

## LXVI OLIMPIADA FIZYCZNA — ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA

Rozwiązania zadań I stopnia należy przysyłać do **Okręgowych Komitetów Olimpiady Fizycznej** w terminach: część I — do 14 października b.r., część II — do 18 listopada b.r. O kwalifikacji do zawodów II stopnia będzie decydować suma punktów uzyskanych za rozwiązania zadań części I i II.

**Przed wysłaniem rozwiązań prosimy o zarejestrowanie się na stronie internetowej <http://www.kgof.edu.pl/rejestracja>.**

Szczegóły dotyczące regulaminu oraz organizacji Olimpiady można znaleźć na stronie internetowej <http://www.kgof.edu.pl>.

### **Krótką informacją na temat poprawnej redakcji rozwiązań zadań Olimpiady Fizycznej**

Zadania powinny być rozwiązane jasno, przejrzysto i czytelnie. Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce papieru. Poszczególne etapy rozumowania należy opisać, a wszelkie zależności fizyczne, które nie są wprost podane w podręcznikach szkolnych – udowodnić. Należy również objaśnić wszelkie oznaczenia występujące w rozwiązaniach zadań. Rysunki mogą być wykonane odrębnie – muszą być jednak przejrzyste i czytelne oraz dobrze opisane w tekście.

Rozumowanie przedstawione w rozwiązaniach nie może zawierać luk logicznych. Każdy krok rozumowania powinien być zwięźle opisany, a przyjęte założenia – klarownie uzasadnione. Rozwlekłość jest uznawana za ujemną cechę pracy.

Rozwiązanie zadania teoretycznego powinno być poprzedzone analizą problemu poruszanego w zadaniu, a zakończone dyskusją wyników. Rozwiązania zadań teoretycznych powinny odnosić się do ogólnej sytuacji opisanej w treści, dane liczbowe (o ile zostały podane) powinny być podstawione dopiero do ostatecznych wzorów.

W zadaniach doświadczalnych należy wyraźnie rozgraniczyć części teoretyczną i doświadczalną. Część teoretyczna zadania doświadczalnego powinna zawierać analizę problemu wraz z wyprowadzeniem niezbędnych wzorów (o ile nie ma ich wprost w podręcznikach szkolnych) oraz sugestie metody doświadczalnej. Część doświadczalna powinna zawierać m.in. opis układu doświadczalnego ilustrowany rysunkiem, opis wykonanych pomiarów, wyniki pomiarów, analizę czynników mogących wpływać na wyniki (jak np. rozpraszanie energii lub opory wewnętrzne mierników), opracowanie wyników wraz z dyskusją niepewności pomiarowych. Wykresy do zadania doświadczalnego powinny być starannie wykonane, najlepiej na papierze milimetrowym. Ocenie podlegają wyłącznie elementy rozwiązania opisane w pracy. W zadaniach doświadczalnych osobno oceniana jest część teoretyczna i część doświadczalna.

W rozwiązaniach można posługiwać się dowolnym układem jednostek, chyba że tekst zadania mówi wyraźnie inaczej.

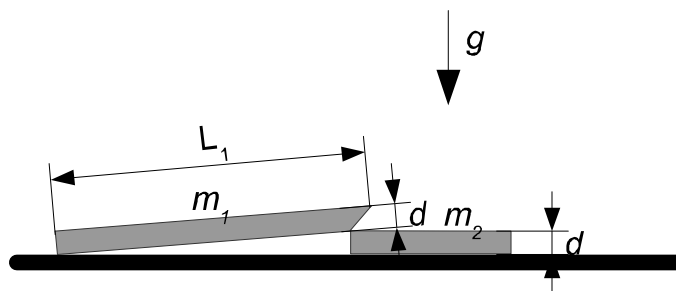
## CZEŚĆ II (termin wysyłania rozwiązań — 18 listopada 2016 r.)

**Uwaga:** Rozwiązanie każdego zadania powinno być napisane na oddzielnym arkuszu papieru podaniowego. Na każdym arkuszu należy umieścić identyfikator otrzymany w trakcie rejestracji oraz nazwisko i imię autora pracy. Na pierwszym arkuszu pracy dodatkowo należy podać adres e-mail autora pracy oraz nazwę i adres szkoły. Osoby, które chcą być poinformowane listownie o wynikach kwalifikacji, do pracy powinny dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę z naklejonym znaczkiem.

### ZADANIA TEORETYCZNE

Należy przesłać rozwiązania trzech (i tylko trzech) dowolnie wybranych zadań teoretycznych. Za każde z trzech zadań można otrzymać maksimum 20 punktów.

#### Zadanie T1



Rys. 1. Stan początkowy rozważanego układu desek. Rysunek nie uwzględnia faktu, że pierwsza deska jest długa.

Deska o masie  $m_1$ , długości  $L_1$  oraz grubości  $d$ , gdzie  $L_1 \gg d$ , ma jeden koniec ścięty pod kątem  $45^\circ$ . Deska ta jest początkowo oparta o drugą deskę o grubości również  $d$  i masie  $m_2$ , spoczywającą na poziomym stole – tak jak przedstawiono to na rysunku.

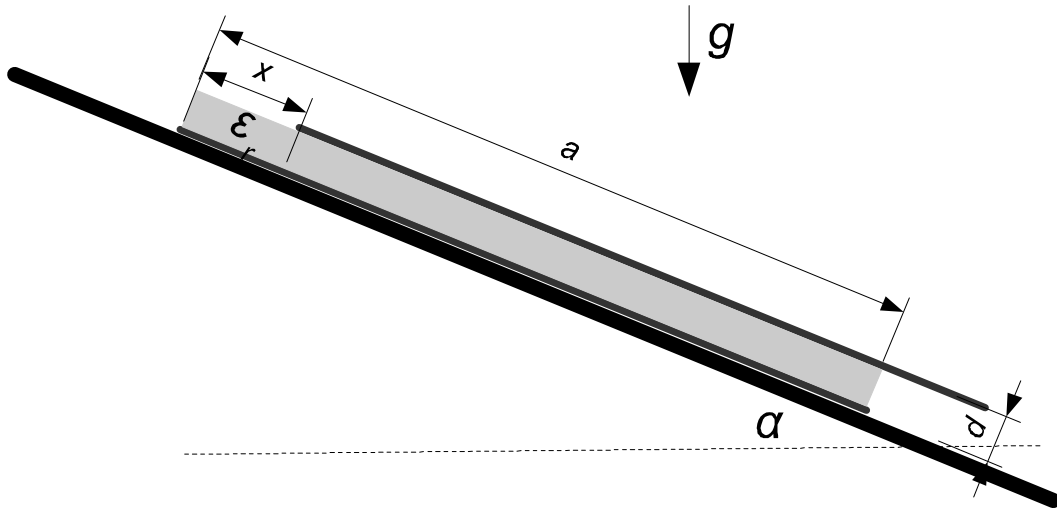
Wyznacz końcową prędkość drugiej deski.

Pomiń tarcie i inne opory ruchu.

Moment bezwładności cienkiego pręta o długości  $l$  i masie  $m$  względem osi prostopadłej do niego i przechodzącej przez jego środek masy wynosi  $\frac{1}{12}ml^2$ .

#### Zadanie T2

Kondensator płaski składa się z dwóch prostokątnych metalowych okładek o wymiarach  $a \times b$ , między którymi znajduje się jednorodny dielektryk o stałej dielektrycznej równej  $\epsilon_r$ . Odległość między okładkami wynosi  $d$ , przy czym  $d \ll a$  oraz  $d \ll b$ . Kondensator naładowano pewnym ładunkiem i położono na równi pochyłej o kącie nachylenia  $\alpha$ , tak że krawędzie  $b$  są poziome. Górna okładka kondensatora nie jest przymocowana i może ślizgać się bez tarcia po dielektryku. W stanie równowagi ta okładka była przesunięta względem dolnej okładki i dielektryka o  $x$ , przy czym  $x \gg d$  – patrz rysunek.



Rys. 2. Kondensator na równi pochyłej

Wiedząc, że masa górnej okładki wynosi  $m$ , wyznacz ładunek, którym był naładowany kondensator.

Pomiń możliwość przechylenia się górnej okładki dla  $x > a/2$ .

Dolna okładka i dielektryk są nieruchome względem równi.

Jako wskazówkę możesz wykorzystać rozwiązanie zadania 3. z finału LXV Olimpiady Fizycznej.

### Zadanie T3

Część klimatyzatorów ma możliwość pracy w trybie grzania, gdy otoczenie budynku jest zimniejsze od jego wnętrza. W tym trybie klimatyzator działa jako pompa ciepła: pobiera ciepło z otoczenia, chłodząc powietrze na zewnątrz, i oddaje ciepło do ogrzewanego pomieszczenia, pobierając przy tym energię elektryczną (jego elementy wykonują w tym procesie pracę). Rozważmy pracujący w tym trybie klimatyzator, którego moc grzania wynosi  $P_G$ . W skali Celsjusza temperatura zewnętrznych elementów klimatyzatora (chłodnicy) wynosi  $t_z$ , a temperatura elementów wewnętrznych (grzałki) to  $t_w$ .

a) Wyznacz minimalną moc elektryczną  $P_C$  potrzebną do ogrzewania tego pomieszczenia przy założeniu największej teoretycznie możliwej efektywności.

b) Rzeczywista zużywana przez klimatyzator moc elektryczna  $P_R$  jest większa niż  $P_C$ . Przyjmijmy, że nadmiar mocy  $P_R - P_C$  jest w całości zamieniany na ciepło i ogrzewa pomieszczenie (czyli jest częścią  $P_G$ ). Wyznacz, jaka jest szybkość przepływu powietrza  $J$  przez zewnętrzny element klimatyzatora, przy założeniu, że to przepływające powietrze jest chłodzone od temperatury (w skali Celsjusza) otoczenia  $t_{ot}$  do temperatury zewnętrznych elementów klimatyzatora  $t_z$ . Ciśnienie zewnętrzne wynosi  $p_{ot}$ . Przyjmij, że powietrze jest gazem doskonałym o molowym cieple właściwym przy stałej objętości równym  $\frac{5}{2}R$ , gdzie  $R$  jest uniwersalną stałą gazową. Przez szybkość przepływu powietrza rozumiemy objętość powietrza wypływającego w jednostce czasu z zewnętrznego elementu klimatyzatora.

Wyznacz wartości liczbowe  $P_C$  oraz  $J$  dla  $P_G = 3 \text{ kW}$ ,  $P_R = 1,5 \text{ kW}$ ,  $t_w = 35^\circ\text{C}$ ,  $t_z = -20^\circ\text{C}$ ,  $t_{ot} = -10^\circ\text{C}$ ,  $p_{ot} = 10^5 \text{ Pa}$ . Uniwersalna stała gazowa  $R = 8,3 \text{ J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$ .

### Zadanie T4 – numeryczne

Jednym z klasycznych zagadnień mechaniki jest problem znalezienia krzywej najkrótszego spadku – brachistochrony. W tym zadaniu będziemy badali podobne zagadnienie dla ograniczonej klasy krzywych, ale z uwzględnieniem oporu powietrza.

Rozważmy ciało materialne mogące poruszać się bez tarcia po paraboli  $y = ax^2 + bx + c$  od punktu  $x = 0, y = 0$  do punktu  $x = x_1, y = y_1$  (może to być np. koralik nanizany na drut). Ciało znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym o natężeniu  $g$  skierowanym przeciwnie do zwrotu osi  $y$ . Prócz grawitacji oraz siły reakcji więzów, gwarantującej, że ciało pozostaje na rozważanej paraboli, działa na nie siła oporu, skierowana przeciwnie do prędkości. Wartość tej siły wynosi

$$F_{\text{op}} = \beta v^2,$$

gdzie  $\beta$  jest stałą, a  $v$  – prędkością ciała. Początkowa prędkość ciała (w punkcie  $(0, 0)$ ) jest równa 0.

Przyjmując  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ,  $x_1 = 100 \text{ m}$ ,  $y_1 = -1 \text{ m}$  i oznaczając przez  $m$  masę rozważanego ciała, wyznacz wartość parametru  $a$ , dla której czas przemieszczania się rozważanego ciała od  $(0, 0)$  do  $(x_1, y_1)$  jest najkrótszy, dla  $\beta/m = 0$ ,  $\beta/m = 0,0001 \frac{1}{\text{m}}$ ,  $\beta/m = 0,001 \frac{1}{\text{m}}$  oraz  $\beta/m = 0,01 \frac{1}{\text{m}}$ . Dla porównania wyznacz również czas przemieszczania się tego ciała od  $(0, 0)$  do  $(x_1, y_1)$  po prostej (tzn. w przypadku  $a = 0$ ).

Niepewność otrzymanych czasów nie powinna być większa niż 0,2 s.

#### Wskazówki

Długość fragmentu rozważanej paraboli od  $x$  do  $x + \Delta x$ , gdzie  $\Delta x$  jest małe, jest w przybliżeniu równa  $\Delta s = \sqrt{1 + (y')^2} \Delta x$ , gdzie  $y'$  jest pochodną  $y$  względem  $x$ .

Wartości parametrów  $b, c$  są określone przez  $a, x_1, y_1$ .

#### Uwaga:

Rozwiązanie powinno zawierać:

- (i) wzory używane w rozwiązaniu wraz z wyprowadzeniem lub uzasadnieniem;
- (ii) opis zastosowanego algorytmu;
- (iii) opis kodu programu (lub np. arkusza kalkulacyjnego) użytego do rozwiązania wraz z sposobem zagwarantowania (lub sprawdzenia) właściwej dokładności wyników;
- (iv) tabelę wartości liczbowych, o których mowa w treści zadania (dla każdego  $\beta/m$  wartość  $a$ , minimalnego czasu, oraz czasu dla ruchu po prostej);
- (v) jakościowe omówienie otrzymanych wyników.

Nie jest dopuszczalne użycie programów do obliczeń symbolicznych lub gotowych programów wyznaczających poszukiwany czas po podaniu toru.

Dodatkowe wskazówki dotyczące rozwiązywania zadań numerycznych znajdziesz w treściach i rozwiązaniach zadań numerycznych z poprzednich olimpiad.

## Rozwiązanie zadania T1

Oznaczmy przez  $v_1$  oraz  $v_2$  poziome składowe prędkości odpowiednio pierwszej i drugiej deski, a przez  $v_y$  pionową składową prędkości końca pierwszej deski, wszystkie te prędkości w chwili uderzenia pierwszej deski o stół. Ponieważ nie ma tarcia,  $v_2$  jest równe szukanej końcowej prędkości drugiej deski.

Aż do uderzenia pierwszej deski o stół jej ukośna ściana styka się z górną krawędzią drugiej deski. Ponieważ  $L_1 \gg d$ , kąt tej ściany deski względem pionu jest w przybliżeniu stale równy  $45^\circ$ . Oznacza to, że spełniony jest warunek

$$v_y = v_2 - v_1. \quad (1)$$

Ponieważ nie ma tarcia, pozioma składowa pędu układu jest zachowana i równa 0, gdyż na początku żadna z desek się nie poruszała

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0. \quad (2)$$

Również z powodu braku tarcia aż do momentu uderzenia pierwszej deski w stół spełniona jest zasada zachowania energii – początkowa energia układu jest równa energii końcowej

$$\frac{m_1 g d}{2} = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \left( \frac{v_y}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2, \quad (3)$$

gdzie  $\frac{1}{2} I_1 \omega_1^2$  jest energią kinetyczną ruchu obrotowego pierwszej deski wokół środka masy,  $\omega_1 = v_y / L_1$  – prędkością kątową ruchu obrotowego pierwszej deski,  $I_1 = m_1 L_1^2 / 12$  – momentem bezwładności pierwszej deski względem jej środka masy (ponieważ długość jest znacznie większa od grubości wykorzystaliśmy tu wzór podany w treści zadania),  $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \left( \frac{v_y}{2} \right)^2$  – energią kinetyczną ruchu środka masy pierwszej deski (uwzględniliśmy tu, że pionowa prędkość środka masy tej deski jest równa  $v_y / 2$ ),  $\frac{1}{2} m_2 v_2^2$  – energią kinetyczną drugiej deski,  $m_1 g d / 2$  – różnicą między początkową a końcową energią potencjalną pierwszej deski (wykorzystaliśmy tu to, że dla długiej deski, gdy jeden koniec deski jest podniesiony o  $d$ , a drugi opiera się o stół, to środek masy jest uniesiony o  $d/2$ ).

Uwzględniając wzory na  $I_1$  i  $\omega_1$ , powyższą równość można przepisać w postaci

$$\frac{m_1 g d}{2} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \frac{v_y^2}{3} + \frac{1}{2} m_2 v_2^2. \quad (4)$$

Podstawiamy do powyższego równania  $v_1$  oraz  $v_y$  wyznaczone ze wzorów (2) oraz (1):

$$v_1 = -\frac{m_2}{m_1} v_2, \quad v_y = v_2 - v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} v_2. \quad (5)$$

Ostatecznie otrzymamy, że końcowa prędkość drugiej deski wynosi

$$v_2 = \sqrt{\frac{g d}{\frac{m_2^2}{m_1^2} + \frac{(m_1 + m_2)^2}{3 m_1^2} + \frac{m_2}{m_1}}} = \sqrt{\frac{3 g d m_1^2}{4 m_2^2 + m_1^2 + 5 m_1 m_2}}. \quad (6)$$

Przypadki szczególne:

Dla  $m_2 / m_1 \rightarrow 0$  otrzymamy

$$v_2 = \sqrt{3 g d}.$$

Wynik ten jest konsekwencją faktu, że moment bezwładności pręta względem jego końca wynosi  $\frac{1}{3} m l^2$ .

Dla  $m_2 / m_1 \rightarrow \infty$  otrzymamy zgodny z oczekiwaniami (lekka deska nie jest w stanie poruszyć bardzo ciężkiej) wynik

$$v_2 = 0.$$

### Punktacja zadania T1

Związek między pionową prędkością końca pierwszej deski a poziomymi prędkościami desek (wzór (1)) – 2 pkt.

Wykorzystanie zasady zachowania pędu (wzór (2)) – 2 pkt.

Zasada zachowania energii dla rozpatrywanego układu w postaci ogólnej (wzór (3)) – 2 pkt.

Uwzględnienie w zasadzie zachowania energii związków między prędkościami kątowymi i liniowymi oraz wzoru na moment bezwładności pręta (wzór (4)) – 1 pkt.

Końcowa prędkość drugiej deski (wzór (6) lub równoważny) – 3 pkt.

### Rozwiązanie zadania T2

Gdy górna okładka jest przesunięta o  $x$  w stosunku do dolnej, pojemność kondensatora wynosi

$$C_x = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r (a-x)b}{d}, \quad (7)$$

a energia w nim zmagazynowana, zgodnie ze wzorem na energię kondensatora, jest równa

$$E_C = \frac{Q^2}{2C_x}. \quad (8)$$

Grawitacyjna energia potencjalna górnej okładki jest dana wzorem

$$E_g = -mgx \sin \alpha. \quad (9)$$

W stanie równowagi zmiana całkowitej energii spowodowana dodatkowym przesunięciem górnej okładki o małą wielkość  $\Delta x$  jest równa zero, tzn.

$$\Delta(E_g + E_C) = 0. \quad (10)$$

Uwzględniając, że  $Q$  jest stałe, oraz że dla małej zmiany  $\Delta \frac{1}{C_x} = -\frac{1}{C_x^2} \Delta C_x = \frac{1}{C_x^2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r b}{d} \Delta x$ , otrzymujemy

$$\left( -mg \sin \alpha + \frac{Q^2}{2C_x^2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r b}{d} \right) \Delta x = 0, \quad (11)$$

z czego wynika, że

$$-mg \sin \alpha + \frac{Q^2}{2C_x^2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r b}{d} = 0. \quad (12)$$

Przekształcając powyższe równanie otrzymujemy szukany ładunek

$$Q = C_x \sqrt{\frac{2mgd \sin \alpha}{\varepsilon_0 \varepsilon_r b}} \quad (13)$$

$$= (a-x) \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 \varepsilon_r mgb \sin \alpha}{d}}. \quad (14)$$

### Punktacja zadania T2

Pojemność kondensatora (wzór (7)) – 2 pkt.

Energia zmagazynowana w kondensatorze (wzór (8)) – 1 pkt.

Grawitacyjna energia potencjalna górnej okładki (wzór (9)) – 1 pkt.

Warunek równowagi (wzór (10) lub równoważny) – 2 pkt.

Warunek równowagi w jawnej postaci (wzór (12) lub równoważny) – 2 pkt.

Szukana pojemność kondensatora (wzór (14)) – 2 pkt.

### Rozwiązanie zadania T3

a) Zgodnie ze wzorem na sprawność silnika Carnota, minimalna praca potrzebna do dostarczenia do mieszkania ciepła  $Q_G$  wynosi

$$W_C = \left(1 - \frac{T_z}{T_w}\right) Q_G, \quad (15)$$

gdzie  $T_w = t_w + T_0$ ,  $T_z = t_z + T_0$  są odpowiednimi temperaturami w skali Kelvina, a  $T_0 \approx 273$  K. Zatem w przypadku idealnym szukana moc jest równa

$$P_C = \frac{t_w - t_z}{t_w + T_0} P_G \quad (16)$$

$$= 0,54 \text{ kW}. \quad (17)$$

b) Z zasady zachowania energii moc ciepła pobieranego z otoczenia wynosi

$$P_z = P_G - P_R. \quad (18)$$

Molowe ciepło właściwe powietrza przy stałym ciśnieniu (chłodzenie na zewnątrz odbywa się przy stałym ciśnieniu!) wynosi  $C_p = \left(\frac{5}{2} + 1\right) R$ , zatem liczba moli powietrza przepływającego w jednostce czasu przez zewnętrzny element klimatyzatora wynosi

$$n = \frac{P_z}{(t_o - t_z) C_p}. \quad (19)$$

Z równania stanu gazu doskonałego wynika, że molowa gęstość wylatującego powietrza wynosi

$$\frac{N}{V} = \frac{p_o}{RT_z}. \quad (20)$$

Zatem szukana szybkość przepływu powietrza jest równa

$$J = \frac{n}{N/V} \quad (21)$$

$$= \frac{P_G - P_R}{(t_o - t_z) \left(\frac{5}{2} + 1\right)} \frac{t_z + T_0}{p_o} \quad (22)$$

$$\approx 0,1 \text{ m}^3/\text{s}. \quad (23)$$

### Punktacja zadania T3

Minimalna praca potrzebna do dostarczenia do mieszkania ciepła  $Q_g$  (wzór (15)) – 2 pkt.

Szukana moc w przypadku a) (wzór (16)) – 1 pkt.

Liczbowa wartość szukanej mocy (wzór (17)) – 1 pkt.

Wykorzystanie zasady zachowania energii (wzór (18)) – 1 pkt.

Liczba moli powietrza przepływającego w jednostce czasu przez zewnętrzny element klimatyzatora (wzór (19)) – 2 pkt.

Molowa gęstość wylatującego powietrza (wzór (20)) – 1 pkt.

Szukana szybkość przepływu powietrza (wzór (22)) – 1 pkt.

Wynik liczbowy (wzór (23)) – 1 pkt.

## Rozwiązanie zadania T4 (numerycznego)

Uwaga: aby uniknąć konfliktu oznaczeń, w poniższym rozwiązaniu współrzędne końcowego położenia koralika oznaczamy przez  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{y}_1$ .

### Równania ruchu

Interesuje nas tylko siła styczna do toru, po którym porusza się koralik.

Styczna do toru składowa siły grawitacyjnej wynosi

$$F_{gs} = -mg \frac{\Delta y}{\Delta s}. \quad (24)$$

Zgodnie ze wskazówką w treści zadania mamy

$$\frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{\Delta y}{\sqrt{1 + (y')^2} \Delta x} = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}. \quad (25)$$

Zatem

$$F_{gs} = -mg \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}, \quad (26)$$

przy czym w naszym przypadku

$$y' = 2ax + b. \quad (27)$$

Siła oporu powietrza działająca na kulkę jest przeciwna do wektora prędkości, co oznacza, że jest styczna do toru. Tak więc styczna do toru składowa siły działającej na kulkę wynosi

$$F_s = F_{gs} - F_{op} \quad (28)$$

$$= -mg \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} - \beta v^2. \quad (29)$$

Zatem równanie ruchu koralika ma postać

$$ma = -mg \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} - \beta v^2, \quad (30)$$

gdzie  $a$  jest styczną do toru składową przyspieszenia koralika. Zauważmy, że prędkość koralika możemy wyrazić przez jej poziomą składową  $v_x$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \sqrt{1 + (y')^2} v_x. \quad (31)$$

Ponieważ punkt początkowy to  $x = 0$ ,  $y = 0$ , a końcowy to  $x = \mathbf{x}_1$ ,  $y = \mathbf{y}_1$ , parabola, po której porusza się koralik ma postać

$$y = \left[ a(x - \mathbf{x}_1) + \frac{\mathbf{y}_1}{\mathbf{x}_1} \right] x, \quad (32)$$

tzn.  $c = 0$ ,  $b = \frac{\mathbf{y}_1}{\mathbf{x}_1} - a$ , natomiast  $a$  jest wolnym parametrem, który należy wyznaczyć z warunku najkrótszego spadku.

Do powyższych równań należy dodać jeszcze warunek, że w chwili początkowej koralik spoczywa

$$v(t = 0) = 0.$$

Zauważmy, że w przypadku  $a = 0$ ,  $\beta = 0$  czas spadku można wyznaczyć ściśle i wynosi on

$$T_{a=0, \beta=0} = \frac{\sqrt{\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{y}_1^2}}{\sqrt{-2g\mathbf{y}_1/2}}, \quad (33)$$



gdzie  $\sqrt{\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{y}_1^2}$  jest drogą,  $\sqrt{-2g\mathbf{y}_1}$  – prędkością końcową wyznaczoną z zasady zachowania energii,  $\sqrt{-2g\mathbf{y}_1}/2$  – średnią prędkością.

Dla parametrów występujących w zadaniu mamy

$$T_{a=0, \beta=0} = 44,72 \text{ s.} \quad (34)$$

### Algorytm numeryczny

W celu rozwiązania numerycznego zamieniamy  $a \rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t}$ ,  $v \rightarrow \frac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{1 + (y')^2} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ , otrzymując układ równań różnicowych

$$\Delta v = \left[ -mg \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} - \beta v^2 \right] \Delta t,$$

$$\sqrt{1 + (y')^2} \Delta x = v \Delta t.$$

gdzie, zgodnie z poprzednimi rachunkami

$$y' = 2ax + b = 2ax + \frac{\mathbf{y}_1}{\mathbf{x}_1} - a \mathbf{x}_1. \quad (35)$$

Istnieje bardzo wiele algorytmów pozwalających na numeryczne rozwiązanie rozważanego zagadnienia. W niniejszym rozwiązaniu krok dzielimy na dwie części: najpierw wyznaczamy położenie w chwili  $t_n + \Delta t/2$ , w tym położeniu obliczamy siłę, na jej podstawie wyznaczamy prędkość w chwili  $t_n + \Delta t$ , a następnie położenie w chwili  $t_n + \Delta t$ , zgodnie z poniższymi wzorami

$$x_{n+1/2} = x_n + \frac{v_n}{\sqrt{1 + (y'_n)^2}} \frac{\Delta t}{2} \quad (36)$$

$$v_{n+1} = v_n + \left[ -g \frac{y'_{n+1/2}}{\sqrt{1 + (y'_{n+1/2})^2}} - \frac{\beta}{m} v_n^2 \right] \Delta t, \quad (37)$$

$$x_{n+1} = x_{n+1/2} + \frac{v_{n+1}}{\sqrt{1 + (y'_{n+1/2})^2}} \frac{\Delta t}{2} \quad (38)$$

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t, \quad (39)$$

gdzie  $y'_n, y'_{n+1/2}$  jest wyliczone na dla danego  $x_n, x_{n+1/2}$  przy wykorzystaniu wzoru (35).

### Wyznaczanie czasu spadku dla zadanej wartości $a$ – metoda A.

Dla ustalonej wartości  $a$  ( a również  $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1$  oraz  $g$  i  $\beta/m$ ) algorytm postępowania jest następujący:

0. przyjmujemy wstępną wartość  $\Delta t$ .
1. przyjmujemy  $x_0 = 0, v_0 = 0, t_0 = 0$
2. dla danych  $x_n, v_n, t_n$  wyznaczamy korzystając z (36 – 39) oraz (35)  $x_{n+1}, v_{n+1}, t_{n+1}$
3. jeśli  $x_{n+1} < \mathbf{x}_1$  oraz  $v_{n+1} > 0$ , to powtarzamy krok 2.; jeśli  $x_{n+1} \geq \mathbf{x}_1$ , to kończymy iterację i wstępnie przyjmujemy, że czas spadku dla danej wartości  $a$  wynosi  $T_a = t_{n+1}$ . Jeśli  $x_{n+1} < \mathbf{x}_1$  oraz  $v_{n+1} < 0$ , kończymy iterację bez przypisywania  $T_a$  żadnej wartości.

W tym podejściu niepewność otrzymanego czasu nie może być mniejsza niż  $\Delta t$ . Dodatkowo sprawdzimy dokładność otrzymanych wyników zmniejszając dwukrotnie  $\Delta t$  i porównując wyniki z otrzymanymi poprzednio. Dodatkowo, oczekujemy, że czas otrzymany w przypadku  $a = 0, \beta/m = 0$  jest zgodny w granicach oczekiwanej dokładności z wynikiem ścisłym.

## Alternatywna metoda wyznaczenia czasu spadku – metoda B

Ponieważ mamy wyznaczyć czas, a sumaryczna zmiana  $x$  jest określona, wygodne wydaje się potraktowanie jako zmienną niezależną  $x$ , co prowadzi do równań

$$\Delta v = \left[ -g \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} - \frac{\beta}{m} v^2 \right] \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{v} \Delta x, \quad (40)$$

$$\Delta t = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{v} \Delta x. \quad (41)$$

Ze względu na występowanie w powyższych wzorach  $v$  w mianowniku i to, że  $v = 0$  dla  $t = 0$ , powyższe równania nie nadają się bezpośredniego wykorzystania. Zauważmy jednak, że  $v\Delta v = \Delta \left( \frac{v^2}{2} \right)$ , a zatem oznaczając  $\frac{v^2}{2} = E$  można napisać następujące równania:

$$\Delta E = \left[ -gy' - \frac{\beta}{m} \sqrt{1 + (y')^2} v^2 \right] \Delta x, \quad (42)$$

$$v = \sqrt{2E}, \quad (43)$$

$$\Delta t = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{v} \Delta x. \quad (44)$$

Wybór oznaczenia  $E$  jest nieprzypadkowy, gdyż jest to podzielona przez  $m$  energia kinetyczna, a powyższe równania można wyprowadzić wprost z rozważań energetycznych.

W równaniu (44) nadal  $v$  występuje w mianowniku, ale nie będzie to problemem, jeśli nie będziemy wstawiali tam prędkości początkowej. Równanie iteracyjne może mieć postać

$$E_{n+1} = E_n + \left[ -gy'_{n+1/2} - \frac{\beta}{m} \sqrt{1 + (y'_{n+1/2})^2} v_n^2 \right] \Delta x, \quad (45)$$

$$v_{n+1} = \sqrt{2E_{n+1}}, \quad (46)$$

$$t_{n+1} = t_n + \frac{\sqrt{1 + (y'_{n+1/2})^2}}{(v_{n+1} + v_n)/2} \Delta x. \quad (47)$$

Wartość  $y'_{n+1/2}$  jest w powyższych równaniach wyznaczona dla  $x_n + \frac{\Delta x}{2}$  przy wykorzystaniu wzoru (35).

Zauważmy, że dla  $\beta = 0$  oraz stałej wartości  $y'$  powyższe równania są ściśle nawet dla dużych wartości  $\Delta x$ .

## Wyznaczanie czasu spadku dla zadanej wartości $a$ – metoda B

Dla ustalonej wartości  $a$  (a również  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{y}_1$  oraz  $g$  i  $\beta/m$ ) algorytm postępowania jest następujący:

0. przyjmujemy wstępną liczbę przedziałów  $N$  na które dzielimy przedział  $[0, \mathbf{x}_1]$  i wyznaczamy  $\Delta x = \frac{\mathbf{x}_1}{N}$

1. przyjmujemy  $v_0 = 0, E_0 = 0, t_0 = 0$
2. dla danych  $v_n, E_n, t_n$  wyznaczamy  $v_{n+1}, E_{n+1}, t_{n+1}$  korzystając z (45 – 47) oraz (35)
3. powtarzamy krok 2.  $N$  razy i wstępnie przyjmujemy, że czas spadku dla danej wartości  $a$  wynosi  $T_a = t_N$ .

Podobnie jak w metodzie A dokładność otrzymanych wyników oszacujemy zmniejszając dwukrotnie  $\Delta t$  i porównując wyniki z otrzymanymi poprzednio. Sprawdzamy również, czy czas otrzymany w przypadku  $a = 0, \beta/m = 0$  jest w granicach oczekiwanej dokładności zgodny z wynikiem ścisłym.

## Wyznaczanie wartości $a$ odpowiadającej najkrótszemu czasowi spadku

Wartość  $a$  odpowiadającą najkrótszemu spadkowi wyznaczono w następujący sposób:

- wstępnie przyjęto minimalną  $a_{\min}$  oraz maksymalną  $a_{\max}$  wartość parametru  $a$
- ten zakres podzielono na  $N_p$  równych przedziałów
- dla każdej z wartości  $a = a_{\min} + k \cdot \Delta a$ , gdzie  $\Delta a = \frac{a_{\max} - a_{\min}}{N_p}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N_p$ , wyznaczono czas spadku  $T_a$ .

Spośród otrzymanych czasów  $T_a$  wybrano najkrótszy, który oznaczamy jako  $t_{\text{naj}}$ , oraz odpowiadającą mu wartość  $a$ , którą oznaczamy jako  $a_{\text{naj}}$ . Dodatkowo wybrano najkrótszy czas spośród czasów większych od  $t_{\text{naj}}$ , który oznaczamy jako  $t_{\text{p-naj}}$  (prawie najkrótszy czas)

Wartości parametrów  $a$ , dla których koralik nie dolatuje do końca toru, nie są brane pod uwagę.

### Implementacja algorytmu

Programy w C++ oraz w Logo działające zgodnie z powyższymi algorytmami są dołączone do rozwiązania dostępnego na stronie KGOF.

Programy te wykorzystują procedury: procedura **krok** odpowiada krokowi opisanemu równaniami (36–39) lub równaniami (45–47). Procedura **ruch** powtarza kroki do momentu, aż  $x$  osiągnie lub przekroczy wartość  $\mathbf{x}_1$  ( $= 100$  m) lub prędkość (albo energia  $E$  w metodzie B) stanie się ujemna. Procedura **najkrotszyCzas** powtarza procedurę **ruch** zgodnie z opisem w punkcie *Wyznaczanie wartości  $a$  odpowiadającej najkrótszemu czasowi spadku*. Po każdym wywołaniu procedury **ruch** sprawdzane jest, czy otrzymany czas ruchu  $t$  jest mniejszy lub równy dotychczasowemu najkrótszemu czasowi zapamiętanemu w zmiennej **tnaj**. Jeśli jest krótszy, **tnaj** przyjmuje nową wartość **t**. Jednocześnie zmienne **anajmin** oraz **anajmax** odpowiadające minimalnej i maksymalnej wartości  $a$  dla najkrótszego czasu przyjmują aktualną wartość zmiennej **a** odpowiadającej parametrowi  $a$ . Jeśli **tnaj** jest równe **t**, odpowiednio modyfikowane są wartości zmiennych **anajmin** oraz **anajmax**.

Potrzebne do rozwiązania zagadnienia wartości zmiennych są zapisywane do pliku lub wyświetlane na ekranie.

### Obliczenia numeryczne

Jako wstępną wartość kroku czasowego przyjęto 0,1 s. Otrzymane wyniki przedstawia poniższa tabela. Ponieważ występujące w niej wartości  $a$  są dość małe, przedstawiono  $a \cdot \mathbf{x}_1 = a \cdot 100$  m. Gdy najkrótszy czasowi odpowiada wielu wartościom  $a$ , przedstawiono cały ich zakres.

Tabela 1. Minimalny czas dla  $\Delta t = 0,1$ ,  $a_{\min} = 0$ ,  $a_{\max} \cdot \mathbf{x}_1 = 5$ ,  $\Delta a \cdot \mathbf{x}_1 = 0,05$  otrzymany metodą A (opis oznaczeń jest w punkcie *Wyznaczanie wartości  $a$  odpowiadającej najkrótszemu czasowi spadku*)

$\beta/m$ (1/m)	$t_{\text{naj}}$ (s)	$a_{\text{naj}} \cdot \mathbf{x}_1$	$t_{\text{p-naj}}$ (s)	$t_{a=0}$ (s)
0	7,70	1,25 ÷ 1,90	7,80	44,80
0,0001	7,80	1,30 ÷ 1,70	7,90	44,80
0,001	13,60	0,25	14,60	45,50
0,01	52,40	0		52,40

W powyższej tabeli nie ma wartości  $t_{\text{p-naj}}$  oraz  $a_{\text{p-naj}}$  dla  $\beta/m = 0,01 \frac{1}{\text{m}}$ , gdyż już dla  $a \cdot \mathbf{x}_1 = 0,05$  koralik zatrzymywał się przed dolecaniem do  $x = \mathbf{x}_1$ . Za wyjątkiem przypadku tego właśnie przypadku, minimalne czasy odpowiadają  $a \cdot \mathbf{x}_1$  znajdującym się wewnątrz przedziału  $[0, 5]$ , zatem nie ma potrzeby jego rozszerzenia.

Czas dla  $\beta/m = 0$ ,  $a = 0$  jest zgodny z wynikiem (34) otrzymanym ze ścisłego wzoru. Żeby sprawdzić wiarygodność wyników dla  $\beta/m \neq 0$ , powtórzono obliczenia dla  $\Delta t = 0,05$  s oraz dla  $\Delta t = 0,02$  s.

Tabela 2. Minimalny czas dla  $\Delta t = 0,05$  s,  $a_{\min} = 0$ ,  $a_{\max} \cdot \mathbf{x}_1 = 5$ ,  $\Delta a \cdot \mathbf{x}_1 = 0,05$  otrzymany metodą A.

$\beta/m$ (1/m)	$t_{\text{naj}}$ (s)	$a_{\text{naj}} \cdot \mathbf{x}_1$	$t_{\text{p-naj}}$ (s)	$t_{a=0}$ (s)
0	7,70	1,30 ÷ 1,75	7,75	44,75
0,0001	7,85	1,25 ÷ 1,65	7,90	44,80
0,001	13,55	0,25	14,60	45,50
0,01	52,45	0		52,45

Tabela 3. Minimalny czas dla  $\Delta t = 0,02$  s,  $a_{\min} = 0$ ,  $a_{\max} \cdot \mathbf{x}_1 = 5$ ,  $\Delta a \cdot \mathbf{x}_1 = 0,05$  otrzymany metodą A.

$\beta/m$ (1/m)	$t_{\text{naj}}$ (s)	$a_{\text{naj}} \cdot \mathbf{x}_1$	$t_{\text{p-naj}}$ (s)	$t_{a=0}$ (s)
0	7,68	1,45 ÷ 1,50	7,70	44,74
0,0001	7,86	1,30 ÷ 1,55	7,88	44,80
0,001	13,56	0,25	14,60	45,48
0,01	52,42	0		52,42

Powyższe rezultaty oznaczają, że przyjęta metoda wyznaczania czasu spadku dla zadanego  $a$  daje wystarczającą dokładność dla  $\Delta t = 0,05$ . Jednak w przypadkach  $\beta/m = 0,01$  oraz  $\beta/m = 0,001$  wartość kroku  $\Delta a$  jest za mała. W związku z tym przeprowadzono kolejne obliczenia, z wynikami przedstawionymi w poniższej tabeli

Tabela 4. Minimalny czas dla  $\Delta t = 0,02$  s,  $\Delta a \cdot \mathbf{x}_1 = 0,001$  lub  $0,0005$  otrzymany metodą A.

$\beta/m$ (1/m)	$t_{\text{naj}}$ (s)	$a_{\text{naj}} \cdot \mathbf{x}_1$	$t_{\text{p-naj}}$ (s)	$\Delta a \cdot \mathbf{x}_1$
0,001	13,06	0,292 ÷ 0,293	13,08	0,001
0,01	38,42	0,0270 ÷ 0,0275	38,44	0,0005

Tabela 5. Minimalny czas dla  $\Delta t = 0,01$  s,  $\Delta a \cdot \mathbf{x}_1 = 0,001$  lub  $0,0005$  otrzymany metodą A.

$\beta/m$ (1/m)	$t_{\text{naj}}$ (s)	$a_{\text{naj}} \cdot \mathbf{x}_1$	$t_{\text{p-naj}}$ (s)	$\Delta a \cdot \mathbf{x}_1$
0,001	13,07	0,290 ÷ 0,295	13,10	0,001
0,01	38,42	0,0270 ÷ 0,0275	38,43	0,0005

## Wyniki i ich dyskusja

Na podstawie powyższych rezultatów można przyjąć, że szukane minimalne czasy oraz odpowiadające wartości parametru  $a$  są następujące

Tabela 6. Minimalne czasy oraz odpowiadające im wartości parametru  $a$ . Przedstawiono również czas ruchu po prostej  $t_{a=0}$ .

$\beta/m$ (1/m)	$t_{\text{naj}}$ (s)	$a_{\text{naj}}$ (1/m)	$t_{a=0}$ (s)
0	$7,7 \pm 0,2$	$0,015 \pm 0,002$	$44,8 \pm 0,2$
0,0001	$7,9 \pm 0,2$	$0,014 \pm 0,002$	$44,8 \pm 0,2$
0,001	$13,1 \pm 0,2$	$0,0029 \pm 0,0002$	$45,5 \pm 0,2$
0,01	$38,4 \pm 0,2$	$0,00027 \pm 0,00002$	$52,4 \pm 0,2$

Dla wartości  $\beta/m = 0$ ;  $0,0001 \frac{1}{\text{m}}$  czas ruchu po torze optymalnym jest znacząco różny od czasu odpowiadającego ruchowi po prostej. Wpływ siły oporu w przypadku  $\beta/m = 0,0001 \frac{1}{\text{m}}$  jest mały. W przypadku  $\beta/m = 0,001 \frac{1}{\text{m}}$  czas najkrótszego spadku jest już istotnie większy niż w przypadku braku oporu, a parabola znacznie bardziej zbliżona do prostej. Jest to związane z faktem, że siła oporu szybko rośnie ze wzrostem prędkości, co powoduje dla torów o większym  $a$  koralik po prostu nie doleci do punktu końcowego. Jest to szczególnie widoczne w przypadku  $\beta/m = 0,01 \frac{1}{\text{m}}$ : optymalny tor jest to bardzo zbliżony do prostej, choć nadal „zysk” z tego, że nie jest to prosta, jest zauważalny. Ciekawe w powyższych wynikach jest to, że o ile czasy najkrótszego spadku w przypadkach  $\beta/m \geq$

$0,001\frac{1}{m}$  istotnie zależą od  $\beta/m$ , to jednak zależność czasu spadku po prostej od  $\beta/m$  jest znacznie mniejsza.

#### **Punktacja zadania T4 (numerycznego)**

Równanie ruchu koralika (wzór (30) lub równoważny) wraz z warunkami początkowymi oraz wyznaczenie pochodnej  $y'$  (wzór (27) ) i wyznaczenie parametrów  $b$  oraz  $c$  paraboli – 2 pkt.

Układ równań różnicowych lub rekurencyjnych pozwalający na numeryczne wyznaczenie czasu dla danego toru oraz opis algorytmu i podanie sposobu jego implementacji – 2 pkt.

Przedstawienie algorytmu wyznaczenia czasu najkrótszego spadku – 1 pkt.

Podanie sposobu zagwarantowania lub sprawdzenia właściwej dokładności wyników – 1 pkt.

Czasy najkrótszego spadku wraz z odpowiadającymi im wartościami parametru  $a$  oraz czasy ruchu po prostej zgodne z podanymi w Tabeli 6. (wraz z podaniem niepewności wyników) – 3 pkt. Gdy zgodność z wynikami z Tabeli 6. jest tylko dla dwóch wartości  $\beta/m$  – 1 pkt, gdy dla trzech – 2 pkt.

Jakościowe omówienie otrzymanych wyników – 1 pkt.

# LXVI OLIMPIADA FIZYCZNA

## ZAWODY I STOPNIA

### CZEŚĆ DOŚWIADCZALNA

Za każde z zadań doświadczalnych można otrzymać maksymalnie 40 punktów.

#### Zadanie D1.

Jeśli magnes porusza się wewnątrz przewodzącej rury, to w materiale rury indukują się prądy wirowe. Powodują one powstanie siły działającej na magnes przeciwnie do kierunku ruchu. Wartość siły dana jest wzorem:

$$F = bv^\alpha,$$

gdzie  $v$  to prędkość magnesu względem rury, zaś  $b$  oraz  $\alpha$  są pewnymi stałymi.

Mając do dyspozycji:

- rurę miedzianą o długości co najmniej 1 m,
- magnes neodymowy o średnicy mniejszej od średnicy wewnętrznej rury,
- długi, cienki drut miedziany w izolacji (np. emaliowany) z odizolowanymi końcówkami,
- oscyloskop,
- przewody i zaciski umożliwiające zestawienie układu pomiarowego,
- kilka obciążników wykonanych z niemagnetycznego materiału,
- wagę kuchenną,
- papier milimetrowy,
- linijkę, taśmę klejącą, plastelinę, karton,

wyznacz współczynnik  $\alpha$  dla użytej rury miedzianej.

#### Uwagi:

1. Jeśli nie masz dostępu do oscyloskopu, możesz użyć komputera z kartą dźwiękową, gniazdem mikrofonowym i odpowiednim oprogramowaniem, tj. rejestratorem i graficznym analizatorem dźwięku, np. Audacity (<http://www.audacityteam.org/>).
2. Do wykonania doświadczenia możesz użyć typowej miedzianej rury hydraulicznej o średnicy np. 22 mm, dostępnej w sklepach budowlanych.
3. W rozwiązaniu podaj wymiary (długość, średnica zewnętrzna, grubość ścianki) użytej rury.

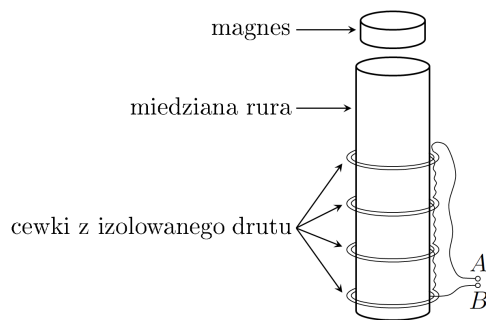
#### Rozwiązanie zadania D1.

##### Część teoretyczna

Magnes upuszczony wewnątrz ustawionej pionowo przewodzącej rury będzie się początkowo poruszał ruchem przyspieszonym, a po odpowiednio długim czasie – ruchem w przybliżeniu jednostajnym. Nastąpi to wtedy, gdy siła działająca na magnes przeciwnie do kierunku jego ruchu, będąca skutkiem obecności prądów wirowych w materiale rury, zrównoważy ciężar magnesu. Prędkość magnesu w takiej sytuacji można wyznaczyć, nawijając wokół rury, za pomocą izolowanego drutu, kilka cewek rozmieszczonych wzdłuż rury w znanych odległościach (np. dla uproszczenia jednakowych i równych  $d$ ) i łącząc je szeregowo, jak schematycznie przedstawiono na Rys. 1. Poruszający się magnes, mijając płaszczyzny kolejnych cewek, będzie powodował indukowanie w nich zmiennej siły elektromotorycznej, której zależność od czasu zarejestrować można za pomocą oscyloskopu podłączonego do zacisków  $A$  i  $B$ . Dzięki temu można wyznaczyć czas  $t_i$ , w jakim magnes mija płaszczyznę  $i$ -tej cewki, a dzięki znajomości odległości  $d$  pomiędzy cewkami można wyznaczyć prędkość  $v$  magnesu. Aby wyznaczyć współczynnik  $\alpha$  w równaniu podanym w treści zadania, należy wyznaczyć prędkość  $v$  dla różnych mas  $m$  spadającego magnesu (masę magnesu można zmieniać za pomocą niemagnetycznych obciążników) i dopasować odpowiednią krzywą do zależności  $F = mg$  od  $v$ . Wygodnie jest to zrobić, wykreślając zależność logarytmu  $m$  od logarytmu  $v$ , bowiem po zlogarytmowaniu stronami równania podanego w treści zadania otrzymujemy:

$$\log(F) = \log(mg) = \log(m) + \log(g) = \log(b) + \alpha \log(v), \quad (1)$$

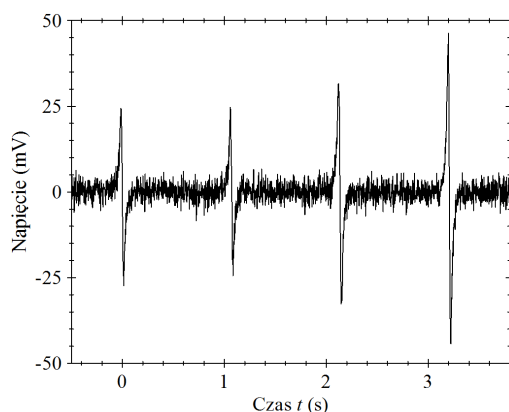
Zatem zależność  $\log(m)$  od  $\log(v)$  jest zależnością liniową, do której można dopasować prostą o współczynniku kierunkowym  $\alpha$ .



Rys. 1. Schemat układu doświadczalnego pozwalającego na wyznaczenie prędkości magnesu wewnątrz przewodzącej rury.

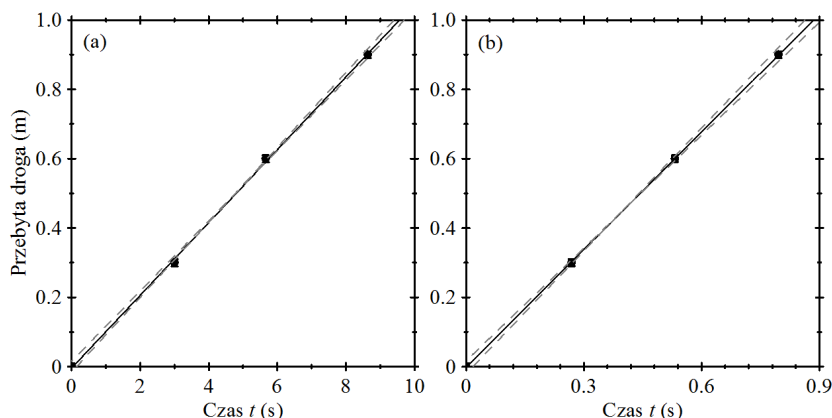
### Część doświadczalna

W celu wykonania doświadczenia zestawiono układ eksperymentalny według schematu przedstawionego na Rys. 1, nawijając wokół miedzianej rury 4 cewki o kilkunastu zwojach i rozmieszczając je w odległości  $d = 30$  cm od siebie. Końcówki drutu, z którego nawinięto cewki, podłączono do oscyloskopu. Przykładowy przebieg zarejestrowany za pomocą oscyloskopu przedstawia Rys. 2:



Rys. 2. Przykładowa zależność napięcia rejestrowanego przez oscyloskop od czasu podczas spadania magnesu wewnątrz przewodzącej rury.

Gdy magnes zbliża się do płaszczyzny którejś z cewek, napięcie indukowane w obwodzie rośnie, następnie, gdy magnes mija tę płaszczyznę, gwałtownie zmienia znak, po czym dąży do wartości bliskiej zeru. Za moment przejścia magnesu przez płaszczyznę cewki można uznać moment, w którym napięcie indukowane w obwodzie zrównuje się z zerem podczas gwałtownej zmiany znaku. Mając wyznaczone czasy  $t_i$  mijania przez magnes płaszczyzn  $i$ -tej cewki, można wykreślić zależność położenia magnesu od czasu:



Rys. 3. Przykładowa zależność położenia magnesu od czasu wraz z dopasowaną prostą (linia ciągła) dla najmniejszej (a) i największej (b) masy  $m$  magnesu wraz z obciążnikami. Linie przerywane odpowiadają prostym o możliwie najmniejszym i największym nachyleniu.

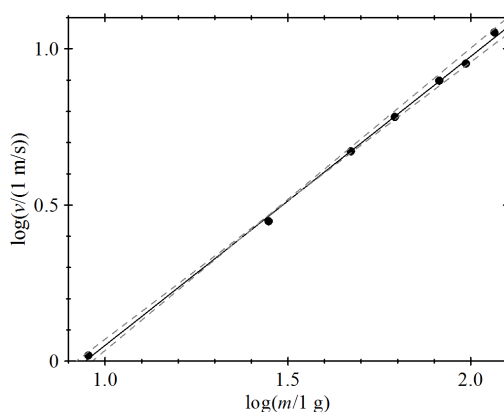
Jak widać, wykreślone punkty z bardzo dobrą dokładnością układają się na prostej, zarówno dla najmniejszej, jak i największej masy  $m$ . Oznacza to, że w czasie rejestrowania ruchu magnesu poruszał się on już ruchem jednostajnym. Współczynnik kierunkowy tej prostej jest równy prędkości magnesu i w przypadku (a) z Rys. 3 wynosi  $(0,102 \pm 0,004) \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , a w przypadku (b) wynosi  $(1,15 \pm 0,02) \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Analogiczną procedurę wyznaczania prędkości  $v$  magnesu przeprowadzono dla różnych wartości masy  $m$  magnesu z obciążnikami, wyznaczonej za pomocą wagi kuchennej. Dla każdej wartości masy  $m$  pomiar powtarzano czterokrotnie. Otrzymane wyniki przedstawia tabela:

$m$ (g)	$v_{\text{sr}}$ ( $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ )	$v_{\text{max}} - v_{\text{min}}$ ( $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ )
9	0,104	0,009
28	0,281	0,010
47	0,470	0,016
62	0,605	0,015
82	0,791	0,022
97	0,897	0,030
116	1,13	0,05

Tab. 1. Wyniki pomiaru prędkości  $v$  magnesu dla różnych wartości masy  $m$  magnesu wraz z obciążnikami: średnia wartość  $v_{\text{sr}}$  z czterech pomiarów oraz różnica pomiędzy wartością maksymalną ( $v_{\text{max}}$ ) i minimalną ( $v_{\text{min}}$ ), będąca oszacowaniem niepewności wartości  $v_{\text{sr}}$ .

Korzystając z tych danych, wykreślono następnie zależność  $\log(v)$  od  $\log(m)$ :



Rys. 4. Zależność logarytmu prędkości granicznej  $v$  magnesu (w metrach na sekundę) od logarytmu masy  $m$  magnesu wraz z obciążnikami (w gramach) wraz z dopasowaną prostą (linia ciągła). Linie przerywane odpowiadają prostym o możliwie najmniejszym i największym nachyleniu.

Współczynnik kierunkowy dopasowanej prostej, będący szukanym współczynnikiem, wynosi:

$$\alpha = 0,94 \pm 0,06.$$

Niepewność tego wyniku oszacowano na podstawie współczynników kierunkowych dopasowanych prostych o możliwie największym i najmniejszym nachyleniu (Rys. 4). Głównym źródłem tej niepewności są błędy przypadkowe, których skutkiem jest rozrzut otrzymywanych wartości prędkości  $v$  w kolejnych powtórzeniach pomiaru dla tej samej masy  $m$ . Błędy te mogą wynikać np. z przypadkowego ocierania się magnesu o ścianki rury podczas spadku.

### Punktacja zadania D1.

#### Część teoretyczna

Pomysł na wyznaczenie prędkości granicznej przez badanie zależności położenia od czasu – 2 pkt.

Pomysł na zastosowanie cewek do wykrywania momentu przelotu magnesu przez płaszczyznę cewki – 3 pkt.

Pomysł na połączenie więcej niż dwóch cewek lub wykonanie wielokrotnego pomiaru przy użyciu dwóch cewek umieszczonych w różnych położeniach – 3 pkt.

Wzór (1) lub równoważny – 2 pkt.

#### Część doświadczalna

Zestawienie i opis układu umożliwiającego poprawne wykonanie doświadczenia – 2 pkt.

Poprawna interpretacja sygnału rejestrowanego przez oscyloskop i wyznaczenie momentów mijania płaszczyzn cewek przez magnes – 1 pkt

Wykonanie pomiarów prędkości  $v$  dla co najmniej 4 różnych mas  $m$  i sprawdzenie czy zależność  $\log(v)$  od  $\log(m)$  jest liniowa – 2 pkt.



Co najmniej trzykrotne powtórzenie pomiaru prędkości  $v$  dla każdej masy  $m$  – 2 pkt.  
Wyznaczenie wartości współczynnika  $\alpha$  na podstawie dopasowania prostej – 1 pkt  
Wynik liczbowy wraz z oszacowaniem jego niepewności – 1 pkt  
Wskazanie głównych źródeł niepewności – 1 pkt

### Zadanie D2.

Zależność oporu typowego opornika od temperatury można z dobrym przybliżeniem opisać wzorem:

$$R = R_0 (1 + \alpha(T - T_0)),$$

gdzie  $R$  to opór opornika,  $T$  to jego temperatura,  $R_0$  to jego opór w temperaturze pokojowej,  $T_0$  to wartość temperatury pokojowej, a  $\alpha$  to pewna stała nazywana współczynnikiem temperaturowym opornika.

Mając do dyspozycji:

- cztery oporniki o jednakowym nominalnym oporze wynoszącym około  $1\text{ k}\Omega$  i mocy znamionowej z przedziału  $0,5\text{ W} - 1,0\text{ W}$ ,
- źródło prądu stałego o napięciu kilku woltów (zasilacz lub baterię),
- cyfrowy woltomierz o dokładności odczytu 3 cyfr znaczących,
- naczynie (np. garnek lub kubek) i wrzątek,
- termometr,
- szczelną torebkę foliową,
- przewody i zaciski umożliwiające zestawienie układu pomiarowego,

wyznacz jak najdokładniejszą metodą współczynnik temperaturowy jednego z użytych oporników.

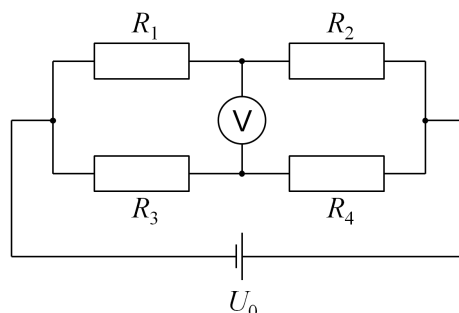
### Uwagi:

1. Jako woltomierza możesz użyć cyfrowego miernika uniwersalnego.
2. Jeżeli nie masz możliwości zdobycia oporników o podanych wartościach oporu, przed 31 października 2016 r. przyślij na adres KGOF zaadresowaną do siebie kopertę ze znaczkiem pocztowym.

### Rozwiązanie zadania D2.

#### Część teoretyczna

Ponieważ zmiana oporu typowego opornika na skutek zmiany temperatury jest bardzo mała, do wykonania doświadczenia potrzebna jest bardzo dokładna metoda pomiaru oporu. Metodą taką jest metoda mostkowa, którą można zrealizować w układzie schematycznie przedstawionym na Rys. 5:



Rys. 5. Schemat układu mostkowego pozwalającego na badanie zmian oporu jednego z oporników na skutek zmiany temperatury.

W takim układzie, jeżeli temperatura wszystkich oporników jest równa temperaturze pokojowej, a natężenie prądu płynącego przez woltomierz jest pomijalnie małe, to wartość napięcia  $U$  wskazywanego przez woltomierz wynika z drobnych fabrycznych różnic pomiędzy oporami  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  i  $R_4$ , i wynosi:

$$U = U_0 \left( \frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right), \quad (2)$$

gdzie  $U_0$  jest wartością napięcia użytego źródła prądu. Jeżeli natomiast temperatura jednego z oporników (np. tego o oporze  $R_1$ ) zmieni się o  $\Delta T$ , to jego opór zmieni się o:

$$\Delta R = R_0 \alpha \Delta T. \quad (3)$$

Wskutek tej zmiany wartość napięcia wskazywanego przez woltomierz zmieni się o:

$$\Delta U = U_0 \left( \frac{R_1 + \Delta R}{R_1 + \Delta R + R_2} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) = U_0 \frac{\Delta R R_2}{(R_1 + R_2)^2 + \Delta R (R_1 + R_2)}. \quad (4)$$

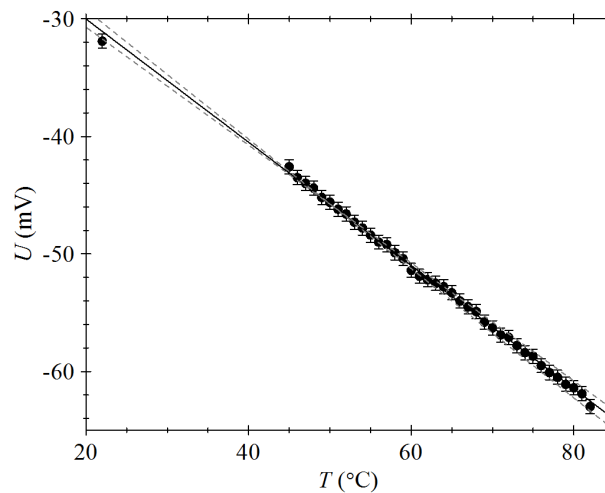
Ponieważ  $R_1 \approx R_2 \approx R_0$  oraz  $\Delta R \ll R_0$ , to powyższe wyrażenie można z dobrą dokładnością przybliżyć wyrażeniem:

$$\Delta U = U_0 \frac{\Delta R R_0}{(2R_0)^2} = U_0 \frac{\Delta T \alpha R_0^2}{(2R_0)^2} = \Delta T \frac{U_0 \alpha}{4}. \quad (5)$$

Zatem, wykreślając zależność napięcia wskazywanego przez woltomierz od temperatury opornika i dopasowując do tej zależności prostą, możemy wyznaczyć wartość współczynnika  $\frac{U_0 \alpha}{4}$ . Temperaturę opornika możemy natomiast zmieniać, umieszczając go w szczelnej torebce foliowej i zanurzając razem z termometrem w naczyniu z gorącą początkowo wodą.

### Część doświadczalna

W celu wykonania doświadczenia wykonano obwód elektryczny według schematu przedstawionego na Rys. 5, przy użyciu baterii o napięciu znamionowym 9 V, cyfrowego miernika uniwersalnego i czterech oporników o oporze znamionowym  $960 \Omega$  i mocy znamionowej 0,5 W. Siła elektromotoryczna baterii, wyznaczona za pomocą miernika uniwersalnego, była równa  $U_0 = (9,35 \pm 0,01) \text{ V}$ . Gdy wszystkie oporniki miały temperaturę pokojową, napięcie wskazywane przez woltomierz wynosiło  $(-31,9 \pm 0,1) \text{ mV}$ . Następnie jeden z oporników umieszczono w szczelnej torebce foliowej i zanurzono razem z termometrem w naczyniu z wrzątkiem. Zadbano przy tym, aby końcówka termometru znajdowała się możliwie blisko opornika, a opornik nie znajdował się blisko ścianek naczynia (aby uniknąć znaczących niejednorodności temperatury wody wokół opornika). Następnie, w miarę stygnięcia wody w naczyniu, notowano wartość temperatury  $T$  wskazywaną przez termometr i odpowiadającą jej wartość napięcia  $U$  wskazywaną przez woltomierz. Otrzymane wyniki przedstawiono na poniższym wykresie:



Rys. 6. Zależność napięcia wskazywanego przez woltomierz od temperatury jednego z oporników, wraz z dopasowaną prostą (linia ciągła). Linie przerywane odpowiadają prostym o możliwie najmniejszym i największym nachyleniu.

Z wykresu odczytano współczynnik kierunkowy dopasowanej prostej  $\frac{U_0 \alpha}{4} = (-0,524 \pm 0,015) \frac{\text{mV}}{^\circ\text{C}}$ , a stąd:

$$\alpha = (-2,24 \pm 0,06) \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Głównym źródłem niepewności otrzymanej wartości współczynnika  $\alpha$  są niepewności odczytu napięcia  $U$ , wpływające na niepewność dopasowania prostej do zależności  $U$  od  $T$ .

### Uwaga:

Według danych producenta opornika użytego w rozwiązaniu zadania wartość bezwzględna jego współczynnika temperaturowego nie powinna przekraczać  $3,5 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ .

## Punktacja zadania D2.

### Część teoretyczna

Pomysł na dokładny pomiar zmian oporu opornika – 5 pkt.

Wzór (2) lub równoważny – 2 pkt.

Wzór (5) lub równoważny – 3 pkt.

### Część doświadczalna

Zestawienie i opis układu umożliwiającego poprawne wykonanie doświadczenia – 2 pkt.

Wykonanie pomiarów napięcia  $U$  dla co najmniej 7 różnych temperatur opornika – 4 pkt.

Wyznaczenie wartości współczynnika  $\alpha$  na podstawie dopasowania prostej – 2 pkt.

Wynik liczbowy wraz z oszacowaniem jego niepewności – 1 pkt

Wskazanie głównych źródeł niepewności – 1 pkt

## Uwaga dla KOOF:

Rozwiązanie mniej dokładną metodą pomiaru niż metoda mostkowa należy punktować maksymalnie na 50% łącznej liczby możliwych do uzyskania punktów.

## Zadanie D3.

Mając do dyspozycji:

- przezroczystą, gładką, biurową taśmę klejącą,
- wskaźnik laserowy,
- biały, sztywny karton,
- plastelinę, linijkę, taśmę mierniczą, nożyczki,
- zaciemnione pomieszczenie,

wyznacz współczynnik załamania światła dla folii, z której wykonana jest użyta taśma klejąca. Na kartkę z rozwiązaniem naklej kawałek tej taśmy.

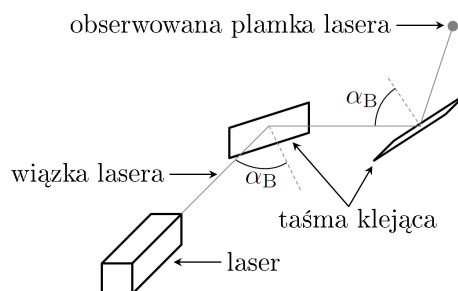
## Uwagi:

1. Światło laserowe może być niebezpieczne dla wzroku. Nigdy nie kieruj wiązki lasera w stronę ludzi ani zwierząt.
2. Typowy wskaźnik laserowy emituje światło niespolaryzowane.

## Rozwiązanie zadania D3.

### Część teoretyczna

Szukany współczynnik załamania światła można znaleźć wyznaczając kąt Brewstera  $\alpha_B$  dla użytej taśmy klejącej. Kąt ten można znaleźć odbijając dwukrotnie wiązkę lasera od powierzchni taśmy klejącej tak, aby drugie z odbić było całkowicie wygaszone. Dokonać tego można w układzie schematycznie pokazanym na Rys. 7:

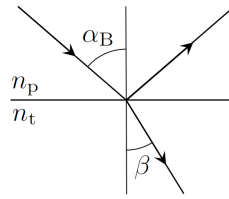


Rys. 7. Schemat układu pozwalającego na wyznaczenie współczynnika załamania światła poprzez dwukrotne odbicie wiązki lasera pod kątem Brewstera.

W sytuacji przedstawionej na powyższym rysunku wiązka lasera po pierwszym odbiciu od taśmy klejącej pod kątem Brewstera jest całkowicie spolaryzowana liniowo. Jeżeli drugie odbicie nastąpi w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny wyznaczonej przez promień padający i odbity w pierwszym odbiciu, a dodatkowo odbicie to nastąpi również pod kątem Brewstera, to promień odbity zostanie całkowicie wygaszony. W takiej sytuacji z prawa Snelliusa mamy:

$$n_p \sin \alpha_B = n_t \sin \beta, \quad (6)$$

gdzie  $n_p$  to współczynnik załamania dla powietrza,  $n_t$  to współczynnik załamania dla taśmy klejącej, a  $\beta$  to kąt załamania światła w rozważanej sytuacji, jak zaznaczono na Rys. 8:



Rys. 8. Schemat przejścia wiązki lasera przez granicę ośrodków (powietrza i taśmy klejącej).

Jednocześnie, ponieważ  $\alpha_B$  jest kątem Brewstera, to:

$$\alpha_B + \beta = 90^\circ. \quad (7)$$

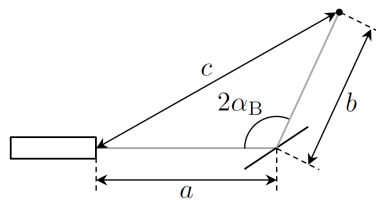
Stąd, przyjmując  $n_p = 1$ , otrzymujemy:

$$\sin\alpha_B = n_t \sin\beta = n_t \cos\alpha_B, \quad (8)$$

a zatem:

$$\operatorname{tg}\alpha_B = n_t. \quad (9)$$

Znajdując więc takie dwie płaszczyzny i kąty odbicia wiązki lasera od taśmy klejącej, przy których wiązka odbita ulega wygaszeniu, możemy bezpośrednio obliczyć wartość  $n_t$ . Kąt padania  $\alpha_B$  można natomiast wyznaczyć, mierząc za pomocą linijki i taśmy mierniczej odległości pomiędzy wskaźnikiem laserowym i plamkami lasera na kolejnych kawałkach kartonu, jak pokazano na Rys. 9:



Rys. 9. Schemat wyznaczenia kąta padania wiązki lasera na powierzchnię taśmy klejącej).

W takiej sytuacji, korzystając z wyrażenia na pole powierzchni trójkąta o bokach  $a$ ,  $b$  i  $c$ , możemy zapisać tożsamość:

$$\frac{ab \sin 2\alpha_B}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad (10)$$

gdzie  $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ , a stąd:

$$\alpha_B = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{ab} \quad (11)$$

### Część doświadczalna

W celu wykonania doświadczenia zestawiono układ doświadczalny według schematu przedstawionego na Rys. 7. Dwa kawałki taśmy klejącej przyklejono do dwóch kawałków sztywnego, płaskiego kartonu. Wskaźnik laserowy przymocowano poziomo do stołu za pomocą plasteliny. Jeden z kawałków kartonu z taśmą klejącą przymocowano pionowo do stołu, tak aby wiązka lasera padała na taśmę pod pewnym kątem. Następnie na drodze wiązki odbitej od tej taśmy umieszczono drugi kawałek kartonu z taśmą klejącą w taki sposób, aby wiązka od niej odbita leżała w płaszczyźnie pionowej. W wiązce tej umieszczono kolejny kawałek kartonu służący za ekran, na którym obserwowano natężenie plamki lasera. Następnie zmieniano kąt pomiędzy drugim z kawałków kartonu a płaszczyzną stołu (a w konsekwencji kąt padania wiązki lasera) w taki sposób, aby otrzymać najmniejsze możliwe natężenie plamki lasera na ekranie. Po osiągnięciu takiego stanu zmieniano kąt padania wiązki na pierwszy z kartonów również w taki sposób, aby natężenie plamki lasera na ekranie było możliwe najmniejsze. Po całkowitym wygaszeniu tej plamki wyznaczono oba kąty padania w sposób przedstawiony na Rys. 9. Taki pomiar powtórzono trzykrotnie, a otrzymane wartości  $\alpha_B$  przedstawiono w poniższej tabeli:

nr pomiaru	wartości $\alpha_B$
1	$(53,6 \pm 0,5)^\circ$ ; $(52,6 \pm 0,5)^\circ$
2	$(52,7 \pm 0,5)^\circ$ ; $(51,4 \pm 0,5)^\circ$
3	$(53,2 \pm 0,5)^\circ$ ; $(54,2 \pm 0,5)^\circ$

Tab. 2. Wyniki pomiaru kąta  $\alpha_B$ .

Średnia wartość powyższych wyników to  $(53,0 \pm 0,5)^\circ$ , a stąd:

$$n_t = 1,33 \pm 0,03.$$

Głównym źródłem niepewności otrzymanego wyniku jest niepewność wyznaczenia takiego położenia kawałków kartonu z taśmą klejącą, przy którym natężenie plamki lasera na ekranie (oceniane nieuzbrojonym okiem) jest najmniejsze.

**Uwaga:**

Alternatywną metodą rozwiązania mogłaby być metoda wykorzystująca nieprostokątne przejście wiązki lasera przez grubą, płasko-równoległą warstwę taśmy klejącej. Jednak wtedy wyznaczony współczynnik załamania byłby średnim współczynnikiem folii, z której wykonana jest taśma, i warstwy kleju o nieznanym parametrach. Dlatego metoda taka nie jest poprawna.

**Punktacja zadania D3.**

Część teoretyczna

Pomysł na wykorzystanie odbicia pod kątem Brewstera – 3 pkt.

Pomysł na dwukrotne odbicie pod kątem Brewstera prowadzące do całkowitego wygaszenia wiązki lasera – 5 pkt.

Wzór (9) lub równoważny – 1 pkt

Wzór (11) lub równoważny – 1 pkt

Część doświadczalna

Zestawienie i opis układu umożliwiającego poprawne wykonanie doświadczenia – 3 pkt.

Wyznaczenie obu kątów padania – 3 pkt.

Co najmniej trzykrotne powtórzenie pomiaru – 2 pkt.

Wynik liczbowy wraz z oszacowaniem jego niepewności – 1 pkt

Wskazanie głównych źródeł niepewności – 1 pkt