

LXV OLIMPIADA FIZYCZNA

ZAWODY III STOPNIA

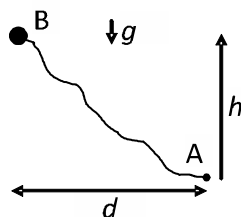
CZEŚĆ TEORETYCZNA

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

Zadanie 1.

Mały ciężarek o masie m jest przymocowany do końca lekkiej, wiotkiej nici, której drugi koniec jest zamocowany nieruchomo w punkcie A. Długość swobodna nici wynosi l , jej maksymalne względne wydłużenie wynosi p , gdzie $p \ll 1$, a maksymalna siła napięcia (wytrzymałość) jest równa F_{\max} . W całym zakresie wydłużeń spełniona jest proporcjonalność wydłużenia do siły (prawo Hooke'a).

Niech B będzie punktem, którego odległość od punktu A nie przekracza długości nienapiętej nici, a położenie w pionie względem punktu A wynosi h , przy czym $h > 0$ oznacza położenie powyżej punktu A. Odległość w poziomie między punktami A i B jest równa d .



Rys. do zad. 1: ciężarek na nitce

Ciężarek został upuszczony z punktu B. Droga przebyta przez ciężarek w czasie swobodnego spadku była znacznie większa od drogi przebytej podczas napinania nici. Nici zerwała się przy pierwszym rozciągnięciu.

Podaj warunek, jaki musiały spełniać parametry m , p , F_{\max} , d , l oraz przyspieszenie grawitacyjne g , aby opisane zdarzenie było możliwe, oraz – dla ustalonych wartości tych parametrów – minimalną wartość h_{\min} wysokości, z jakiej upuszczono ciężarek.

Opór powietrza należy pominąć.

Zadanie 2.

Źródło dźwięku harmonicznego porusza się ruchem jednostajnym po okręgu o promieniu R z prędkością mniejszą od prędkości v_d dźwięku w ośrodku, ale porównywalną z nią. Częstotliwość dźwięku jest znacznie większa od częstotliwości krążenia źródła. Nieruchomy mikrofon znajduje się w odległości większej niż R od środka okręgu, po którym porusza się źródło, w płaszczyźnie tego okręgu. W chwili $t = 0$ odebrano dźwięk o największej częstotliwości, a najbliższy następujący po nim dźwięk o najmniejszej częstotliwości odebrano w chwili $t = \Delta t$. Średnia arytmetyczna najwyższej i najniższej częstotliwości dźwięku odbieranego przez mikrofon wynosi f_a . Średnia częstotliwość odbieranego dźwięku, określona jako pole pod wykresem zależności tej częstotliwości od czasu podzielone przez czas, w przedziale od $t = 0$ do $t = \Delta t$ wynosi f_b .

Wyznacz chwilę, w której odbierana częstotliwość będzie równa dokładnie f_b . Rozważ tylko chwile z przedziału od $t = 0$ do $t = \Delta t$.

Podaj wartości liczbowe częstotliwości wysyłanego dźwięku, prędkości źródła, oraz poszukiwanej chwili dla $f_a = 11 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$, $f_b = 9 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$, $R = 100 \text{ m}$, $v_d = 340 \text{ m/s}$, $\Delta t = 1 \text{ s}$.

Zadanie 3 na następnej stronie.

Zadanie 3.

Zbudowano silnik elektryczny składający się z 4 współosiowych, cienkich dysków, każdy o promieniu R .

Każdy dysk składa się z $2n$ metalowych sektorów jednakowej wielkości, przy czym sąsiednie sektory są od siebie izolowane. Sektory nieparzyste (na rysunkach oznaczone literą A) oraz parzyste (na rysunkach oznaczone literą B) są – każde z osobna – elektrycznie połączone. Odległość między sąsiednimi dyskami wynosi d , przy czym jest ona znacznie mniejsza od liniowych rozmiarów sektorów. Dyski 1 i 3 są nieruchome, a sektory A dysku 1 są ustawione dokładnie za sektorami B dysku 3. Dyski 2 i 4 są ze sobą sztywno połączone i mogą się obracać wokół wspólnej osi. Podobnie jak dla dysków 1 i 3, sektory A dysku 2 są ustawione dokładnie za sektorami B dysku 4. Kąt obrotu

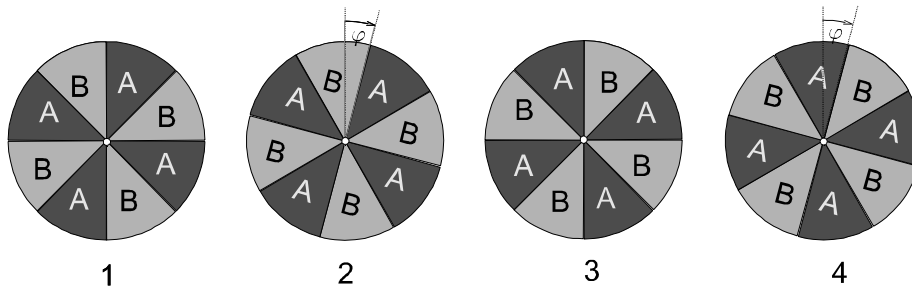
zespołu dysków 2 i 4 względem zespołu dysków 1 i 3 wynosi φ (patrz rysunek A).

Początkowo wszystkie sektory A (wszystkich dysków) były dołączone do dodatniego bieguna źródła napięcia U , a wszystkie sektory B – do ujemnego bieguna.

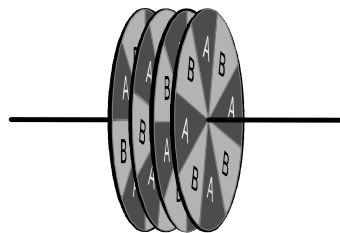
a) Wyznacz moment siły elektrycznej obracającej zespół dysków 2 i 4 w zależności od kąta φ i określ, w którą stronę jest on skierowany.

b) Załóżmy, że zespół dysków 2 i 4 obraca się stale w tę samą stronę. Dla jakich wartości φ należy zmienić bieguny zasilania sektorów dysków 2 i 4 na przeciwne, aby moment siły obracający te dyski był stale skierowany w tę samą stronę?

c) Podaj wartość liczbową maksymalnego momentu siły z punktu a) dla $R = 0,1$ m, $n = 20$, $d = 0,0001$ m, $U = 100$ V. Przenikalność elektryczna próżni $\epsilon_0 \approx 9 \cdot 10^{-12}$ F/m.



Rys. A do zad. 3: dyski tworzące silnik, tutaj przedstawione obok siebie – w rzeczywistości są one ustawione jeden za drugim.



Rys. B do zad. 3: dyski zamontowane w silniku. Skala nie jest zachowana. Elementy konstrukcyjne silnika i połączenia elektryczne nie są pokazane.

Rozwiązanie zadania 1

Ruch ciężarka możemy podzielić na dwa etapy:

- Spadek swobodny do momentu, gdy odległość ciężarka od punktu A będzie równa l . Na końcu tego etapu ciężarek ma pionowo w dół skierowaną prędkość v_1 , którą możemy wyznaczyć korzystając z zasady zachowania energii

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mg \left(h + \sqrt{l^2 - d^2} \right), \quad (1)$$

gdzie $h + \sqrt{l^2 - d^2}$ jest odległością (w pionie) jaką przebył ciężarek. Stąd otrzymujemy

$$v_1 = \sqrt{2g \left(h + \sqrt{l^2 - d^2} \right)}. \quad (2)$$

- Rozciąganie nici do momentu ewentualnego zerwania. Początkową pionową prędkość v_1 w tym etapie możemy rozłożyć na składowe: v_{1r} – styczną do nici oraz $v_{1\perp}$ – prostopadłą do nici. Z rozważań geometrycznych otrzymujemy

$$v_{1r} = \frac{\sqrt{l^2 - d^2}}{l} v_1, \quad (3)$$

$$v_{1\perp} = \frac{d}{l} v_1. \quad (4)$$

Ponieważ droga przebyta przez ciężarek w czasie swobodnego spadania jest znacznie większa od drogi przebytej w trakcie napinania nici, możemy pominąć efekty grawitacji w tym procesie (w jego trakcie zmiana energii grawitacyjnej jest mała w porównaniu z energią kinetyczną ciężarka na początku tego procesu). Ten sam warunek oznacza, że przemieszczenie ciężarka w trakcie napinania jest małe w porównaniu z l , dzięki czemu można pominąć zmianę kierunku siły napięcia nici w trakcie jej napinania.

Przy tych przybliżeniach ruch ciężarka jest złożeniem ruchu harmonicznego wzdłuż nici oraz ruchu jednostajnego wzdłuż osi prostopadłej do nici, a napięcie i ewentualne zerwanie nici wynika tylko z ruchu wzdłuż niej. W trakcie napinania nici składowa prędkości skierowana wzdłuż nici maleje kosztem wzrostu energii sprężystości. Nici się zerwie, jeśli związana z tą składową część energii kinetycznej będzie większa od maksymalnej energii sprężystości $F_{\max}pl/2$. Oznacza to, że zerwanie zajdzie jeśli

$$\frac{m}{2}v_{1r}^2 > \frac{1}{2}F_{\max}pl, \quad (5)$$

czyli dla

$$2m \left(1 - \frac{d^2}{l^2} \right) g \left(h + \sqrt{l^2 - d^2} \right) > F_{\max}pl. \quad (6)$$

To daje minimalną wysokość h powyżej której nastąpi zerwanie

$$h_{\min} = \frac{F_{\max}pl}{2mg \left(1 - \frac{d^2}{l^2} \right)} - \sqrt{l^2 - d^2}. \quad (7)$$

Ponieważ $h \leq \sqrt{l^2 - d^2}$, warunkiem na to, by do zerwania mogło dojść jest

$$\frac{F_{\max}p}{4mg \left(1 - \frac{d^2}{l^2} \right)^{3/2}} < 1. \quad (8)$$

Punktacja zadania 1.

Prędkość ciężarka w chwili rozpoczęcia rozciągania (wzór (2)) lub wyrażenie równoważne – 2 pkt.
Jawne podanie warunków przybliżenia (pominięcie grawitacji i zmiany kierunku siły napięcia nici w trakcie jej napinania) – 2 pkt.

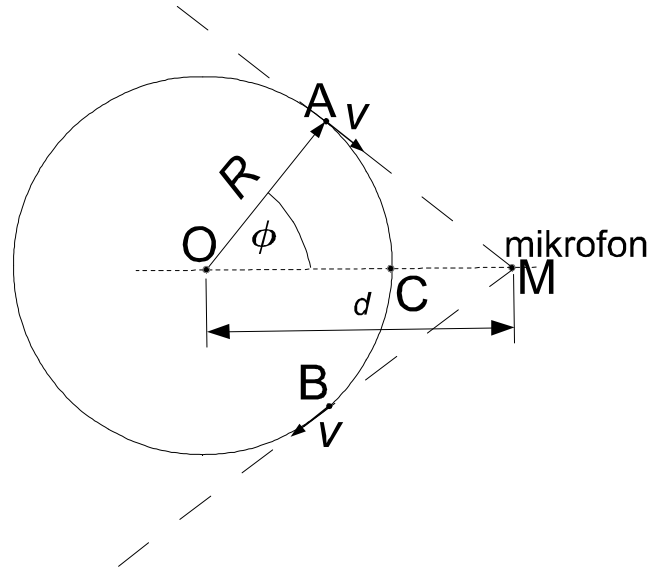
Warunek zerwania nici w postaci niejawnej (wzór (5)) lub równoważny – 2 pkt.

Wzór na h_{\min} (wzór (7)) – 2 pkt.

Warunek zerwania nici (wzór (8)) – 2 pkt.

Rozwiązanie zadania 2.

Największa odbierana przez mikrofon częstotliwość f_{\max} jest związana z dźwiękiem wysłanym, gdy źródło dźwięku zbliżało się do mikrofonu z największą możliwą prędkością, tzn. poruszało się dokładnie w kierunku mikrofonu (punkt A na rysunku). Podobnie najmniejsza odbierana przez mikrofon częstotliwość f_{\min} jest związana z dźwiękiem wysłanym, gdy źródło dźwięku oddalało się od mikrofonu z największą możliwą prędkością, tzn. poruszało się dokładnie w kierunku przeciwnym do mikrofonu (punkt B na rysunku)



Rys. do rozwiązania zad 2. Punkt O to środek okręgu, po którym porusza się źródło, punkt M to położenie mikrofonu. Opis punktów A, B, C – patrz rozwiązanie.

Ze wzorów na efekt Dopplera dla poruszającego się źródła otrzymamy

$$f_{\max} = \frac{f}{1 - \frac{v}{v_d}}, \quad f_{\min} = \frac{f}{1 + \frac{v}{v_d}}, \quad f_a = \frac{f_{\max} + f_{\min}}{2} = \frac{f}{1 - \left(\frac{v}{v_d}\right)^2}, \quad (9)$$

gdzie f jest częstotliwością źródła, a v prędkością ruchu źródła po okręgu.

Zauważmy, że pole pod wykresem zależności częstotliwości od czasu, w przedziale czasu od $t = 0$ do $t = \Delta t$ jest równe liczbie grzbietów fali odebranych w tym przedziale czasu. A ta liczba odebranych grzbietów jest równa liczbie grzbietów wysłanych od chwili, gdy źródło znajdowało się w punkcie A, do chwili, gdy źródło znajdowało się w punkcie B. Ponieważ odległość AM jest równa odległości BM, źródło przemieściło się od A do B w czasie Δt , wysyłając przy tym $\Delta t \cdot f$ grzbietów fal. Biorąc pod uwagę definicję f_b , oznacza to, że

$$f_b = f. \quad (10)$$

Uwzględniając wzór na f_a otrzymamy

$$v = v_d \sqrt{1 - \frac{f_b}{f_a}}. \quad (11)$$

Przetawiony na rysunku kąt ϕ jest równy

$$\phi = \frac{v \Delta t}{2R}, \quad (12)$$

natomiast z zależności trygonometrycznych odległość d mikrofonu od środka okręgu jest dana wzorem

$$d = \frac{R}{\cos \phi}. \quad (13)$$

Częstotliwość odbieranego dźwięku jest równa f_b (a więc również f) jeżeli ten dźwięk był wysłany w chwili, gdy źródło poruszało się prostopadle do kierunku w stronę mikrofonu, tzn. znajdowało się w punkcie najbliższym mikrofonu (punkt C na rysunku). Uwzględniając zmianę odległości od mikrofonu otrzymamy, że szukana chwila czasu t_x jest dana wzorem

$$\begin{aligned}
 t_x &= \frac{\Delta t}{2} + \frac{d - R - R \operatorname{tg} \phi}{v_d} \\
 &= \frac{\Delta t}{2} + \left[\frac{1}{\cos \left(\frac{v_d \Delta t}{2R} \sqrt{1 - \frac{f_b}{f_a}} \right)} - 1 - \operatorname{tg} \left(\frac{v_d \Delta t}{2R} \sqrt{1 - \frac{f_b}{f_a}} \right) \right] \frac{R}{v_d}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Podstawiając dane liczbowe otrzymamy

$$f = 9 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}, v = 145 \text{ m/s}, t_x = 0,3 \text{ s}. \tag{15}$$

Punktacja zadania 2

Określenie miejsc na okręgu, z których wysłano dźwięki odebrane jako te o najniższej i najwyższej częstotliwości oraz wzory na f_{\min} i f_{\max} (wzory (9)) – 2 pkt.

Stwierdzenie i uzasadnienie faktu, że $f = f_b - 1$ pkt.

Prędkość ruchu źródła po okręgu (wzór (11)) – 1 pkt.

Połowa kąta między położeniami odpowiadającym najwyższemu i najniższemu dźwiękowi (wzór (12)) – 1 pkt.

Odległość mikrofonu od środka okręgu (wzór (13)) – 1 pkt.

Ustalenie położenia źródła (punkt C na rysunku) odpowiadającego odebranemu dźwiękowi o częstotliwości $f = f_b - 1$ pkt.

Szukana chwila (wzór (14)) – 2 pkt.

Wartości liczbowe (wzory (15)) – 1 pkt.

Rozwiązanie zadania 3.

a)

Zagadnienie wystarczy przeanalizować dla dwóch sąsiednich sektorów.

Niech $\varphi_1 = 2\pi/(2n)$, $S_1 = \pi R^2/(2n)$, $x = \varphi/\varphi_1$, przy czym zakładamy $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$.

Mamy następujące elementy

(i) równoległe płytki o potencjałach kolejno $U/2, -U/2, -U/2, U/2$ o powierzchni xS_1 ;

(ii) równoległe płytki o potencjałach kolejno $U/2, U/2, -U/2, -U/2$ o powierzchni $(1-x)S_1$;

(iii) równoległe płytki o potencjałach kolejno $-U/2, U/2, U/2, -U/2$ o powierzchni xS_1 ;

(iv) równoległe płytki o potencjałach kolejno $-U/2, -U/2, U/2, U/2$ o powierzchni $(1-x)S_1$.

Każdy z przypadków (i) oraz (iii) odpowiada dwóm kondensatorom o powierzchni okładek xS_1 podłączonym do napięcia U , co daje zgromadzoną energię $E_{1,3} = 4 \cdot \frac{\epsilon_0 x S_1}{2} U^2$. Ze względu na warunek $d \ll l/(2n)$ pominęliśmy tu efekty brzegowe na granicach sektorów.

Każdy z przypadków (ii) oraz (iv) odpowiada jednemu kondensatorowi o powierzchni okładek $(1-x)S_1$ podłączonemu do napięcia U , co daje zgromadzoną energię $E_{2,4} = 2 \cdot \frac{\epsilon_0 (1-x) S_1}{2} U^2$.

Czyli całkowita energia elektryczna układu wynosi dla $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$

$$E = [4nx + 2n(1-x)] \frac{\epsilon_0 S_1}{2} U^2 = \left(1 + \frac{\varphi}{\pi} n\right) \frac{\epsilon_0 \pi R^2}{2} U^2. \quad (16)$$

Układ jest równoważny kondensatorowi o pojemności $C = \left(1 + \frac{\varphi}{\pi} n\right) \epsilon_0 \frac{\pi R^2}{d}$, podłączonemu do napięcia U . Aby wyznaczyć szukany moment siły, trzeba zbadać zmiany energii tego kondensatora przy zmianie φ . Zauważmy jednak, że jeśli kondensator jest podłączony do napięcia, to zmiana jego energii jest sumą pracy mechanicznej oraz pracy wykonanej przez źródło prądu. Z drugiej strony, szukany moment siły przy danym napięciu na kondensatorze nie zależy od tego, czy jest on podłączony do zewnętrznego napięcia, czy nie (bo zależy tylko od rozkładów ładunków w danej chwili). Zatem wyobraźmy sobie, że odłączyliśmy kondensator od źródła napięcia. W takim przypadku przy zmianie φ ładunek Q na kondensatorze nie ulega zmianie i mamy

$$M_z = \frac{d}{d\varphi} \frac{Q^2}{2C} = -\frac{Q^2}{2C^2} \frac{dC}{d\varphi} = -\frac{U^2}{2} \frac{dC}{d\varphi}, \quad (17)$$

gdzie M_z jest momentem sił zewnętrznych obracających płytki (ii) i (iv).

Alternatywnym sposobem wyznaczenia M_z jest uwzględnienie w bilansie energii pracy wykonanej przez źródło napięcia

$$M_z \Delta\varphi = \Delta \left(\frac{CU^2}{2} \right) - U \Delta Q,$$

gdzie $\Delta \left(\frac{CU^2}{2} \right)$ jest zmianą energii kondensatora przy małym wzroście φ o $\Delta\varphi$, ΔQ jest ładunkiem jaki dopłynął w wyniku tej zmiany do kondensatora, a $U \Delta Q$ – pracą wykonaną przez źródło. Ponieważ U stałe (a zatem $\Delta Q = U \Delta C$), otrzymamy

$$M_z = -\frac{U^2}{2} \frac{dC}{d\varphi},$$

czyli znowu wzór (17).

Zauważmy, że pochodna $dC/d\varphi$ nie jest określona na brzegach obszaru (dla $\varphi = \varphi_1$ oraz $\varphi = 0$). Ponieważ szukany moment sił elektrycznych M jest równy $-M_z$ otrzymujemy

$$M = +\frac{U^2}{2} n \epsilon_0 \frac{R^2}{d}. \quad (18)$$

Widać, że dla $0 < \varphi < \varphi_1$ szukany moment siły jest skierowany zgodnie ze wzrostem φ .

Dla $\varphi_1 \leq \varphi \leq 2\varphi_1$ definiując $x = (\varphi - \varphi_1)/\varphi_1$ otrzymamy następujące elementy

- (i) równoległe płytki o potencjałach kolejno $U/2, U/2, -U/2, -U/2$ o powierzchni xS_1 ;
(ii) równoległe płytki o potencjałach kolejno $U/2, -U/2, -U/2, U/2$ o powierzchni $(1-x)S_1$;
(iii) równoległe płytki o potencjałach kolejno $-U/2, -U/2, U/2, U/2$ o powierzchni xS_1 ;
(iv) równoległe płytki o potencjałach kolejno $-U/2, U/2, U/2, -U/2$ o powierzchni $(1-x)S_1$.
Pojemność zastępcza układu w tym przypadku wynosi

$$[2nx + 4n(1-x)] \epsilon_0 \frac{S_1}{d} = [2-x] \epsilon_0 \frac{2nS_1}{d} = \left(3 - \frac{\varphi}{\pi} n\right) \epsilon_0 \frac{\pi R^2}{d}, \quad (19)$$

co prowadzi do momentu siły elektrycznej dla $\varphi_1 < \varphi < 2\varphi_1$

$$M = -\frac{U^2}{2} n \epsilon_0 \frac{R^2}{d}. \quad (20)$$

Dla takich kątów szukany moment siły jest skierowany przeciwnie do wzrostu φ .

W przypadku $\varphi = \varphi_1$ oraz $\varphi = 2\varphi_1$ mamy do czynienia z ekstremum energii elektrycznej, zatem moment siły jest równy 0. Rozszerzając otrzymane wyniki na pozostałe sektory otrzymamy

$$M = \begin{cases} +\frac{U^2}{2} n \epsilon_0 \frac{R^2}{d} & \text{dla } 2k\varphi_1 < \varphi < (2k+1)\varphi_1, k = 0, 1, \dots \\ -\frac{U^2}{2} n \epsilon_0 \frac{R^2}{d} & \text{dla } (2k-1)\varphi_1 < \varphi < 2k\varphi_1, k = 0, 1, \dots \\ 0 & \text{dla } \varphi = k\varphi_1, k = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (21)$$

b) Z powyższego wynika, że aby moment siły był skierowany zawsze w jedną stronę, dla $(2k-1)\varphi_1 < \varphi < 2k\varphi_1, k = 0, 1, \dots$ należy zmienić znak napięcia podłączonego do sektorów dysków 2 i 4 na przeciwny.

c) Podstawiając dane liczbowe otrzymamy

$$M = 9 \cdot 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m}. \quad (22)$$

Punktacja zadania 3.

Rozważenie układu jako układu kondensatorów opisanego w punktach (i)–(iv) lub układ równoważny ($0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ lub $\varphi_1 \leq \varphi \leq 2\varphi_1$) – 2 pkt.

Energia elektrostatyczna układu (wzór (16) lub równoważny) – 2 pkt.

Prawidłowo wyprowadzony wzór na moment siły (wzór (17) lub równoważny oraz (18)) – 3 pkt.

Szukany moment siły w ogólnym przypadku (wzór (21)) – 1 pkt.

Określenie kąta, przy którym należy zmienić bieguny, do których podłączone są sektory ($(2k-1)\varphi_1 < \varphi < 2k\varphi_1, k = 0, 1, \dots$) – 1 pkt.

Wartość liczbową maksymalnego momentu siły (wzór (22)) – 1 pkt.