# LXVI OLIMPIADA FIZYCZNA

## ZAWODY II STOPNIA

### CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

**Zadanie 1.**

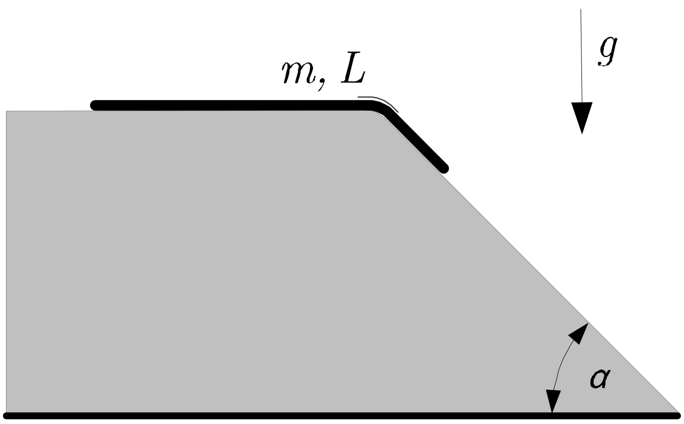
Dwa jednakowe dodatnie ładunki punktowe $q$ były początkowo umieszczone w odległości $2d$ od siebie. W płaszczyźnie symetralnej odcinka łączącego te ładunki krążyło po okręgu o promieniu $r_d$ małe ciało o masie $m$ i ładunku ujemnym $-q$. Następnie ładunki dodatnie przysunięto z jednakową prędkością do siebie tak, że w stanie końcowym ciało o ładunku ujemnym krążyło też po okręgu.

Wyznacz promień $r_0$ tego okręgu.

Weź pod uwagę tylko oddziaływanie elektrostatyczne ładunków. Ładunki znajdowały się w próżni. Zarówno w stanie początkowym, jak i w stanie końcowym ładunki dodatnie były nieruchome.

**Zadanie 2.**

Na górnej (poziomej) oraz pochyłej, bocznej ścianie nieruchomego klocka o przekroju w kształcie trapezu położono wiotki, cienki, nierozciągliwy, jednorodny sznurek o masie $m$ i długości $L$. Sznurek jest krótszy od pochyłej ściany bocznej.




Współczynnik tarcia sznurka o górną ścianę klocka jest równy $f$, a w innych miejscach nie występuje tarcie. Krawędź łącząca pochyłą ścianę z górną jest lekko zaokrąglona. Do niej jest przymocowana krótka rurka o średnicy wewnętrznej nieco większej od średnicy sznurka, gwarantująca swobodne przesuwanie się sznurka od jednej ściany do drugiej bez odrywania się od którejś z nich. Kąt nachylenia bocznej ściany względem poziomu jest równy $\alpha$. Przyspieszenie ziemskie wynosi $g$.

Koniec sznurka znajdujący się na pochyłej ścianie ciągnięto powoli w dół do momentu, aż zaczął się zsuwać, a następnie sznurkowi pozwolono poruszać się swobodnie. Przyjmij, że prędkość sznurka w chwili rozpoczęcia zsuwania jest równa 0. Obie części sznurka są stale proste i prostopadłe do krawędzi łączącej górną ścianę ze ścianą pochyłą.

Wyznacz prędkość sznurka względem klocka w chwili, gdy w całości znajdzie się na pochyłej ścianie klocka.

**Zadanie 3.**

Pewna planeta gazowa jest statyczna (nie ma makroskopowych ruchów gazu), sferycznie symetryczna i składa się z gazu doskonałego o stałej temperaturze $T$ i masie molowej $\mu$. Masa gazu zawartego w kuli o promieniu $r$ i środku pokrywającym się ze środkiem planety jest – w pewnym danym zakresie $R_\mathrm{w} \le r \le R_\mathrm{z}$ – dana wzorem

$$M(r) = M_\mathrm{z} \cdot \left(\frac{r}{R_\mathrm{z}}\right)^{\alpha}.$$

a) Przyjmując, że $R_\mathrm{z}$ jest dane, wyznacz parametry $M_\mathrm{z}$ oraz $\alpha$.

b) Wysłano sondę, będącą kulą o masie $m_\mathrm{s}$ i promieniu $r_\mathrm{s}$, do wnętrza tej planety. W jakiej odległości od środka planety taka sonda może się w niej unosić swobodnie i bez ruchu? Wykorzystaj wyniki punktu a). Załóż, że ta szukana odległość znajduje się między $R_\mathrm{w}$ a $R_\mathrm{z}$ i że jest znacznie większa od $r_\mathrm{s}$.

**Rozwiązanie zadania 1**.

Układ ma symetrię obrotową wokół osi przechodzącej przez ładunki dodatnie, zatem moment pędu względem tej osi jest zachowany

$$mr_d v_d = mr_0 v_0, \tag{1}$$

gdzie $v_d$ jest prędkością początkową, a $v_0$ – końcową. Ponieważ i na początku, i na końcu ciało porusza się po okręgu, obowiązują równania

$$\frac{mv_d^2}{r_d} = F_d, \quad \frac{mv_0^2}{r_0} = F_0, \tag{2}$$

gdzie

$$F_d = \frac{2q^2 r_d}{4\pi\varepsilon_0 \left(d^2 + r_d^2\right)^{3/2}}, \tag{3}$$

$$F_0 = \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}. \tag{4}$$

Stąd szukany promień okręgu wynosi

$$r_0 = \frac{r_d^4}{\left(d^2 + r_d^2\right)^{3/2}}. \tag{5}$$

Uwaga:

Ponieważ przy przesuwaniu ładunków musimy wykonać pracę zarówno przeciw sile odpychającej ładunki dodatnie, jak i przeciw siłom oddziaływania ładunków dodatnich z ładunkiem ujemnym, energia układu nie jest zachowana.

**Punktacja zadania 1**

Wykorzystanie zasady zachowania momentu pędu (wzór (1)) – 3 pkt.

Warunki ruchu po okręgu (wzór (2)) – 2 pkt.

Radialna składowa siły elektrostatycznej w przypadku odległości 0 (wzór (4)) – 1 pkt.

Radialna składowa siły elektrostatycznej w przypadku odległości $2d$ (wzór (3)) – 2 pkt.

Wynik końcowy (wzór (5)) – 2 pkt.

**Rozwiązanie zadania 2**

Niech $l_0$ oznacza długość sznurka pozostałego na górnej ścianie w momencie, gdy sznurek zaczyna się swobodnie zsuwać. W tej granicznej sytuacji siła tarcia jest równoważona przez siłę ściągającą, a zatem

$$\frac{l_0}{L} mgf = \frac{L - l_0}{L} mg \sin\alpha. \tag{6}$$

Stąd

$$l_0 = \frac{\sin\alpha}{f + \sin\alpha} L. \tag{7}$$

Jeśli przyjmiemy, że położenie górnej ściany klocka odpowiada zerowej energii potencjalnej, to początkowa energia sznurka (przed rozpoczęciem zsuwania) wynosi

$$E_{\text{pocz}} = -mg \frac{L - l_0}{L} \frac{L - l_0}{2} \sin\alpha. \tag{8}$$

Końcowa energia sznurka wynosi

$$E_{\text{kon}} = \frac{m}{2} v^2 - \frac{mgL\sin\alpha}{2}, \tag{9}$$

gdzie $-\frac{mgl\sin\alpha}{2}$ jest grawitacyjną energią potencjalna sznurka w rozważanym momencie – przyjęliśmy tu, że położenie górnej ściany klocka odpowiada zerowej energii potencjalnej. W trakcie zsuwania się siła tarcia działająca na sznurek zmienia się liniowo z przesunięciem od $\frac{l_0}{L}mgf$ do 0, zatem straty energii wynoszą

$$\frac{1}{2}\frac{l_0}{L}mgf \cdot l_0. \tag{10}$$

Rozważania energetyczne prowadzą do równości $E_{\text{kon}} - E_{\text{pocz}} = -\frac{1}{2}\frac{l_0}{L}mgf \cdot l_0$, czyli

$$\frac{m}{2}v^2 - \frac{mgL\sin\alpha}{2}\left[1 - \left(1 - \frac{l_0}{L}\right)^2\right] = -\frac{1}{2}\frac{l_0}{L}mgf \cdot l_0. \tag{11}$$

Z tego równania, uwzględniając wzór (7), wyznaczamy szukaną prędkość

$$v = \sqrt{\frac{gL}{f+\sin\alpha}}\sin\alpha. \tag{12}$$

**Punktacja zadania 2**

Warunek na położenie sznurka, od którego zaczyna się zsuwanie (wzór (6)) – 2 pkt.

Energia początkowa (wzór (8)) – 1 pkt

Energia końcowa (wzór (9)) – 2 pkt (w tym energia potencjalna –1 pkt., energia kinetyczna – 1 pkt.).

Praca wykonana przeciw siłom tarcia (wzór (10)) – 2 pkt.

Zasada zachowania energii z uwzględnieniem strat związanych z tarciem (wzór (11) lub równoważny) – 1 pkt.

Szukana prędkość (wzór (12)) – 2 pkt.

**Rozwiązanie zadania 3**

a) Rozważmy cienką warstwę planety w odległości $r$ od jej środka; grubość tej warstwy oznaczmy przez d$r$. Wówczas gęstość planety w odległości $r$ od środka możemy wyznaczyć, dzieląc masę takiej warstwy przez jej objętość $\mathrm{d}V = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$; ze wzoru na $M(r)$ otrzymujemy:

$$\rho(r) = \alpha\frac{M_\text{z}}{4\pi r^2 R_\text{z}} \cdot \left(\frac{r}{R_\text{z}}\right)^{\alpha-1} = \alpha\frac{M_\text{z}}{4\pi R_\text{z}^3} \cdot \left(\frac{r}{R_\text{z}}\right)^{\alpha-3}. \tag{13}$$

Z równania stanu gazu doskonałego zależność ciśnienia od $r$ jest opisywana wzorem

$$p(r) = \frac{RT}{\mu}\rho(r) = \alpha\frac{RT}{\mu}\frac{M_\text{z}}{4\pi R_\text{z}^3} \cdot \left(\frac{r}{R_\text{z}}\right)^{\alpha-3}. \tag{14}$$

Natężenie pola grawitacyjnego w odległości $r$ od środka planety wynosi

$$g = \frac{GM(r)}{r^2} = \frac{GM_\text{z}}{R_\text{z}^2} \cdot \left(\frac{r}{R_\text{z}}\right)^{\alpha-2}. \tag{15}$$

Przy małym zwiększaniu odległości od środka planety o d$r$ ciśnienie zmniejsza sie o d$p$, gdyż zmniejsza się nacisk słupa gazu. Zatem:

$$\mathrm{d}p = -\rho g\,\mathrm{d}r. \tag{16}$$

Taki przyrost ciśnienia obliczamy analogicznie do przyrostu masy niezbędnego do wyznaczenia gęstości. Podstawiając uzyskany wynik oraz związki (13) i (15) do wzoru (16) otrzymujemy:

$$\alpha(\alpha-3)\frac{RT}{\mu}\frac{M_\text{Z}}{4\pi R_\text{z}^4} \cdot \left(\frac{r}{R_\text{z}}\right)^{\alpha-4} = -\alpha\frac{M_\text{Z}}{4\pi R_\text{z}^3} \cdot \left(\frac{r}{R_\text{z}}\right)^{\alpha-3}\frac{GM_\text{Z}}{R_\text{z}^2} \cdot \left(\frac{r}{R_\text{z}}\right)^{\alpha-2} \tag{17}$$

$$= -\alpha\frac{GM_\text{Z}^2}{4\pi R_\text{z}^5} \cdot \left(\frac{r}{R_\text{z}}\right)^{2\alpha-5}. \tag{18}$$

Porównując współczynniki i wykładniki funkcji potęgowych po obu stronach uzyskanej równości, stwierdzamy, że:

$$\alpha = 1, \tag{19}$$

$$M_\mathrm{z} = 2\frac{RT}{\mu G} R_\mathrm{z}. \tag{20}$$

b) Zgodnie z prawem Archimedesa sonda będzie się unosić, gdy jej gęstość będzie równa gęstości gazu, czyli gdy

$$\frac{m_\mathrm{s}}{\frac{4}{3}\pi r_\mathrm{s}^3} = \alpha \frac{M_\mathrm{Z}}{4\pi R_\mathrm{z}^3} \cdot \left(\frac{r}{R_\mathrm{z}}\right)^{\alpha-3} = \frac{M_\mathrm{Z}}{4\pi R_\mathrm{z}} \cdot r^{-2}. \tag{21}$$

Stąd

$$r = \sqrt{\frac{M_\mathrm{Z} r_\mathrm{s}^3}{3R_\mathrm{z} m_\mathrm{s}}} = \sqrt{\frac{2RT}{3\mu G}\frac{r_\mathrm{s}^3}{m_\mathrm{s}}}. \tag{22}$$

**Punktacja zadania 3**

Gęstość gazu w zależności od odległości od środka planety (wzór (13)) – 2 pkt.
Ciśnienie gazu w zależności od odległości od środka planety (wzór (14)) – 1 pkt.
Natężenie pola grawitacyjnego w zależności od odległości od środka planety (wzór (15)) – 1 pkt.
Związek zmiany ciśnienia ze zmianą odległości (wzór (16)) – 2 pkt.
Wyznaczenie parametru $\alpha$ (wzór (19)) – 1 pkt.
Wyznaczenie parametru $M_\mathrm{z}$ (wzór (20)) – 1 pkt.
Prawo Archimedesa zastosowane w przypadku b) (wzór (21) lub równoważny) – 1 pkt.
Odległość sondy od środka planety (wzór (22)) – 1 pkt.