LXIII OLIMPIADA FIZYCZNA

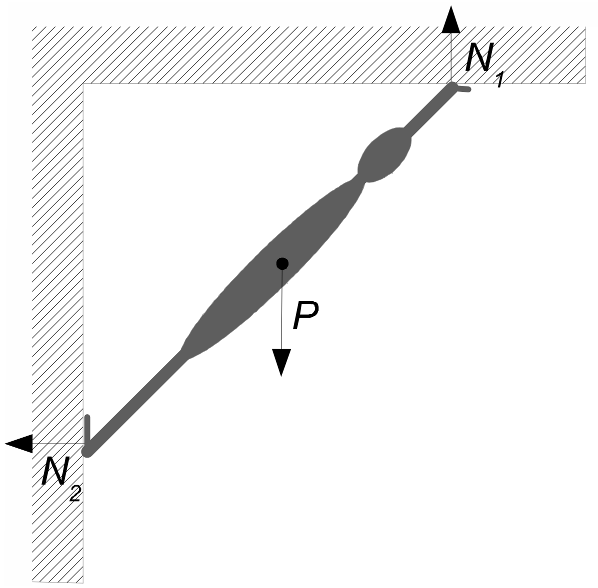
ZAWODY II STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

Zadanie 1.

Pewien akrobata potrafi utrzymać się dotykając rękoma sufitu, a nogami ściany, przy czym kąt, jaki tworzy on z pionem, wynosi 45^o. Współczynniki tarcia rąk o sufit oraz nóg o ścianę są sobie równe i wynoszą μ. Wyznacz minimalną siłę N_2, z jaką akrobata musi naciskać na ścianę (składową prostopadłą do ściany), oraz odpowiadającą jej siłę N_1, z jaką musi on naciskać na sufit (składową prostopadłą do sufitu).



Rys. 1. : Schematyczny rysunek akrobaty utrzymującego się między ścianą a sufitem.

Sufit jest poziomy, a ściana – pionowa. Akrobata nie jest zgięty, jego ciężar wynosi P, a środek masy znajduje się dokładnie w połowie odległości między dłońmi a stopami.

Zadanie 2.

Solenoid bez rdzenia ma N zwojów drutu o zerowym oporze nawiniętych na powierzchnię walcową o promieniu r i wysokości l, przy czym $\frac{l}{N} \ll r \ll l$. Końce drutu są zwarte, a w chwili początkowej natężenie prądu w obwodzie było równe I. Rozważ wymienione poniżej, niezależne od siebie sytuacje. W punktach 1 i 2 przyjmij, że drut jest wiotki.

1. Jednakowo na całej długości spłaszczono solenoid (zdeformowano jego przekrój), tak że powierzchnia przekroju zmalała dwukrotnie.

a) Oblicz końcowe natężenie prądu w obwodzie.

b) Oblicz pracę mechaniczną wykonaną podczas tego spłaszczenia solenoidu.

2. Solenoid równomiernie rozciągnięto do długości $2l$ (przy czym obowiązuje warunek $\frac{2l}{N} \ll r$).

a) Oblicz końcowe natężenie prądu w obwodzie.

b) Oblicz pracę mechaniczną wykonaną podczas tego rozciągania.

3. Przyjmijmy, że rozważany solenoid jest sprężyną o stałej sprężystości k. Wyznacz długość swobodną l_0 tej sprężyny wiedząc, że gdy płynie przez nią prąd o natężeniu I i nie działają żadne siły zewnętrzne, to ma ona długość l. Przyjmij, że gęstość zwojów przy ściskaniu i rozciąganiu pozostaje jednorodna.

Zadanie 3.

Stwierdzono, że temperatura wyłączonego czajnika elektrycznego, wypełnionego pewną ustaloną ilością wody, zmienia się w czasie zgodnie ze wzorem:

$$T(t) = (T_P - T_O)\, e^{-\alpha t} + T_O,$$

gdzie T_P jest temperaturą w chwili $t = 0$, T_O – temperaturą otoczenia, α – stałą, natomiast e – podstawą logarytmów naturalnych ($e \approx 2{,}718$).

Gdy włączono czajnik, okazało się, że energia elektryczna potrzebna do osiągnięcia przez czajnik temperatury T_K począwszy od temperatury otoczenia T_O wynosiła E_1. Moc grzałki w tym przypadku wynosiła P_1.

W wyniku zmiany napięcia zasilającego moc grzałki spadła do P_2. Ile wynosi w tej sytuacji energia elektryczna potrzebna do osiągnięcia przez czajnik temperatury T_K począwszy od temperatury otoczenia T_O ?

Podaj wyniki liczbowe dla $T_O = 20^o$C, $T_K = 100^o$C, $P_1 = 500$ W, $E_1 = 250000$ J, $\alpha = 0,001$ 1/s, oraz dwóch wartości P_2: a) $P_2 = 300$ W, b) $P_2 = 200$ W.

Przyjmij, że pojemność cieplna czajnika z wodą, czyli ilość ciepła niezbędna do zmiany jego temperatury o jeden stopień, jest stała, a w danej chwili każda część czajnika oraz woda mają taką samą temperaturę. Grzałka jest umieszczona wewnątrz czajnika tak, że cała dostarczona do niej energia jest przekazywana czajnikowi i wodzie. Ilość wody w czajniku jest taka sama we wszystkich rozważanych sytuacjach.

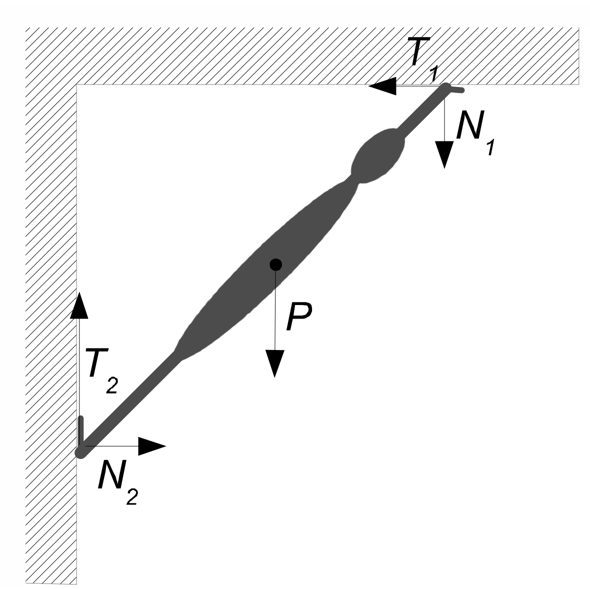
Uwaga: dla małych x

$$e^x \approx 1 + x.$$

Rozwiązanie zadania 1.

Niech siła tarcia rąk o sufit wynosi T_1, siła tarcia stóp o ścianę – T_2.

Warunki równowagi są następujące (patrz. Rys. 2. – zaznaczono na nim siły działające na akrobatę):



Rys. 2.: Siły działające na akrobatę.

$$\begin{array}{ll} \text{w pionie:} & P = T_2 - N_1, \\ \text{w poziomie:} & T_1 = N_2, \\ \text{równowaga momentów sił:} & (T_2 + N_1)\,\frac{l}{2\sqrt{2}} = (T_1 + N_2)\,\frac{l}{2\sqrt{2}}, \end{array} \tag{1}$$

gdzie l jest długością akrobaty od dłoni do stóp.

Ponieważ siły nacisku nie mogą być ujemne, a $P > 0$, z pierwszych dwóch z powyższych równań wynika, że również $T_1 \geq 0$, $T_2 \geq 0$.

Dodatkowo muszą być spełnione warunki wynikające z definicji współczynnika tarcia

$$T_1 \leq \mu N_1, \tag{2}$$

$$T_2 \leq \mu N_2. \tag{3}$$

Oczekujemy, że minimalne N_2 odpowiada skrajnemu przypadkowi, tzn. $T_1 = \mu N_1$ lub $T_2 = \mu N_2$. Odpowiada to oczekiwaniu, że zwiększenie μ powoduje zmniejszenie minimalnego N_2. Przyjmiemy takie założenie i sprawdzimy, że jest ono spełnione na podstawie końcowych wyników.

Zakładając, że w skrajnym przypadku $T_2 = \mu N_2$, otrzymamy

$$N_2 = \frac{P}{2\,(\mu - 1)} = T_1,\ N_1 = \frac{2 - \mu}{2\,(\mu - 1)}P,\ T_2 = \frac{\mu P}{2\,(\mu - 1)}. \tag{4}$$

Warunek $0 \leq T_1 \leq \mu N_1$ w połączeniu z powyższym daje $0 \leq \frac{P}{2(\mu-1)} \leq \mu\frac{2-\mu}{2(\mu-1)}P$, czyli $\mu - 1 > 0$ oraz $1 \leq (2 - \mu)\,\mu$. Ten warunek nie może być spełniony – maksymalna wartość $(2 - \mu)\,\mu$ to 1 i jest osiągana dla $\mu = 1$. Zatem założenie, że w skrajnym przypadku $T_2 = \mu N_2$ nie może być spełnione.

Zakładając, że w skrajnym przypadku $T_1 = \mu N_1$ otrzymamy

$$N_1 = \frac{P}{2\,(\mu - 1)},\ T_1 = \frac{\mu P}{2\,(\mu - 1)} = N_2,\ T_2 = \frac{2\mu - 1}{2\,(\mu - 1)}P. \tag{5}$$

Warunek $0 \leq T_2 \leq \mu N_2$ w połączeniu z powyższym daje $0 \leq \frac{2\mu-1}{2(\mu-1)}P \leq \mu^2\frac{P}{2(\mu-1)}$ czyli $\mu - 1 > 0$ oraz $2\mu{-}1 \leq \mu^2$. Warunek $2\mu{-}1 \leq \mu^2$ jest spełniony zawsze, zatem nasze zagadnienie ma rozwiązanie jeśli $\mu > 1$ – działające siły są wtedy dane wzorami (5). Zauważmy, że $N_2 = \frac{\mu P}{2(\mu-1)} = \frac{P}{2}\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)$ jest (dla $\mu > 1$) malejącą funkcją μ, czyli jest spełnione założenie, że minimalne N_2 odpowiada skrajnemu przypadkowi z (2), (3).

Zatem ostatecznie

$$N_1 = \frac{P}{2(\mu-1)},\ N_2 = \frac{\mu P}{2(\mu-1)}, \tag{6}$$

przy czym, aby sytuacja opisana w zadaniu była możliwa, μ musi być większe od 1.

Punktacja zadania 1.

Warunki równowagi sił i momentów sił (wzory (1) lub równoważne) – 3 pkt.

Przyjęcie, że minimalne N_2 odpowiada jednemu ze skrajnych przypadków $T_1 = \mu N_1$ lub $T_2 = \mu N_2$ (punkt nie przysługuje za zapis, z którego wynika żądanie spełnienia obu warunków jednocześnie) – 1 pkt.

Siły nacisku przy założeniu $T_2 = \mu N_2$ (wzory (4)) lub argumentacja pozwalająca na odrzucenie tego przypadku) – 2 pkt.

Siły nacisku przy założeniu $T_1 = \mu N_1$ (wzory (5)) – 2 pkt.

Wybór właściwego rozwiązania z uzasadnieniem (wzory (6)) – 2 pkt.

Rozwiązanie zadania 2.

Zgodnie z prawem Faradaya siła elektromotoryczna indukowana w obwodzie wynosi $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$, gdzie Φ jest strumieniem pola B. Jeśli opór drutu jest bardzo mały, to ta siła elektromotoryczna spowoduje przepływ bardzo dużego prądu. Taki prąd będzie wytwarzał pole magnetyczne przeciwstawiające się zmianie Φ. W granicy oporu dążącego do zera wytworzone pole magnetyczne może być dowolnie duże, czyli w tej granicy strumień pola B przechodzący przez powierzchnię ograniczoną drutem nie może się zmieniać. Zatem przy opisywanych w zadaniu deformacjach solenoidu natężenie prądu zmieni się tak, by strumień pozostał stały.

Z prawa Ampère'a wynika, że wewnątrz solenoidu (ponieważ jest to standardowy wzór szkolny, nie przedstawiamy jego wyprowadzenia)

$$B = \mu_0 I \frac{N}{l}, \tag{7}$$

gdzie μ_0 jest przenikalnością magnetyczną próżni.

To pole jest równoległe do solenoidu, a jego wartość jest taka sama w każdym punkcie przekroju i nie zależy od kształtu tego przekroju. Mamy zatem

$$\Phi = BS, \tag{8}$$

gdzie S jest polem przekroju poprzecznego solenoidu.

1a) Ponieważ S zmalało dwukrotnie, a $\Phi = \text{const}$, zatem indukcja B musiała dwukrotnie wzrosnąć. Z wzoru $B = \mu_0 IN/l$ wynika, że natężenie prądu wzrosło dwukrotnie.

1 b) Początkowa energia pola magnetycznego wynosiła $E_m = \frac{1}{2\mu_0}B^2 \cdot \pi r^2 l$ (gęstość energii pola pomnożona przez objętość zawartą wewnątrz solenoidu; można również oprzeć się na wzorze $E_m = LI^2/2$). Dwukrotny wzrost B oznacza czterokrotny wzrost gęstości energii, a po pomnożeniu przez dwukrotnie mniejszą objętość otrzymujemy podwojenie energii pola. Wykonana praca jest więc równa początkowej energii:

$$W = E_m = \frac{\mu_0 \pi}{2l} N^2 r^2 I^2 \tag{9}$$

2a) Warunek $\frac{2l}{N} \ll r$ oznacza, że wydłużenie solenoidu nie pociągnie za sobą zmniejszenia r, więc skoro $\Phi = \text{const}$, to i $B = \text{const}$. Na podstawie wzoru $B = \mu_0 IN/l$ wnioskujemy, że w tym przypadku również nastąpi dwukrotny wzrost natężenia prądu.

2b) Wykonana praca jest równa różnicy końcowej i początkowej energii pola magnetycznego

$$W = \frac{\mu_0 \pi}{2 \cdot 2l} N^2 r^2 (2I)^2 - \frac{\mu_0 \pi}{2l} N^2 r^2 I^2 = \frac{\mu_0 \pi}{2l} N^2 r^2 I^2. \tag{10}$$

Jest to taki sam wynik jak w pkt. 1 b).

3. Zgodnie z pkt. 2 energia pola magnetycznego sprężyny o długości l_x wynosi

$$E_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \cdot \pi r^2 l_x, \tag{11}$$

przy czym $B = \mu_0 IN/l$ jest stałe. Całkowita energia

$$E_c = E_m + \frac{1}{2} k \left(l_x - l_0\right)^2 = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \cdot \pi r^2 l_x + \frac{1}{2} k \left(l_x - l_0\right)^2 \tag{12}$$

jest minimalna w stanie równowagi, czyli dla $l_x = l$. Korzystając ze wzoru na minimum funkcji kwadratowej otrzymamy

$$l = l_0 - \frac{1}{k} \frac{1}{2\mu_0} B^2 \cdot \pi r^2.$$

Stąd

$$l_0 = l + \frac{1}{k} \frac{1}{2\mu_0} B^2 \cdot \pi r^2 = l + \frac{1}{k} \frac{\mu_0}{2} \frac{N^2}{l^2} \pi r^2 I^2. \tag{13}$$

Przepływ prądu powoduje więc takie skrócenie sprężyny, jakby działała na nią siła ściskająca $F = \frac{\mu_0}{2} \frac{N^2}{l^2} \pi r^2 I^2$.

Punktacja zadania 2.

Warunek $\Phi = \mathrm{const}$ wraz z uzasadnieniem – 2 pkt.
Wzory (7) oraz (8) – 1 pkt.
Dwukrotny wzrost natężenia prądu w przypadku 1. – 1 pkt.
Wykonana praca w przypadku 1. (wzór (9)) – 1 pkt.
Dwukrotny wzrost natężenia prądu w przypadku 2. – 1 pkt.
Wykonana praca w przypadku 2. (wzór (10)) – 1 pkt.
Energia całkowita w przypadku 3. (wzór (12)) – 1 pkt.
Długość swobodna sprężyny (wzór (13)) – 2 pkt.

Rozwiązanie zadania 3.

Gdy grzałka jest wyłączona, zmiana temperatury czajnika od chwili t do chwili $t + \Delta t$ jest dla małych Δt równa

$$\Delta T = \left(T_P - T_O\right) e^{-\alpha t - \alpha \Delta t} - \left(T_P - T_O\right) e^{-\alpha t} = \left(e^{-\alpha \Delta t} - 1\right) \left(T_P - T_O\right) e^{-\alpha t} = -\alpha \Delta t \left(T_P - T_O\right) e^{-\alpha t}. \tag{14}$$

Oznacza to, że szybkość, z jaką czajnik o temperaturze T oddaje ciepło otoczeniu (lub pobiera, jeśli $T < T_O$), wynosi

$$C \frac{\Delta T}{\Delta t} = -C\alpha \left(T_P - T_O\right) e^{-\alpha t} = -C\alpha \left(T - T_O\right), \tag{15}$$

gdzie C jest pojemnością cieplną czajnika z wodą.

Gdy jest włączona grzałka o mocy P, szybkość dopływu energii do czajnika o temperaturze T wynosi w sumie $-C\alpha \left(T - T_O\right) + P$, zatem równanie na szybkość zmian temperatury czajnika przyjmie postać

$$C \frac{\Delta T}{\Delta t} = -C\alpha \left(T - T_O\right) + P. \tag{16}$$

Z matematycznego punktu widzenia jest to takie samo równanie, jak równanie $C\frac{\Delta T}{\Delta t} = -C\alpha \left(T - T_O\right)$, pod warunkiem zamiany stałej T_O na $T_O + \frac{P}{\alpha C}$. Zatem gdy grzałka jest włączona, zależność temperatury czajnika z wodą od czasu jest opisana wzorem

$$T(t) = \left(T_P - T_O - \frac{P}{\alpha C}\right) e^{-\alpha t} + T_O + \frac{P}{\alpha C}. \tag{17}$$

W przypadku $T_P = T_O$ ten wzór sprowadza się do

$$T(t) = -\frac{P}{\alpha C} e^{-\alpha t} + T_O + \frac{P}{\alpha C}. \tag{18}$$

Jeśli grzałka oddała energię E_1, to czas jej pracy wynosił $t_1 = E_1/P_1$, co daje następujący związek między E_1 i T_K:

$$T_K = -\frac{P_1}{\alpha C} e^{-\alpha \frac{E_1}{P_1}} + T_O + \frac{P_1}{\alpha C}. \tag{19}$$

Stąd możemy wyznaczyć C

$$C = \frac{1 - e^{-\alpha \frac{E_1}{P_1}}}{T_K - T_O} \frac{P_1}{\alpha}. \tag{20}$$

Zauważmy, że dla małych $\alpha \frac{E_1}{P_1}$ otrzymalibyśmy po prostu $C = E_1/\left(T_K - T_O\right)$.

Jeśli moc grzałki wynosi P_2, należy we wzorze (19) zamienić P_1 na P_2 a E_1 na E_2

$$T_K = -\frac{P_2}{\alpha C} e^{-\alpha \frac{E_2}{P_2}} + \frac{P_2}{\alpha C} + T_O. \tag{21}$$

Stąd możemy wyznaczyć E_2

$$E_2 = -\frac{P_2}{\alpha} \ln \left[1 + \left(T_O - T_K\right) \frac{\alpha C}{P_2}\right] \tag{22}$$

$$= -\frac{P_2}{\alpha} \ln \left[1 - \left(1 - e^{-\alpha \frac{E_1}{P_1}}\right) \frac{P_1}{P_2}\right]. \tag{23}$$

Zauważmy, że dla $P_1 = P_2$ otrzymamy $E_1 = E_2$. Taki wynik otrzymamy również gdy $\alpha \frac{E_1}{P_1} \ll 1$ oraz $\alpha \frac{E_1}{P_2} \ll 1$ – odpowiada to pominięciu strat energii. Zauważmy również, że nie można wyznaczyć E_2, gdy $1 - \left(1 - e^{-\alpha \frac{E_1}{P_1}}\right) \frac{P_1}{P_2} \leq 0$, co odpowiada $T_K - T_O > P_2/\left(\alpha C\right)$ – grzałka o mocy P_2 nie jest w stanie doprowadzić czajnika do temperatury T_K.

Podstawiając dane liczbowe otrzymamy:

$$E_2 \approx 3,2 \cdot 10^5 \text{ J, dla } P_2 = 300 \text{ W}, \tag{24}$$

$$E_2 \approx 8,2 \cdot 10^5 \text{ J, dla } P_2 = 200 \text{ W}. \tag{25}$$

Punktacja zadania 3.

Równanie na szybkość zmian temperatury (bilansu cieplnego) (wzór (16)) wraz z uzasadnieniem – 3 pkt.

Zależność temperatury od czasu przy włączonej grzałce (wzór (18)) – 2 pkt.

Pojemność cieplna (wzór (20) lub równoważny) – 1 pkt.

Energia zużyta w przypadku grzałki o mocy P_2 (wzór (23) lub równoważny) – 2 pkt.

Dyskusja otrzymanego wyniku (zauważenie, że dla $T_K - T_O > P_2/\left(\alpha C\right)$ otrzymanie temperatury końcowej nie jest możliwe) – 1 pkt.

Wyniki liczbowe (wzory (24) oraz (25)) – 1 pkt.