, że

$$mg = \rho v^2 s_1. \tag{17}$$

Stąd

$$v = \sqrt{\frac{mg}{\rho s_1}} \approx 17\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \tag{18}$$

Energia wyrzucanej w ciągu czasu dt wody to $\frac{1}{2}v^2 \rho v s_1 dt$, ale trzeba też wykonać pracę $gh\rho v s_1 dt$, aby podnieść tę wodę na wysokość h. Zatem w sumie moc silnika musi wynosić co najmniej

$$P = \frac{1}{2}v^2 \rho v s_1 + gh\rho v s_1. \tag{19}$$

Wykorzystując wzór na v otrzymamy

$$P = \left(\frac{1}{2}mg + gh\rho s_1\right)\sqrt{\frac{mg}{\rho s_1}} \tag{20}$$

$$\approx 17\ \mathrm{kW}. \tag{21}$$

Rozwiązanie zadania T4 (numerycznego)

Rozważmy ruch klocka spadającego z pewnej wysokości h. Ten ruch można podzielić na następujące etapy:

a) spadek swobodny z wysokości h do wysokości R,

b) ruch po okręgu (pętli) do momentu oderwania się od niej, zatrzymania lub powtórnego osiągnięcia minimalnej wysokości.

c) dalszy ruch klocka (którego pierwszym etapem może być odpadnięcie od pętli i rzut ukośny, ruch w kierunku przeciwnym do początkowego lub ruch po poziomej, końcowej części toru) albo spoczynek.

Szczegóły punktu c) nas nie interesują, chcemy tylko wiedzieć, z którym przypadkiem mamy do czynienia.

Ponieważ na etapie a) mamy do czynienia ze zwykłym spadkiem swobodnym, prędkość klocka pod koniec tego etapu możemy wyznaczyć np. z zasady zachowania energii otrzymując

$$v_1 = \sqrt{2\,(h-R)\,g}. \tag{22}$$

W etapie b) przyspieszenie $\vec{a}$ klocka oraz wypadkową działającą na niego siłę $\vec{F}$ wygodnie jest rozłożyć na składowe: styczną (oznaczoną indeksem s) oraz prostopadłą do powierzchni (oznaczoną indeksem p). Wygodnie jest też wprowadzić kąt α będący kątem, jaki półprosta środek okręgu – klocek zakreśliła w trakcie kolistej części ruchu klocka.

Mamy następujące związki

$$F_s = mg\cos\alpha - T, \tag{23}$$
$$F_p = mg\sin\alpha - N, \tag{24}$$

gdzie N jest siłą reakcji toru, a T – siłą tarcia.

Jeśli klocek porusza się po torze, to

$$T = \mu N. \tag{25}$$

Z równań ruchu otrzymujemy, że przyspieszenia styczne oraz prostopadłe (dośrodkowe) wynoszą

$$a_s = \frac{F_s}{m}, \tag{26}$$
$$a_p = -\frac{v^2}{R} = F_p, \tag{27}$$

gdzie prędkość $v = R\frac{d\alpha}{dt}$ oraz skorzystaliśmy ze wzoru na przyspieszenie dośrodkowe. Ponieważ mamy $a_s = \frac{dv}{dt}$, z otrzymanego układu równań otrzymujemy

$$v = R\frac{d\alpha}{dt},$$
$$\frac{dv}{dt} = g\cos\alpha - \mu\left(g\sin\alpha + \frac{v^2}{R}\right)$$

W celu numerycznego rozwiązania tego układu równań wygodnie jest wprowadzić zmienne bezwymiarowe:

$$
\begin{aligned}
\tau &= \sqrt{\frac{g}{R}}t, \\
\Omega &= \frac{d\alpha}{d\tau} = \sqrt{\frac{R}{g}}\frac{d\alpha}{dt} = \frac{v}{\sqrt{Rg}}, \\
\frac{d\Omega}{d\tau} &= \frac{1}{g}\frac{dv}{dt}.
\end{aligned}
$$

W nowych zmiennych nasz układ równań przyjmie postać

$$
\begin{aligned}
\Omega &= \frac{d\alpha}{d\tau}, && (28) \\
\frac{d\Omega}{d\tau} &= \cos\alpha - \mu\left(\sin\alpha + \Omega^2\right). && (29)
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że powyższe równania obowiązują tylko, jeśli $0 \leq \alpha \leq \frac{5}{2}\pi$, $N \geq 0$, $v > 0$, czyli gdy

$$
\begin{aligned}
0 \leq \alpha &\leq \frac{5}{2}\pi, && (30) \\
\sin\alpha + \Omega^2 &\geq 0, && (31) \\
\Omega &> 0. && (32)
\end{aligned}
$$

Układ równań (28), (29) należy rozwiązać numerycznie uwzględniając, że w chwili początkowej $\Omega = \frac{v_1}{\sqrt{Rg}} = \sqrt{2\left(\frac{h}{R} - 1\right)}$, $\alpha = 0$. Ten cel można osiągnąć przekształcając go do układu równań różnicowych, w najprostszej wersji następującego

$$
\begin{aligned}
\alpha(\tau + \Delta\tau) &= \alpha(\tau) + \Omega(\tau) \cdot \Delta\tau, && (33) \\
\Omega(\tau + \Delta\tau) &= \Omega(\tau) + \left[\cos\alpha(\tau) - \mu\left(\sin\alpha(\tau) + \Omega(\tau)^2\right)\right] \cdot \Delta\tau. && (34)
\end{aligned}
$$

Powyższy układ równań oznacza, że w trakcie ruchu w czasie od τ do $\tau + \Delta\tau$ przyjmujemy, że wartości prędkości oraz siły są stałe i równe tym w chwili τ. Nieco dokładniejsze jest rozważanie następującego układu równań różnicowych

$$
\begin{aligned}
\alpha(\tau + \Delta\tau/2) &= \alpha(\tau) + \Omega(\tau) \cdot \Delta\tau/2, && (35) \\
\Omega(\tau + \Delta\tau) &= \Omega(\tau) + \left[\cos\alpha(\tau + \Delta\tau/2) - \mu\left(\sin\alpha(\tau + \Delta\tau/2) + \Omega(\tau)^2\right)\right] \cdot \Delta\tau, && (36) \\
\alpha(\tau + \Delta\tau) &= \alpha(\tau + \Delta\tau/2) + \Omega(\tau + \Delta\tau) \cdot \Delta\tau/2. && (37)
\end{aligned}
$$

Jeśli znamy α oraz Ω w chwili τ, możemy korzystając z powyższych równań wyznaczyć te wielkości w chwili $\tau + \Delta\tau$, i powtarzając (iterując) tę procedurę – w kolejnych chwilach czasu. Dokładność wyznaczonego ruchu jest tym większa, im mniejsza jest wartość $\Delta\tau$, jednak wtedy należy wykonać więcej kroków.

Aby klocek pokonał całą pętlę, muszą być spełnione warunki (31), (32) aż do momentu, gdy $\alpha \geq \frac{5}{2}\pi$. Zauważmy jednocześnie, że jeśli $\mu > 0$, to dla $\frac{h}{R} \leq 2$ klocek z pewnością nie pokona całej pętli (ze względu na straty energii nie będzie mógł osiągnąć najwyższego punktu pętli).

Metoda postępowania może być zatem następująca:

-1. Ustalamy krok czasowy $\Delta\tau$ oraz parametr p określający względny wzrost $\frac{h}{R}$ w trakcie szukania $\frac{H}{R}$ (patrz poniżej)

0. Przyjmujemy $\mu = 0$ oraz $\frac{h}{R} = 2$.

1. Dla danego μ oraz zaczynając od $\Omega(\tau = 0) = \sqrt{2\left(\frac{h}{R} - 1\right)}$, $\alpha(\tau = 0) = 0$ rozwiązujemy iteracyjnie układ (35), (36), (37) sprawdzając po każdym kroku spełnienie warunków (31), (32). Iteracje kontynuujemy do momentu gdy A. (31) lub (32) przestaną być spełnione, lub B. $\alpha \geq \frac{5}{2}\pi$.

2. Jeśli iteracje w punkcie 1. zostaną przerwane z powodu A., to zwiększamy p razy $\frac{h}{R}$ i wracamy do punktu 1.

3. Jeśli iteracje w punkcie 1. zostaną przerwane z powodu B., to przyjmujemy wstępnie, że (dla bieżącego μ) szukane $\frac{H}{R} = \sqrt{\frac{h_1}{R} \cdot \frac{h_2}{R}} = \frac{h_2}{R}/\sqrt{p}$ z niepewnością względną określoną przez $\sqrt{p} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$, gdzie h_2 jest minimalną znalezioną przez nas wysokością, dla której pętla została pokonana, a h_1 – maksymalną wysokością, dla której pętla nie została pokonana. Można też wstępnie przyjąć $\frac{H}{R} = \left(\frac{h_1}{R} + \frac{h_2}{R}\right)/2 \pm \left(\frac{h_2}{R} - \frac{h_1}{R}\right)/2$ Ten wynik musi zostać jeszcze zweryfikowany – patrz *Wybór kroku czasowego oraz ocena dokładności* poniżej

4. Przyjmujemy na μ następną (w kolejności rosnącej) wartość spośród podanych w treści zadania, zwiększamy p razy $\frac{h}{R}$ i wracamy do punktu 1.

5. Wszystkie iteracje kończymy, gdy znajdziemy poszukiwane $\frac{H}{R}$ dla wszystkich podanych w treści zadania μ.

Powyższy algorytm łatwo jest zaimplementować stosując np. języki programowania C++, Pascal, a nawet Logo (na stronie KGOF znajdują się odpowiednie programy napisane w C++ oraz Logo oraz arkusz kalkulacyjny). Dzięki szybkości działania współczesnych komputerów można osiągnąć rozsądną dokładność bez konieczności stosowania bardziej wyrafinowanych algorytmów.

Wybór kroku czasowego oraz ocena dokładności

Początkowo przyjęto $p = 1,06$ oraz $\Delta\tau = 0,001$. Taka wartość p oznacza, że dokładność wyznaczenia $\frac{H}{R}$ nie może być większa niż ok. 3%. Aby sprawdzić, że krok czasowy jest wystarczająco mały, uruchomiono program ponownie z $\Delta\tau = 0,0005$ oraz $\Delta\tau = 0,0002$. Ponieważ we wszystkich przypadkach dla danego μ otrzymano dokładnie te same wyniki, przyjęto, że nie ma potrzeby dalszego zmniejszania $\Delta\tau$. Otrzymane wyniki są następujące:

μ	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
$\frac{H}{R}$	2,45	3,48	4,93	7,00	9,93	14,1	20,0	28,3	42,6	60,5	85,8

(38)

przy czym zgodnie z powyższymi uwagami niepewność wyznaczenia $\frac{H}{R}$ wynosi 3%.

Uwagi:

1. Dla $\mu = 0$ nasze zagadnienie można rozwiązać analitycznie. Z zasady zachowania energii w najwyższym punkcie pętli mamy $\Omega = \sqrt{2\left(\frac{h}{R} - 2\right)}$. Warunek (31) prowadzi w tym punkcie do (zauważmy, że $\alpha = \frac{3}{2}\pi$) $\Omega^2 \geq 1$, czyli $\frac{H}{R} = \frac{5}{2}$. Oznacza to, że numeryczne poszukiwanie rozwiązania można było zacząć od $h = 2{,}5$ i $\mu = 0{,}05$. Jednak otrzymanie w sposób numeryczny wyniku $h \approx 2{,}5$ dla $\mu = 0$ możemy potraktować jako wstępne sprawdzenie wybranej metody oraz wybranego parametru $\Delta\tau$.

2. Stosując metody wykraczające poza zakres szkolny metody rozwiązywania równań różniczkowych zagadnienie można rozwiązać analitycznie również dla $\mu \neq 0$. Ścisły wynik to

$$\frac{h}{R} = 1 + \frac{3}{2}\frac{2\mu + e^{3\pi\mu}}{1 + 4\mu^2} \tag{39}$$

co daje

μ	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
$\frac{H}{R}$	2,5000	3,5276	4,9899	7,0704	10,033	14,260	20,303	28,965	41,405	59,332	85,238

(40)

Zauważmy, że w rozpatrywanym zakresie współczynników tarcia, wzrost μ o 0,1 prowadzi do około dwukrotnego wzrostu $\frac{H}{R}$.

3. W przypadku wykorzystania arkusza kalkulacyjnego przedstawiona powyżej metoda jest niezbyt wygodna – lepiej stosować bardziej zaawansowane algorytmy znajdowania $\frac{H}{R}$, np. metodę bisekcji (patrz np. w Wikipedii hasło "Metoda równego podziału"). Patrz też uwagi w arkuszu kalkulacyjnym dostępnym na stronie internetowej KGOF.

4. Wprowadzenie zmiennych bezwymiarowych pozwala na zmniejszenie liczby parametrów oraz na łatwiejsze szacowanie, jakie wielkości występujace w równaniu są "małe", a jakie "duże", nie jest jednak niezbędne do rozwiązania numerycznego. W rozważanym zagadnieniu jest to równoważne stosowaniu układu jednostek, w którym wartości liczbowe R oraz g wynoszą 1.