LXV OLIMPIADA FIZYCZNA

ZAWODY II STOPNIA

CZĘŚĆ DOŚWIADCZALNA

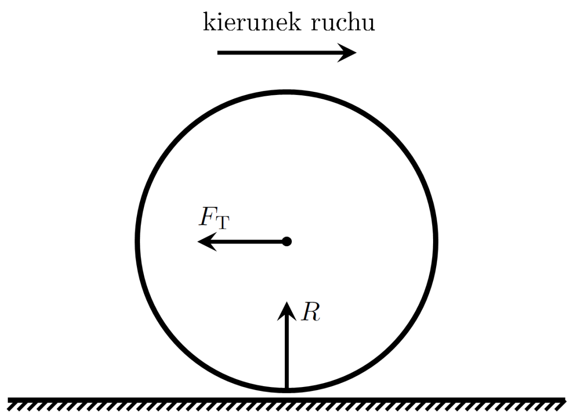
Za zadanie doświadczalne można otrzymać maksymalnie 40 punktów.

Zadanie D.

Kula tocząca się bez poślizgu po płaskiej powierzchni doznaje oporu ruchu związanego z tarciem tocznym (patrz Rys. 1). Ilościowo zjawisko to można opisać jako siłę F_{T} zaczepioną w środku kuli i skierowaną przeciwnie do kierunku jej ruchu, której wartości wynosi:

$$F_{\mathrm{T}} = R\frac{k}{r},$$

gdzie R to siła reakcji podłoża, r to promień kuli, a k to współczynnik tarcia tocznego między kulą a podłożem.



Rys. 1. Schemat sił działających na toczącą się kulę.

Mając do dyspozycji:

- metalową kulkę o sferycznie symetrycznym rozkładzie masy,
- sztywną podłużną deskę pokrytą warstwą gumy,
- kartonowe pudełko,
- kilka kartek papieru milimetrowego,
- kalkę kopiującą,
- plastelinę, taśmę klejącą, nożyczki, papier

wyznacz:

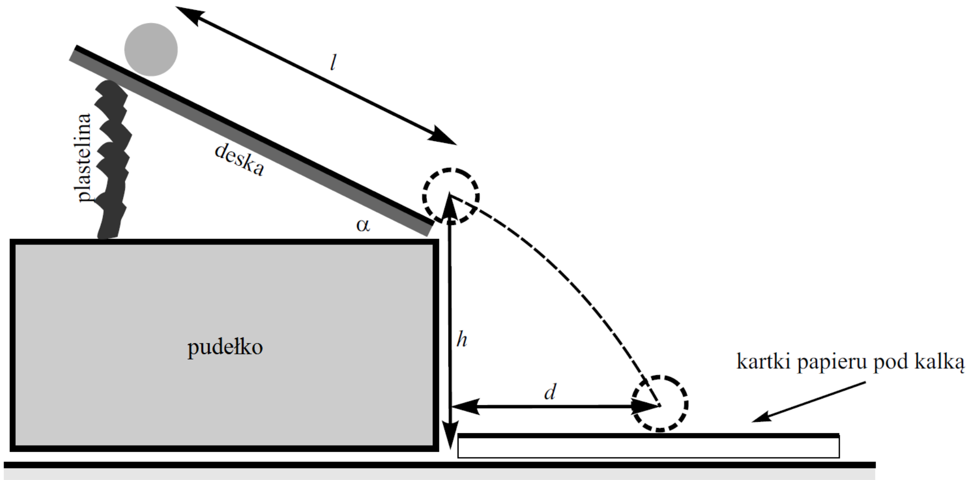
- współczynnik tarcia tocznego k między toczącą się kulką a gumą,
- stosunek $a = I/(mr^2)$, gdzie I to moment bezwładności kulki względem osi przechodzącej przez jej środek, m to masa kulki, a r to jej promień.

Uwaga:
Zwróć uwagę na to, aby w trakcie wykonywania doświadczenia kulka nie spadała ze stołu.

Rozwiązanie zadania D.

Część teoretyczna

Pomysł na rozwiązanie zadania opiera się na pomiarze prędkości, jaką osiąga kulka, staczając się z równi pochyłej, w zależności od nachylenia tej równi. Schemat układu doświadczalnego umożliwiający przeprowadzenie takiego eksperymentu jest pokazany na Rys. 2. Prędkość kulki można zmierzyć, badając odległość d, jaką pokona kulka w rzucie ukośnym po opuszczeniu równi.



Rys. 2. Schemat układu doświadczalnego umożliwiającego pomiar współczynnika tarcia tocznego między toczącą się kulką a gumą.

Jeśli deska stanowiąca równię jest pochylona pod kątem α do poziomu, to przy zaniedbaniu oporów powietrza kulka porusza po niej z przyspieszeniem a_k danym przez:

$$a_k = g\frac{\sin\alpha - \frac{k}{r}\cos\alpha}{1+\frac{I}{mr^2}} = \frac{g}{1+\frac{I}{mr^2}}\left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{k}{r}\right)\cos\alpha. \tag{1}$$

W związku z tym na końcu równi (po przebyciu odległości l) prędkość kulki wynosi

$$v = \sqrt{2a_k l}. \tag{2}$$

Ruch kulki po opuszczeniu równi możemy rozpatrywać jako rzut ukośny z wysokości h, z prędkością początkową v skierowaną pod kątem α do poziomu. Jeśli przez t oznaczymy czas, jaki upływa od momentu opuszczenia równi przez kulkę do uderzenia kulki o podłoże, to mamy:

$$h = vt\sin\alpha + \frac{gt^2}{2}, \tag{3}$$

$$d = vt\cos\alpha. \tag{4}$$

Zatem:

$$h = v\sin\alpha\frac{d}{v\cos\alpha} + \frac{g\left(\frac{d}{v\cos\alpha}\right)^2}{2} = d\operatorname{tg}\alpha + \frac{gd^2}{2v^2\cos^2\alpha}, \tag{5}$$

a stąd otrzymujemy:

$$v^2 = \frac{gd^2}{2\cos^2\alpha}\frac{1}{(h-d\operatorname{tg}\alpha)} \tag{6}$$

Mając wyznaczoną wartość v^2 i korzystając z równań (1) i (2) możemy zapisać:

$$\frac{v^2}{2gl\cos\alpha} = \frac{1}{1+\frac{I}{mr^2}}\left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{k}{r}\right) \tag{7}$$

Widzimy stąd, że wyznaczając prędkość v (mierząc d i korzystając z równania (6)) dla różnych kątów α oraz wykreślając zależność lewej strony równania (7) od $\operatorname{tg}\alpha$, powinniśmy otrzymać prostą postaci $y = p(x-q)$, gdzie $y = \frac{v^2}{2g\cos\alpha}$, $x = \operatorname{tg}\alpha$, $p = \frac{1}{1+\frac{I}{mr^2}}$, a $q = \frac{k}{r}$. Wyznaczając parametry p i q tej prostej, możemy wyznaczyć szukane wielkości na podstawie zależności:

$$\frac{I}{mr^2} = \frac{1}{p} - 1 \tag{8}$$

$$k = q \cdot r \tag{9}$$

Część doświadczalna

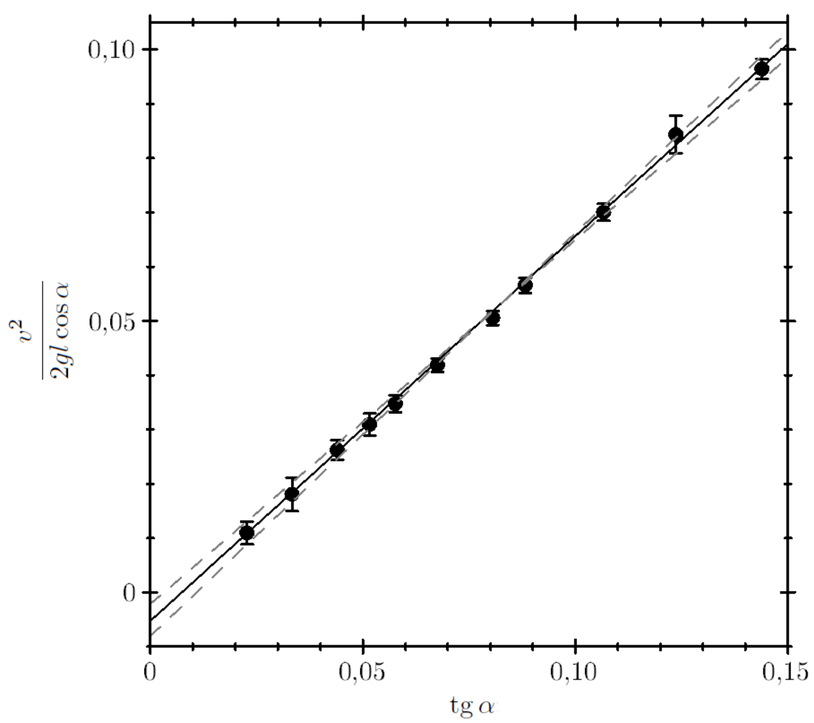
W celu wykonania doświadczenia zestawiono układ doświadczalny przedstawiony na Rys. 2. Deskę pokrytą gumą ustawiono na kartonowym pudełku, jeden jej koniec podpierając kawałkiem plasteliny. W miejscu, w którym kulka uderzała w powierzchnię stołu, umieszczono arkusz papieru milimetrowego pokryty kalką. Dzięki temu upadająca kulka zostawiała ślad pozwalający z dużą dokładnością określić miejsce upadku. Wielkości l, h, d oraz różnicę wysokości końców deski (potrzebną do wyznaczenia $\operatorname{tg}\alpha$) mierzono za pomocą papieru milimetrowego. Promień kulki r wyznaczono, mierząc jej obwód przez owinięcie jej paskiem papieru milimetrowego i dzieląc otrzymany wynik przez 2π.

Dla ustalonych wartości $l = 330$ mm i $h = 277$ mm oraz kilku różnych wartości kąta α wyznaczono odległość d, pięciokrotnie powtarzając eksperyment. Zebrane wyniki przedstawia poniższa tabela:

$\operatorname{tg}\alpha$	$d_{\text{śr}}$ (mm)	$d_{\max} - d_{\min}$ (mm)	v^2 ($\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$)
0,023	63,2	4	0,071
0,033	80,9	4	0,117
0,044	97,2	2	0,170
0,052	105,4	2	0,200
0,058	111,0	2	0,224
0,068	121,8	1	0,270
0,081	132,4	1	0,326
0,088	139,4	1	0,365
0,107	153,3	1	0,451
0,124	166,4	2	0,542
0,144	175,4	1	0,618

Tabela 1. Wyniki pomiaru odległości d dla różnych wartości $\operatorname{tg}\alpha$: średnia wartość $d_{\text{śr}}$ z pięciu pomiarów, różnica pomiędzy wartością maksymalną ($d_{\max}$) i minimalną ($d_{\min}$), będąca oszacowaniem niepewności wartości $d_{\text{śr}}$ oraz wyznaczona na jej podstawie wartość v^2.

Na ich podstawie wykreślono zależność wartości lewej strony równania (7) od wartości $\operatorname{tg}\alpha$:



Rys. 3. Zależność wartości lewej strony równania (7) od wartości $\operatorname{tg}\alpha$, wraz z dopasowaną prostą. Linie przerywane odpowiadają prostym o możliwie najmniejszym i największym nachyleniu.

Otrzymane punkty pomiarowe układają się na prostej, która nie przechodzi przez punkt (0,0), co jest spowodowane występowaniem tarcia tocznego. Dopasowując odpowiednią prostą do tych punktów wyznaczono wartości parametrów prostej: $p = 0{,}706 \pm 0{,}026$ i $q = 0{,}0072 \pm 0{,}0026$, a stąd szukane wartości:

$$I/(mr^2) = 0{,}41 \pm 0{,}05$$

$$k = (9{,}7 \cdot 10^{-5} \pm 3{,}5 \cdot 10^{-5})\ \text{m}$$

Fakt, że otrzymane punkty pomiarowe układają się na prostej potwierdza, że przyjęte na początku rozwiązania założenie o nieistotności oporu powietrza było właściwe. Gdyby opór powietrza nie był zaniedbywalny, to największy wpływ na ruch kulki miałby on wtedy, gdy prędkości osiągane przez kulkę są największe. Zatem dla największych wartości $\operatorname{tg}\alpha$ otrzymane punkty pomiarowe byłyby odchylone w dół w stosunku do zależności liniowej.

Podczas zawodów uczestnicy dysponowali jednorodnymi kulkami stalowymi o średnicy ok. 13,49 mm. Dla takich kulek $I/(mr^2) = 2/5$, co jest zgodne z otrzymanym wynikiem $0{,}41 \pm 0{,}05$.

Przewidywana punktacja zadania D1.

Pomysł na pomiar umożliwiający wyznaczenie szukanych wielkości – 4 pkt.
Wzór na przyspieszenie kulki a_k w ruchu po równi ((1) lub równoważny) – 3 pkt.
Związek między prędkością v na końcu równi a odległością d (wzór (6) lub równoważny) – 2 pkt
Wzór (7) lub równoważny – 1 pkt
Zestawienie i opis układu umożliwiającego poprawne wykonanie doświadczenia – 2 pkt.
Wykonanie serii pomiarów dla co najmniej 4 różnych wartości kąta α – 4 pkt.
Wyznaczenie wielkości $I/(mr^2)$ oraz k na podstawie dopasowania prostej – 3 pkt.
Wyniki liczbowe i dyskusja ich niepewności – 1 pkt