LXIII OLIMPIADA FIZYCZNA

ZAWODY III STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Za każde z trzech zadań można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

Zadanie 1.

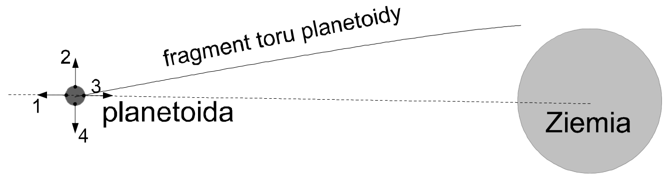
Zaobserwowano zbliżającą się do Ziemi kulistą planetoidę o średnicy $D = 10$ km i masie $M = 10^{15}$ kg. Według obliczeń nieuwzględniających oporów ruchu w atmosferze ziemskiej najmniejsza odległość od środka planetoidy do środka Ziemi wyniosłaby $r_1 = 6400$ km, a największa względna prędkość $v_1 = 20$ km/s. Aby zmniejszyć zagrożenie, wystrzelono w kierunku planetoidy rakiety z ładunkami termojądrowymi. Głowice rakiet mają się wbić na pewną głębokość w powierzchnię planetoidy, a następnie równocześnie wybuchnąć. W wyniku tego grunt ponad głowicami ma się zamienić w drobne odłamki oddalające się z dużą prędkością od planetoidy, a pozostała jej część nie rozpadnie się. Całkowita energia wybuchu ładunków termojądrowych wynosi $E_w = 4 \cdot 10^{18}$ J = 1000 Mt (megaton) trotylu. Szacuje się, że masa odłamków wyniesie $m = 10^{14}$ kg oraz że w układzie środka masy planetoidy uzyskają one całkowity pęd $p = \sqrt{x \cdot 2mE_w}$, gdzie $x = 0{,}2$, skierowany prostopadle do powierzchni planetoidy. Rakiety mogą dotrzeć do planetoidy najwcześniej, gdy będzie ona w odległości $d = 200000$ km od Ziemi.

a) Rozważano cztery miejsca na planetoidzie (patrz Rys. 1.), w których ładunki powinny wybuchnąć, oraz trzy różne chwile, w których to powinno nastąpić: jak najwcześniej, tzn. w jak największej odległości od Ziemi, jak najpóźniej, tzn. tuż przed osiągnięciem minimalnej odległości od Ziemi, oraz gdy planetoida będzie w odległości ok. 12 tys. km od środka Ziemi. Który z tych wariantów spowoduje, że planetoida ominie Ziemię w największej odległości?

b) O ile wzrośnie najmniejsza odległość środka Ziemi od planetoidy w wyniku tej akcji?

Pomiń wpływ Słońca, Księżyca i innych ciał niebieskich.

Stała grawitacyjna $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2}$, masa Ziemi $M_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg, promień Ziemi $r_Z = 6370$ km.

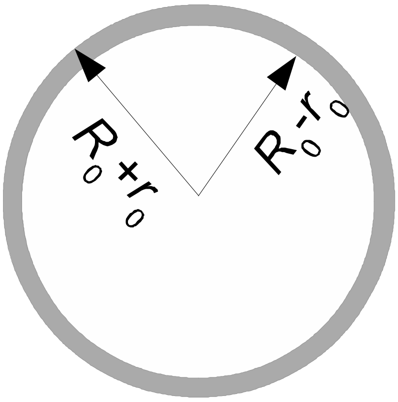


Rys. 1. Strzałki wskazują kierunek średniej prędkość odłamków względem planetoidy, a ich początki to rozważane miejsca wybuchu. Strzałki 1 i 3 są równoległe do osi środek planetoidy–środek Ziemi, strzałki 2 i 4 są prostopadłe do tej osi.

Zadania 2. i 3. na str. 2.

Zadanie 2.

Dętka rowerowa przy minimalnym napompowaniu, takim że ciśnienie wewnętrzne jest równe zewnętrznemu, tworzy torus o promieniach R_0 oraz r_0 ($R_0 > r_0$) – patrz Rys. 2.



Rys. 2.

Względne rozciągnięcie $\Delta l/l_0$ powierzchni gumy dętki w dowolnie wybranym kierunku oznaczonym przez $||$ zależy od naprężenia w tym kierunku $\sigma_{||}$ oraz od naprężenia w kierunku prostopadłym $\sigma_{\perp}$ zgodnie ze wzorem

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \alpha\sigma_{||} - \beta\sigma_{\perp},$$

gdzie $\alpha > 2\beta > 0$.

Dętkę napompowano tak, że ciśnienie w jej wnętrzu przekracza ciśnienie atmosferyczne o p_1. Wyznacz promienie R oraz r torusa, jaki tworzy ta dętka po takim napompowaniu.

Podaj wyniki liczbowe na R i r oraz $\frac{R-R_0}{R}$ i $\frac{r-r_0}{r_0}$ dla $r_0 = 0{,}013$ m, $R_0 = 0{,}3$ m, $\alpha = 5{,}0 \cdot 10^{-5}$ m/N, $\beta = 0{,}49 \cdot \alpha$, $p_1 = 2{,}0 \cdot 10^5$ Pa. Przyjmij, że $R \gg r$, tzn. że lokalnie dętkę można traktować jak powierzchnię boczną walca.

Naprężenie w rozważanym zagadnieniu to siła na jednostkę długości, jaka dąży do odsunięcia od siebie dwóch fragmentów gumy wydzielonych przez odcinek prostopadły do tej siły. W szczególności jeśli rozciągniemy prostokątny kawałek gumy do rozmiarów $l_x \times l_y$ i siła rozciągająca w kierunku x wynosi F_x, a siła rozciągająca w kierunku y wynosi F_y, to naprężenie w kierunku x jest równe F_x/l_y, natomiast naprężenie w kierunku y jest równe F_y/l_x.

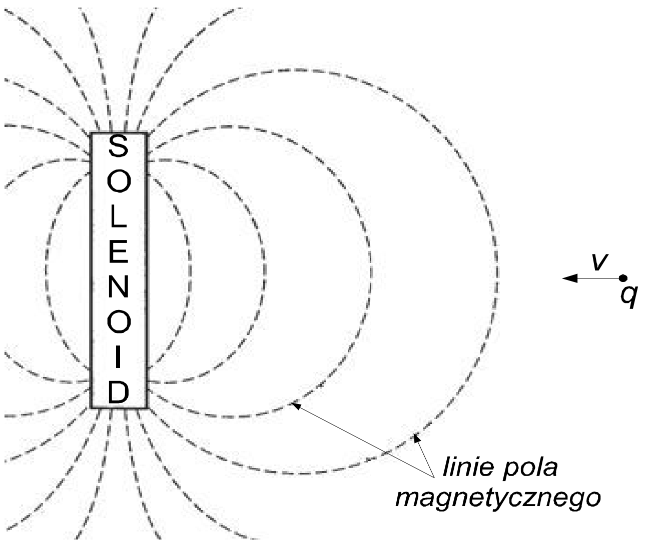
Zadanie 3.

Rozważmy gęsto nawiniętą cewkę (solenoid) o N zwojach, długości L i promieniu $R \ll L$. Zbliża się do niej cząstka o masie m i ładunku q. Prędkość cząstki w dużej ($\gg L$) odległości od cewki wynosi v, jest prostopadła do osi cewki i skierowana do jej środka symetrii.

Jakie jest najmniejsze natężenie I prądu płynącego przez cewkę, przy którym cząstka nie wpadnie do jej wnętrza?

Pomiń pole magnetyczne pochodzące od prądu płynącego w przewodach łączących źródło zasilania z cewką. Cewka jest tak nawinięta, że wzdłuż jej osi nie płynie prąd.

Podaj liczbową wartość I dla $N = 10000$, $R = 1$ cm, $L = 1$ m, $m = 1{,}7 \cdot 10^{-27}$ kg, $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, $v = 100$ m/s. Przenikalność magnetyczna próżni: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A^2.



Rys. 3. Schematyczny rysunek odpowiadający sytuacji z zad. 3.

Rozwiązanie zadania 1.

Wyznaczenie zmiany prędkości planetoidy.

Zgodnie z treścią zadania prędkość środka masy odłamków wyniesie

$$v_{\mathrm{od}} = \frac{p}{m} = \sqrt{0{,}2\frac{2E_w}{m}} = 126\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

To z zasady zachowania pędu oznacza, że pozostała część planetoidy uzyska dodatkową prędkość

$$V = \frac{mv_{\mathrm{od}}}{M-m} = \frac{p}{M-m} = 14\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{1}$$

W trakcie ruchu planetoidy obowiązują zasady zachowania energii mechanicznej oraz momentu pędu

$$E_c = \frac{M}{2}\left(v_\perp^2 + v_r^2\right) - \frac{GM_ZM}{r}, \tag{2}$$

$$J = Mrv_\perp. \tag{3}$$

gdzie v_r, $v_\perp$ są odpowiednio radialną oraz prostopadłą do promienia wodzącego $\vec{r}$ składowymi prędkości środka masy planetoidy w układzie inercjalnym z Ziemią w środku.

W punkcie najbliższym Ziemi $r = r_{\mathrm{min}}$ mamy $v_r = 0$, co pozwala na wyeliminowanie $v_\perp$ z powyższych równań i wyznaczenie r_{min}

$$r_{\mathrm{min}} = \frac{j^2}{GM_Z + \sqrt{2\cdot e_c\cdot j^2 + (GM_Z)^2}}, \tag{4}$$

gdzie oznaczyliśmy $j = J/M$, $e_c = E/M$ i wybraliśmy mniejszy dodatni pierwiastek równania kwadratowego. Zauważmy, że r_{min} jest rosnącą funkcją j i malejącą funkcją e_c.

Gdyby nie zmieniano prędkości planetoidy, mielibyśmy

$$e_c = \frac{v_1^2}{2} - \frac{GM_Z}{r_1},\ j = r_1v_1. \tag{5}$$

Z zasady zachowania energii prędkość planetoidy w odległości d od środka Ziemi, przed wybuchem, wynosi $v_d = \sqrt{2\left(e_c - \frac{GM_Z}{d}\right)} \approx 16$ km/s. W wyniku wybuchu kwadrat prędkości planetoidy, a tym samym $2\cdot e_c$ zmieni się o $2\Delta e_c = 2vV\cos\alpha + V^2$, gdzie v jest prędkością planetoidy w chwili wybuchu, a α – kątem między $\vec{V}$ a $\vec{v}$. Zatem $\Delta e_c/e_c$ może być co najwyżej równe $2V/v_d \approx 1,8\cdot 10^{-3}$. Z drugiej strony zmiana j wyniesie $\Delta j = Vr\sin\beta$, gdzie β jest kątem między $\vec{V}$ a $\vec{r}$. Zatem $\Delta j/j = rV\sin\beta/(r_1v_1)$ i maksymalna możliwą wartość tego ilorazu osiągniemy dla maksymalnej możliwej wartości r i kąta β zbliżonego do 90° – wyniesie ona $2\cdot 10^{-2}$. Biorąc to oraz wzór na r_{min} pod uwagę, dochodzimy do wniosku, że najlepszym wariantem miejsca wybuchu jest wariant 4 i że powinno to nastąpić jak najdalej od Ziemi. Podstawiając

$$j = r_1v_1 + d\cdot V, \tag{6}$$

i pomijając zmianę e_c, ze wzoru na r_{min} otrzymamy

$$r_{\mathrm{min}} = 6566\ \mathrm{km}, \tag{7}$$

czyli

$$\Delta r_{\mathrm{min}} = 166\ \mathrm{km}. \tag{8}$$

Zauważmy, że fragment rozwiązania odpowiadający wyznaczeniu minimalnej odległości planetoidy od Ziemi jest identyczny z analogiczną cześcią rozwiązania zadania z planetoidą z I stopnia obecnej Olimpiady.

Rozwiązanie zadania 2.

Oznaczmy przez σ_l naprężenie dętki w kierunku powodującym zwiększenie promienia R, natomiast przez σ_p – naprężenie dętki w kierunku powodującym zwiększenie promienia r.

Rozważmy fragment dętki będący zgodnie z treścią zadania w dobrym przybliżeniu powierzchnią boczną walca o długości l i promieniu r. Przetnijmy ten walec płaszczyzną w której leży oś walca. Zgodnie z definicją naprężenia, dwa powstałe z tego przecięcia fragmenty opony przyciągają się siłą $2l\sigma_p$. Z drugiej strony sprężone powietrze odpycha je od siebie siłą $l \cdot 2r \cdot p_1$ ($l \cdot 2r$ jest powierzchnią rozważanego przekroju). Ponieważ rozważamy stan równowagi, mamy $2l\sigma_p = l \cdot 2r \cdot p_1$, co daje

$$\sigma_p = rp_1. \tag{9}$$

Teraz przetnijmy dętkę płaszczyzną, w której leży oś symetrii obrotowej torusa. Zgodnie z definicją naprężenia, dwa powstałe z tego przecięcia fragmenty opony przyciągają się siłą $2 \cdot 2\pi r\sigma_l$ ($2\pi r$ to obwód każdego z dwóch okręgów powstałych w wyniku tego przecięcia). Z drugiej strony sprężone powietrze odpycha je od siebie siłą $2 \cdot \pi r^2 p_1$ (πr^2 to pole każdego z dwóch kolistych przekrojów). Ponieważ rozważamy stan równowagi, mamy $2 \cdot 2\pi r\sigma_l = 2 \cdot \pi r^2 p_1$, co daje

$$2\sigma_l = rp_1. \tag{10}$$

Z drugiej strony, ze wzoru w treści zadania

$$\frac{R - R_0}{R_0} = \alpha\sigma_l - \beta\sigma_p, \quad \frac{r - r_0}{r_0} = \alpha\sigma_p - \beta\sigma_l. \tag{11}$$

Rozwiązując powstały układ równań otrzymamy

$$r = r_0 \frac{1}{1 - \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) p_1 r_0}, \tag{12}$$

$$R = R_0 \left[1 + \frac{\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right) p_1 r_0}{1 - \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) p_1 r_0}\right]. \tag{13}$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymamy

$$r = 0{,}0144 \text{ m}, \quad \frac{r - r_0}{r_0} = 0,11,$$
$$R = 0{,}3004 \text{ m}, \quad \frac{R - R_0}{R} = 0,14 \cdot 10^{-3}.$$

Z otrzymanych wzorów wynika, że p_1 nie może przekroczyć wartości $1/\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)/r_0$ – przy zbliżaniu się p_1 do tej wartości rozmiary dętki stają się nieskończone. Z jednej strony jest to konsekwencją faktu, że naprężenie jest proporcjonalne do rp_1. Nie oznacza, to że w rzeczywistym przypadku wystąpi taka sytuacja – wzór wiążący naprężenie z względnym wydłużeniem jest wzorem przybliżonym, a prócz tego przy pewnych rozmiarach dętki nastąpi jej rozerwanie.

Zauważmy również, że względny wzrost r jest większy niż względny wzrost R. Co więcej dla wartości liczbowych podanych w zadaniu (odpowiadających rzeczywistym parametrom gumy) $\Delta R/R$ jest znacznie mniejsze niż $\Delta r/r$.

Rozwiązanie zadania 3.

Zauważmy, że w płaszczyźnie prostopadłej do osi cewki i przechodzącej przez jej środek pole magnetyczne jest prostopadłe do tej płaszczyzny. Ponieważ początkowo cząstka porusza się w rozważanej płaszczyźnie, wektor siły Lorentza pochodzącej od pola magnetycznego leży w rozważanej płaszczyźnie. Zatem ruch cząstki będzie się odbywał w tej płaszczyźnie.

Jeśli cząstka porusza się z radialną prędkością v_r, to względem osi cewki działa na nią moment siły

$$M = qrv_rB(r). \tag{14}$$

Zmiana momentu pędu w małym czasie Δt wynosi

$$\Delta J = M\Delta t = qB(r)r\Delta r, \tag{15}$$

lub inaczej

$$\Delta J = \frac{q}{2\pi} 2\pi B\left(r\right) r\Delta r = \frac{q}{2\pi}\Delta\Phi_B, \tag{16}$$

gdzie $\Delta\Phi_B$ jest strumieniem pola B przez płaski pierścień o promieniu r i szerokości Δr.

Oznacza to, że

$$J(r) - J(\infty) = \frac{q}{2\pi}\cdot\left(\Phi_B\left(r\right) - \Phi_B\left(\infty\right)\right), \tag{17}$$

gdzie $\Phi_B\left(r\right)$ to strumień pola B przez koło o promieniu r leżące w płaszczyźnie ruchu. Ponieważ prędkość początkowa jest skierowana do środka cewki, mamy

$$J(\infty) = 0. \tag{18}$$

Linie pola magnetycznego są liniami zamkniętymi – wewnątrz cewki biegną z pewnym zwrotem, a na zewnątrz powracają. Dlatego strumień pola przez bardzo duże koło jest bliski zeru:

$$\Phi_B\left(\infty\right) = 0. \tag{19}$$

Czyli na powierzchni cewki

$$J\left(R\right) = \frac{q}{2\pi}\cdot\Phi_B\left(R\right). \tag{20}$$

Z prawa Ampère'a strumień pola B przez wnętrze cewki to

$$\Phi_B\left(R\right) = \mu_0\frac{IN}{L}\pi R^2. \tag{21}$$

W krytycznym przypadku na powierzchni cewki pęd jest prostopadły do promienia. Ponadto moduł pędu pozostaje stały, zatem

$$J\left(R\right) = mvR. \tag{22}$$

Łącząc wszystko:

$$mvR = \frac{q}{2\pi}\cdot\mu_0\frac{IN}{L}\pi R^2. \tag{23}$$

Czyli ostatecznie:

$$I = \frac{2mvL}{\mu_0 qNR}. \tag{24}$$

Dla danych z zadania otrzymamy

$$I \approx 0{,}017\ \mathrm{A}. \tag{25}$$