LXVI OLIMPIADA FIZYCZNA

ZAWODY III STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

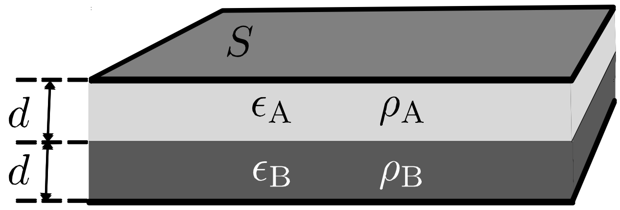
Zadanie 1.

Jednorodny walec o masie M i promieniu R toczył się bez poślizgu po płaskim podłożu z prędkością v_0 i uderzył w jednorodny prostopadłościenny klocek o masie m, początkowo nieruchomy. Kierunek ruchu walca był prostopadły do lewej ściany klocka (patrz rysunek). Wysokość klocka jest większa od promienia walca. Walec i klocek mają wspólną, prostopadłą do podłoża, płaszczyznę symetrii. Współczynnik tarcia między klockiem a podłożem jest równy f_1, a między klockiem a walcem f_2. Zderzenie trwało bardzo krótko, a w jego wyniku równoległe do podłoża składowe prędkości środków masy walca oraz klocka zrównały się. Długość klocka jest na tyle duża, że ściana stykająca się z podłożem nie odrywa się on niego.

Jakie warunki muszą spełniać współczynniki tarcia f_1 i f_2, aby rozważane uderzenie nie spowodowało przesunięcia klocka?

Moment bezwładności walca względem jego osi wynosi $\frac{1}{2}MR^2$. Przyjmij, że oddziaływania wewnątrz klocka, walca oraz podłoża rozchodzą się nieskończenie szybko. Pomiń tarcie toczne.

Zadanie 2.



Pomiędzy odległymi o $2d$ okładkami kondensatora płaskiego, z których każda ma powierzchnię S, znajdują się dwie, równoległe do okładek warstwy różnych materiałów: materiału A o przenikalności elektrycznej ϵ_A, oporze właściwym ρ_A i grubości warstwy d oraz materiału B o przenikalności elektrycznej ϵ_B, oporze właściwym ρ_B i grubości warstwy d. Odległość między okładkami jest znacznie mniejsza od ich liniowych rozmiarów.

Okładki kondensatora podłączono do baterii o sile elektromotorycznej $\mathcal{E}$ i zaniedbywalnym oporze wewnętrznym na bardzo długi czas, taki że zmiany natężenia prądu płynącego w obwodzie stały się niezauważalne.

Następnie baterię odłączono, a okładki zwarto na krótki czas opornikiem o oporze znacznie mniejszym od oporu kondensatora, tak że napięcie między nimi spadło do $\mathcal{E}/2$. Wyznacz zależność napięcia między okładkami kondensatora od czasu, jaki upłynął od odłączenia tego opornika.

Wskazówka

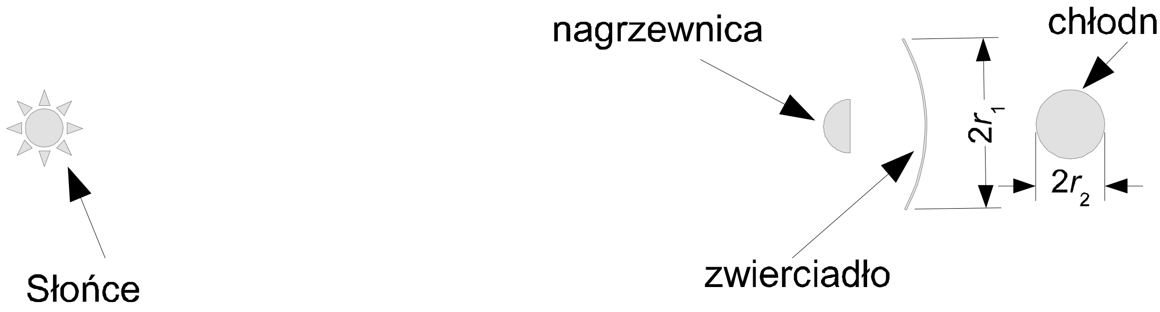
Gdy okładki idealnego kondensatora o pojemności C zewrzemy opornikiem o oporze R, napięcie między tymi okładkami zmienia się w czasie zgodnie ze wzorem

$$U = U_0 e^{-\frac{t}{RC}},$$

gdzie U_0 jest napięciem początkowym, a t – czasem, jaki upłynął od chwili zwarcia okładek.

Zadanie 3. na następnej stronie

Zadanie 3.



W przestrzeni kosmicznej umieszczono elektrownię słoneczną przesyłającą energię na Ziemię za pomocą wiązki laserowej.

Elektrownia składa się z następujących elementów:

- idealnego zwierciadła będącego wycinkiem powierzchni walcowej promieniu R, długości L i szerokości $2r_1$; zwierciadło jest ustawione prostopadle do kierunku Słońce – elektrownia.
- nagrzewnicy będącej półwalcem długości L, o idealnie białej (niepromieniującej) powierzchni zakrzywionej oraz doskonale czarnej, doskonale przewodzącej ciepło powierzchni płaskiej
- walcowej chłodnicy o promieniu r_2 i długości L, o idealnie czarnej powierzchni bocznej i idealnie białych denkach
- silnika cieplnego pobierającego ciepło z nagrzewnicy, oddającego ciepło do chłodnicy; silnik nie jest pokazany na rysunku, część jego elementów może się znajdować wewnątrz nagrzewnicy lub chłodnicy

oraz dodatkowych elementów (między innymi rur łączących nagrzewnicę, chłodnicę i silnik) nieistotnych w rozważanym zagadnieniu. Denka chłodnicy i nagrzewnicy nie promieniują. Temperatura powierzchni Słońca wynosi T_s, promień Słońca to R_s, odległość środek Słońca–elektrownia wynosi d. Stałą Stefana -Boltzmanna oznaczamy literą σ.

a) Wyznacz promień nagrzewnicy r_n, przy którym, (przy założeniu jej optymalnego położenia) różnica między ilością energii do niej dostarczanej i wypromieniowywanej z niej będzie największa.

Poniżej przyjmij, że promień nagrzewnicy jest równy promieniowi wyznaczonemu w punkcie a), a umieszczenie jej jest optymalne (tak jak w punkcie a).

b) Wyznacz maksymalną temperaturę T_{max}, jaką może osiągnąć nagrzewnica.

c) Wyznacz maksymalną możliwą teoretycznie sprawność silnika oraz temperaturę chłodnicy przy tej sprawności. Wyniki wyraź przez p_s – moc promieniowania Słońca na jednostkę powierzchni w pobliżu stacji (stałą słoneczną), T_{max} z punktu b), r_1, r_2, L, σ oraz T_1 – temperaturę nagrzewnicy.

d) Podaj wartości liczbowe wyznaczonych wielkości dla $r_1 = 10$ m, $L = 20$ m, $R = 20$ m, $r_2 = 1$ m, $T_1 = 1200$ K, $R_s = 7{,}0 \cdot 10^8$ m, $d = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m, $T_s = 5800$ K, $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ W/(m^{2}K^4).

Uwaga:

Uwzględnij, że $R_s/d \ll 1$, $r_1 < R < R_s$, $L < R_s$, oraz pomiń to, że nagrzewnica blokuje część światła padającego na zwierciadło. Pomiń również obecność zwierciadła w pobliżu chłodnicy, to, że część promieniowania wyemitowanego przez nagrzewnicę wraca do niej po odbiciu od zwierciadła, oraz wszelkie promieniowanie zewnętrzne za wyjątkiem promieniowania Słońca. Zastosuj przybliżenie promieni przyosiowych optyki geometrycznej.

Rozwiązanie zadania 1.

W niniejszym rozwiązaniu słowem „poziomy" określamy kierunek równoległy do podłoża, a słowem „pionowy" – kierunek prostopadły do podłoża. Zgodnie z poleceniem z treści zadania nie rozważamy efektów zwiazanych z tarciem tocznym.

Oznaczmy przez t czas upływający od rozpoczęcia zderzenia. Niech $N_1(t)$ oznacza poziomą siłę nacisku walca na klocek, $T_1(t)$ – pionową siłę tarcia między walcem a klockiem, $N_2(t)$ – siłę nacisku klocka na podłoże, a $T_2(t)$ – poziomą siłę tarcia między klockiem a podłożem.

Tuż po uderzeniu powierzchnia walca przesuwa się względem stykającej się z nią ściany klocka, a zatem walec „stara się" przesunąć klocek w dół z siłą $T_1(t) = f_2 N_1(t)$. Ponieważ przyjmujemy, że oddziaływania przenoszą się nieskończenie szybko, siła nacisku klocka na podłoże wzrasta o $T_1(t)$.

W treści zadania nie jest powiedziane, że występuje grawitacja, ale nawet gdyby była, to ponieważ zderzenie trwa bardzo krótko, rozważane siły są bardzo duże, a zatem znacznie większe od siły grawitacji. Zatem można przyjąć, że $N_2(t) = T_1(t)$ oraz pominąć tarcie walca o podłoże w trakcie zderzenia. Z definicji współczynnika tarcia, wiemy, że zachodzi $T_2(t) \leq f_1 N_2(t)$. Nacisk walca na klocek stara się go przesunąć, jedyne co się mu przeciwstawia to tarcie klocka o podłoże. Zatem, aby klocek się nie przesunął, musi być $N_1(t) = T_2(t)$, czyli $N_1(t) \leq f_1 N_2(t) = f_1 f_2 N_1(t)$.

Zatem warunkiem koniecznym, aby klocek się nie przesunął, jest

$$f_1 f_2 \geq 1. \tag{1}$$

Nie jest to jednak warunek wystarczający, gdyż przed zakończeniem zderzenia walec może się przestać się ślizgać po klocku, a wtedy nie będzie już prawdą, że $T_1(t) = f_2 N_1(t)$ – ta siła tarcia stanie się równa zeru (toczenie się bez poślizgu ruchem jednostajnym nie wymaga działania żadnych sił), a zatem praktycznie spadnie do zera siła nacisku $N_2(t)$ i konsekwencji siła tarcia między klockiem a podłożem nie będzie w stanie przeciwstawić się przesuwaniu klocka.

Zatem, aby klocek nie przesunął się, powierzchnia walca nie może przestać się ślizgać po klocku przed zakończeniem zderzenia.

Niech $L(t)$ będzie momentem pędu walca względem jego osi, $P_x(t)$ – jego poziomym pędem, $P_y(t)$ – jego pionowym pędem, wszystkie te wielkości w trakcie zderzenia w chwili t od jego rozpoczęcia.

Jeśli występuje poślizg między powierzchnią walca i klockiem, a zderzenie wciąż trwa (poziome prędkości walca i klocka się nie wyrównały), to można napisać następujące równania ruchu

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = -RT_1(t) = f_2 R N_1(t), \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}P_y}{\mathrm{d}t} = T_1(t) = f_2 N_1(t), \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}P_x}{\mathrm{d}t} = -N_1(t), \tag{4}$$

gdzie $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}P_y}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}P_x}{\mathrm{d}t}$ oznacza szybkość zmiany odpowiednio L, P_y, P_x, natomiast $RT_1(t)$ jest momentem siły tarcia względem osi walca.

Warunek, na to, by powierzchnia walca ślizgała się po klocku aż do zakończenia zderzenia, znajdziemy nie wprost: sprawdzimy, jaki warunek wynika z założenia, że powierzchnia walca przestała się ślizgać po klocku przed zakończeniem zderzenia, a następnie weźmiemy warunek przeciwny.

Z równań (2-4) otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = -R\frac{\mathrm{d}P_y}{\mathrm{d}t}, \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}P_y}{\mathrm{d}t} = -f_2\frac{\mathrm{d}P_x}{\mathrm{d}t}. \tag{6}$$

Z powyższych równań wynikają związki

$$\Delta L = -R\Delta P_y, \tag{7}$$

$$\Delta P_y = -f_2 \Delta P_x, \tag{8}$$

gdzie Δ oznacza różnicę między odpowiednią wielkością w chwili, gdy powierzchnia walca przestała się ślizgać po klocku (zakładamy, ze nastąpiło to przed zakończeniem zderzenia), i na początku zderzenia.

Początkowa prędkość kątowa walca wynosi $\omega_0 = v_0/R$ (walec się nie ślizgał po podłożu). Pionowa prędkość walca v_y oraz jego prędkość kątowa ω_k, przy których walec nie ślizga się względem klocka, spełniają warunek $v_y = \omega_k/R$ (jest to warunek toczenia). Zatem zmiana momentu pędu walca do końca poślizgu (czyli do rozpoczęcia toczenia się walca po ścianie) wynosi $\Delta L = I\omega_k - I\omega_0 = Iv_y/R - Iv_0/R$. Ponieważ $\Delta P_y = mv_y$, z równania (7) mamy $Iv_y/R - Iv_0/R = -Rmv_y$, skąd otrzymujemy

$$v_y = \frac{I}{I + MR^2} v_0, \tag{9}$$

$$\Delta P_y = \frac{I}{I + MR^2} mv_0. \tag{10}$$

Zmiana poziomej składowej pędu walca do zakończenia zderzenia (do zatrzymania poziomego ruchu walca) jest równa $-mv_0$ i jest mniejsza (ale większa co do wartości bezwzględnej) niż zmiana poziomej składowej pędu walca do zakończenia poślizgu ΔP_x. Z równań (8), (10) oraz z $\Delta P_x > -mv_0$, otrzymujemy, że z założenia o ustaniu poślizgu przed zakończeniem zderzenia wynika

$$\frac{I}{I + MR^2} mv_0 = -f_2 \Delta P_x < f_2 mv_0, \tag{11}$$

czyli, że $f_2 > I/\left(I + MR^2\right)$. Zatem, jeśli spełniony jest warunek przeciwny, czyli

$$f_2 \leq \frac{I}{I + MR^2}. \tag{12}$$

oraz zachodzi warunek (1), to zgodnie z powyższymi rozważaniami klocek pozostanie nieruchomy do momentu zakończenia zderzenia. Po uwzględnieniu wzoru na moment bezwładności dla walca szukane warunki przyjmują postać

$$f_1 f_2 \geq 1, \quad f_2 \leq \frac{1}{3}. \tag{13}$$

Punktacja zadania 1.

Ignorowanie siły grawitacji lub argument uzasadniający jej pominięcie (zadanie można rozwiązywać w nieobecności sił grawitacji, gdyż nie ma o nich mowy w treści) – 1 pkt.

Warunek $f_1 f_2 \geq 1$ wraz z uzasadnieniem – 3 pkt.

Zauważenie, że dodatkowym warunkiem jest występowanie poślizu między walcem a klockiem do zakończenia zderzenia – 1 pkt.

Poprawna analiza ruchu pionowego walca – 1 pkt.

Poprawna analiza ruchu obrotowego walca – 1 pkt.

Poprawne zapisanie warunku występowania poślizgu miedzy walcem a klockiem (równania (9) i (11) lub równoważne) – 1 pkt.

Warunek (12) lub równoważny warunek $f_2 \leq \frac{1}{3}$ – 2 pkt.

Rozwiązanie zadania 2.

Przyjmijmy, że pod koniec długiego czasu, o którym mowa w treści zadania, przez kondensator płynie prąd o natężeniu I_0. Mamy

$$I_0 R_z = \mathcal{E},$$

gdzie opór zastępczy R_z wnętrza kondensatora wynosi

$$R_z = \frac{\rho_A d + \rho_B d}{S}.$$

Układ można traktować jako układ dwóch kondensatorów A i B o pojemnościach C_A i C_B, gdzie

$$C_A = \frac{\epsilon_A S}{d}, \quad C_B = \frac{\epsilon_B S}{d}, \tag{14}$$

oraz „oporach wewnętrznych” odpowiednio R_A i R_B:

$$R_A = \frac{\rho_A d}{S}, \quad R_B = \frac{\rho_B d}{S}. \tag{15}$$

Napięcie po odłączeniu baterii na każdym z tych kondensatorów wynosi odpowiednio:

$$U_{\mathrm{A}0} = I_0 R_{\mathrm{A}} = \frac{\rho_{\mathrm{A}}}{\rho_{\mathrm{A}} + \rho_{\mathrm{B}}} \mathcal{E}, \quad U_{\mathrm{B}0} = \frac{\rho_{\mathrm{B}}}{\rho_{\mathrm{A}} + \rho_{\mathrm{B}}} \mathcal{E}. \tag{16}$$

Niech $U_{\mathrm{A}1/2}$ oraz $U_{\mathrm{B}1/2}$ oznaczają napięcia pomiędzy warstwami dielektryków po odłączeniu opornika zwierającego, czyli po spadku napięcia między okładkami do $\mathcal{E}/2$. W trakcie szybkiego rozładowywania przez opornik zewnetrzny ładunek na granicy dielektryków się nie zmieni, czyli

$$C_{\mathrm{A}} U_{\mathrm{A}} - C_{\mathrm{B}} U_{\mathrm{B}} = C_{\mathrm{A}} U_{\mathrm{A}1/2} - C_{\mathrm{B}} U_{\mathrm{B}1/2}. \tag{17}$$

Ponieważ mamy $U_{\mathrm{A}1/2} + U_{\mathrm{B}1/2} = \mathcal{E}/2$, możemy wyznaczyć $U_{\mathrm{A}1/2}$ oraz $U_{\mathrm{B}1/2}$:

$$U_{\mathrm{A}1/2} = \frac{C_{\mathrm{B}}\mathcal{E}/2 + C_{\mathrm{A}} U_{\mathrm{A}} - C_{\mathrm{B}} U_{\mathrm{B}}}{C_{\mathrm{A}} + C_{\mathrm{B}}} = \frac{2C_{\mathrm{A}} U_{\mathrm{A}} + C_{\mathrm{B}} U_{\mathrm{A}} - C_{\mathrm{B}} U_{\mathrm{B}}}{2\left(C_{\mathrm{A}} + C_{\mathrm{B}}\right)} \tag{18}$$

$$= \frac{2\epsilon_{\mathrm{A}}\rho_{\mathrm{A}} + \epsilon_{\mathrm{B}}\rho_{\mathrm{A}} - \epsilon_{\mathrm{B}}\rho_{\mathrm{B}}}{2\left(\epsilon_{\mathrm{A}} + \epsilon_{\mathrm{B}}\right)\left(\rho_{\mathrm{A}} + \rho_{\mathrm{B}}\right)} \mathcal{E}, \tag{19}$$

$$U_{\mathrm{B}1/2} = \frac{C_{\mathrm{A}}\mathcal{E}/2 - C_{\mathrm{A}} U_{\mathrm{A}} + C_{\mathrm{B}} U_{\mathrm{B}}}{C_{\mathrm{A}} + C_{\mathrm{B}}} = \frac{2C_{\mathrm{B}} U_{\mathrm{B}} + C_{\mathrm{A}} U_{\mathrm{B}} - C_{\mathrm{A}} U_{\mathrm{A}}}{2\left(C_{\mathrm{A}} + C_{\mathrm{B}}\right)} \tag{20}$$

$$= \frac{2\epsilon_{\mathrm{B}}\rho_{\mathrm{B}} + \epsilon_{\mathrm{A}}\rho_{\mathrm{B}} - \epsilon_{\mathrm{A}}\rho_{\mathrm{A}}}{2\left(\epsilon_{\mathrm{A}} + \epsilon_{\mathrm{B}}\right)\left(\rho_{\mathrm{A}} + \rho_{\mathrm{B}}\right)} \mathcal{E}. \tag{21}$$

Kondensatory będą się rozładowywać zgodnie z wzorami

$$U_{\mathrm{A}}(t) = U_{\mathrm{A}1/2} \cdot e^{-\frac{t}{R_{\mathrm{A}} C_{\mathrm{A}}}} = U_{\mathrm{A}1/2} \cdot e^{-\frac{t}{\epsilon_{\mathrm{A}}\rho_{\mathrm{A}}}}, \; U_{\mathrm{B}}(t) = U_{\mathrm{B}1/2} \cdot e^{-\frac{t}{R_{\mathrm{B}} C_{\mathrm{B}}}} = U_{\mathrm{B}1/2} \cdot e^{-\frac{t}{\epsilon_{\mathrm{B}}\rho_{\mathrm{B}}}}.$$

Zatem zależność napięcia między okładkami całego kondensatora od czasu będzie dana wzorem

$$U(t) = U_{\mathrm{A}1/2} \cdot e^{-\frac{t}{\epsilon_{\mathrm{A}}\rho_{\mathrm{A}}}} + U_{\mathrm{B}1/2} \cdot e^{-\frac{t}{\epsilon_{\mathrm{B}}\rho_{\mathrm{B}}}} \tag{22}$$

$$= \mathcal{E} \frac{2\epsilon_{\mathrm{A}}\rho_{\mathrm{A}} + \epsilon_{\mathrm{B}}\rho_{\mathrm{A}} - \epsilon_{\mathrm{B}}\rho_{\mathrm{B}}}{2\left(\epsilon_{\mathrm{A}} + \epsilon_{\mathrm{B}}\right)\left(\rho_{\mathrm{A}} + \rho_{\mathrm{B}}\right)} \cdot e^{-\frac{t}{\epsilon_{\mathrm{A}}\rho_{\mathrm{A}}}} + \mathcal{E} \frac{2\epsilon_{\mathrm{B}}\rho_{\mathrm{B}} + \epsilon_{\mathrm{A}}\rho_{\mathrm{B}} - \epsilon_{\mathrm{A}}\rho_{\mathrm{A}}}{2\left(\epsilon_{\mathrm{A}} + \epsilon_{\mathrm{B}}\right)\left(\rho_{\mathrm{A}} + \rho_{\mathrm{B}}\right)} \cdot e^{-\frac{t}{\epsilon_{\mathrm{B}}\rho_{\mathrm{B}}}}. \tag{23}$$

Punktacja zadania 2.

Potraktowanie układu jako złożonego z dwóch kondensatorów lub podejście równoważne – 1 pkt.

Pojemności kondensatorów (14) – 1 pkt.

Opory wewnętrzne kondensatorów (15) – 1 pkt.

Napięcia początkowe na każdym z kondensatorów (16) – 1 pkt.

Zachowanie ładunku na granicy między warstwami (17) – 3 pkt.

Napięcia początkowe na każdym z kondensatorów tuż po odłączeniu zwierającego opornika (wzory (19, 21)) – 2 pkt.

Zależność napięcia od czasu (wzór (23) lub wzór (22) pod warunkiem podania jawnych wzorów (19, 21) na $U_{\mathrm{A}1/2}$ i $U_{\mathrm{B}1/2}$) – 1 pkt.

Rozwiązanie zadania 3.

a) Zgodnie ze wzorem na powiększenie obrazu w zwierciadle promień obrazu Słońca wynosi

$$\frac{y}{x} R_{\mathrm{s}} \approx \frac{f}{d} R_{\mathrm{s}} = \frac{R}{2d} R_{\mathrm{s}}, \tag{24}$$

gdzie f jest ogniskową zwierciadła równą $R/2$, x odległością przedmiotu (Słońca) od zwierciadła równą d, a y – odległością obrazu od zwierciadła. Skorzystaliśmy tu z faktu że ze wzoru soczewkowego wynika, że $y = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{x}}$ a w rozpatrywanym zagadnieniu $\frac{1}{f} \gg \frac{1}{x}$

Promień nagrzewnicy powinien być jak najmniejszy (gdyż gdy promień jest mniejszy, to wypromieniowuje ona mniej energii) ale taki, żeby całe odbite od zwierciadła promieniowanie padało na nagrzewnicę.Zatem optymalny promień nagrzewnicy jest po prostu równy promieniowi obrazu Słońca i wynosi

$$r_{\mathrm{n}} = \frac{R_{\mathrm{s}}}{2d} R. \tag{25}$$

Dla danych z punktu e) jest to 0,047 m.

b) Zgodnie z prawem Stefana-Botzmanna Słońce promieniuje z mocą $4\pi R_\mathrm{s}^2\sigma T_\mathrm{s}^4$, gdzie $4\pi R_\mathrm{s}^2$ jest powierzchnią Słońca. Cała wypromieniowana energia przechodzi przez współśrodkową ze Słońcem sferę o promieniu d, zatem w odległości d od Słońca moc promieniowania Słońca na jednostkę powierzchni wynosi

$$p_\mathrm{s} = \frac{4\pi R_\mathrm{s}^2\sigma T_\mathrm{s}^4}{4\pi d^2} = \frac{R_\mathrm{s}^2}{d^2}\sigma T_\mathrm{s}^4. \tag{26}$$

Dla danych z punktu e) jest to 1400 W/m^2.

Na nagrzewnicę pada całe promieniowanie padające na zwierciadło (tak dobraliśmy jej promień), a zatem strumień energii padający na nagrzewnicę to $P_\mathrm{in} = p_\mathrm{s}\cdot 2r_1 L$. Zgodnie z prawem Stefana-Boltzmanna strumień wypromieniowany przez nagrzewnicę to $P_\mathrm{out} = 2r_\mathrm{n} L\sigma T_1^4$. Maksymalna możliwa temperatura nagrzewnicy T_max jest gdy $P_\mathrm{out} = P_\mathrm{in}$, stąd

$$T_\mathrm{max} = \sqrt[4]{\frac{R_\mathrm{s}^2}{d^2}\frac{r_1}{r_\mathrm{n}}}T_\mathrm{s} = \sqrt[4]{\frac{2R_\mathrm{s}}{d}\frac{r_1}{R}}T_\mathrm{s}. \tag{27}$$

Dla danych z punktu e) jest to 1500 K.

Zauważmy, że w tym przypadku cały padający strumień energii jest wypromieniowywany, więc moc silnika jest równa 0.

c) Ilość ciepła, jaką musi oddawać chłodnica silnika Carnota o temperaturze T_2 to $\frac{T_2}{T_1}Q_1$, gdzie Q_1 jest ciepłem pobranym. Ponieważ jedynym sposobem chłodzenia jest tu promieniowanie, całe to ciepło musi zostać wypromieniowane, czyli $\frac{T_2}{T_1}(P_\mathrm{in} - P_\mathrm{out}) = 2\pi r_2 L\sigma T_2^4$, gdzie $2\pi r_2 L$ to promieniująca powierzchnia chłodnicy. Stąd

$$T_2 = \sqrt[3]{\frac{P_\mathrm{in} - P_\mathrm{out}}{2\pi r_2 L\sigma T_1}} = \sqrt[3]{\frac{\frac{R_\mathrm{s}^2}{d^2} r_1 T_\mathrm{s}^4 - r_\mathrm{n} T_1^4}{\pi r_2 T_1}} \tag{28}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{p_\mathrm{s} r_1}{\pi r_2 T_1 \sigma}\left[1 - \left(\frac{T_1}{T_\mathrm{max}}\right)^4\right]}. \tag{29}$$

$$\eta = 1 - \sqrt[3]{\frac{\frac{R_\mathrm{s}^2}{d^2} r_1 T_\mathrm{s}^4 - r_\mathrm{n} T_1^4}{\pi r_2 T_1^4}} \tag{30}$$

$$= 1 - \sqrt[3]{\frac{p_\mathrm{s} r_1}{\pi r_2 T_1^4 \sigma}\left[1 - \left(\frac{T_1}{T_\mathrm{max}}\right)^4\right]}, \tag{31}$$

Dla danych z punktu d) otrzymamy $T_2 = 340$ K, $\eta = 0{,}72$.

Punktacja zadania 3.

a) Promień nagrzewnicy równy $\frac{R}{2d}R_s$ – 2 pkt.

b) Wyznaczenie maksymalnej temperatury nagrzewnicy (wzór (27)) – 2 pkt.

c) Maksymalna możliwa teoretycznie sprawność (wzór (31)) oraz odpowiadająca jej temperatura chłodnicy (wzór (29)) – 4 pkt.

d) Poprawne wyniki liczbowe – 2 pkt.