LXVII OLIMPIADA FIZYCZNA

ZAWODY III STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

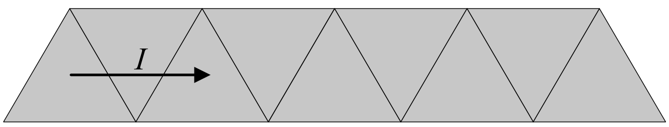
Zadanie 1.

Gumka recepturka jest jednorodna, ma kształt pętli, masę m i długość swobodną $2\pi r_0$. Przekrój gumki jest prostokątem, którego boki są znacznie krótsze od r_0; stosunek długości krótszego i dłuższego boku tego prostokąta jest znacznie mniejszy od jedności. To, że stała sprężystości gumki wynosi k oznacza, że po jej rozcięciu i wyprostowaniu siła o wartości F przyłożona wzdłuż gumki rozciąga tę gumkę o odcinek długości $\frac{F}{k}$.

Gumkę tę umieszczono na stożku o kącie rozwarcia 2α, tak że stykała się ze stożkiem dłuższym bokiem swojego przekroju, stale tym samym. Następnie gumkę puszczono. Krzywa biegnąca wzdłuż gumki przez środek jej przekroju tworzyła stale okrąg leżący w płaszczyźnie prostopadłej do osi stożka. Promień tego okręgu początkowo był równy r_1, przy czym $r_1 > r_0$.

Wyznacz odstęp czasu Δt od momentu puszczenia gumki do momentu, w którym będzie tworzyła okrąg o promieniu r_0. Współczynnik tarcia gumki o stożek wynosi μ, przy czym $\operatorname{tg}\alpha > \mu$. Grawitację należy pominąć.

Zadanie 2.



Rys. do zad. 2.: taśma przed zagięciem, z zaznaczonymi liniami zagięcia. Zaznaczony jest również kierunek przepływu prądu.

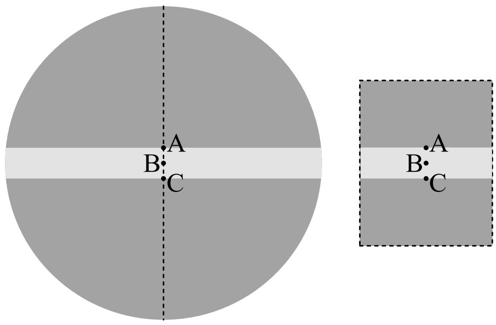
Taśma przewodząca składa się z wielu identycznych, równoległych, izolowanych przewodów. Szerokość w tej taśmy jest znacznie większa od jej grubości, a odległość między sąsiednimi przewodami i grubość izolacji można pominąć.

Taśmę tę zagięto pod kątem 180° wzdłuż prostej tworzącej kąt 60° z kierunkiem przewodów. Następnie zagięto ją w przeciwną stronę pod kątem 180° wzdłuż prostej tworzącej kąt 60° z kierunkiem przewodów i powtarzano tę czynność w sumie $3n-1$ razy. Odległość między zagięciami jest taka, że każdy płaski fragment między zagięciami tworzy trójkąt równoboczny, zwany dalej płytką. Końcowe fragmenty taśmy ucięto, tak by na początku i na końcu również powstały trójkąty równoboczne. W efekcie powstał układ $3n$ równoległych fragmentów w kształcie trójkąta równobocznego (płytek) o wysokości w. Odległość między sąsiednimi płytkami wynosi d ($d \ll w$).

Końce taśmy połączono z przewodami zasilającymi tak, że przez każdy przewód tworzący taśmę płynie prąd o tym samym natężeniu, tzn. przez każdą płytkę płynie prąd o jednorodnej gęstości. Całkowite natężenie prądu jest równe I.

Wyznacz siłę elektrodynamiczną, jaka działa na każdą z płytek. Pomiń wpływ pola magnetycznego pochodzącego od przewodów zasilających. Przenikalność magnetyczną izolacji przewodów oraz przenikalność magnetyczną powietrza przyjmij równą przenikalności magnetycznej próżni μ_0.

Zadanie 3.



Rys. do zad. 3.: kula z wydrążeniem oraz powiększenie środkowego fragmentu.

W planecie będącej jednorodną kulą o gęstości ρ i promieniu R wywiercono tunel w kształcie walca o promieniu r, gdzie $r \ll R$. Oś tunelu przechodzi przez środek planety – patrz rysunek.

Oznaczmy przez A punkt leżący na ścianie tunelu w połowie jego długości, przez B – punkt w środku planety, a przez C – przeciwległy do A punkt na ścianie tunelu (punkty A, B i C leżą na jednej prostej).

a) Oznaczmy przez $v_{0\mathrm{BA}}$ prędkość początkową małego ciała wystrzelonego z punktu B w kierunku punktu A. Podaj maksymalny przedział prędkości początkowych, do jakiego $v_{0\mathrm{BA}}$ musi należeć, aby to ciało dotarło do punktu A w skończonym czasie.

b) Oznaczmy przez $v_{0\mathrm{AC}}$ prędkość początkową małego ciała wystrzelonego z punktu A w kierunku punktu C. Podaj maksymalny przedział prędkości początkowych, do jakiego $v_{0\mathrm{AC}}$ musi należeć, aby to ciało dotarło do punktu C w skończonym czasie.

Planeta jest nieruchoma.

Informacje, które mogą być przydatne

1. Prawo Gaussa

Dla pola elektrycznego $\vec{E}$ w próżni, pola (przyspieszenia) grawitacyjnego $\vec{\gamma}$ oraz wektora indukcji pola magnetycznego $\vec{B}$ całkowity strumień $\Phi_{\text{całk}}$ danego pola przez powierzchnię zamkniętą jest równy

$$\Phi_{\text{całk}} = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_0}Q & \text{dla pola elektrycznego,} \\ -4\pi G \cdot M & \text{dla pola grawitacyjnego,} \\ 0 & \text{dla pola magnetycznego.} \end{cases}$$

gdzie Q jest całkowitym ładunkiem elektrycznym zawartym wewnątrz rozważanej powierzchni, M – całkowitą masą zawartą wewnątrz rozważanej powierzchni, ε_0 – przenikalnością elektryczną próżni, G – uniwersalną stałą grawitacyjną.
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^2.

2. Indukcja pola magnetycznego pochodzącego od prądu płynącego w płaszczyźnie

Jeśli w płaszczyźnie $z = 0$ płynie wzdłuż osi x, zgodnie z jej zwrotem, prąd o stałej gęstości liniowej j, to składowe wektora indukcji pola magnetycznego pochodzącego od tego prądu są równe

$$B_y = -\frac{1}{2}\mu_0 j \ \text{ dla } z > 0, \ B_y = +\frac{1}{2}\mu_0 j \ \text{ dla } z < 0,$$
$$B_x = B_z = 0.$$

Gęstość liniowa prądu płynącego w płaszczyźnie to natężenie I prądu płynącego w pasku o szerokości a podzielone przez tę szerokość, tzn. $j = I/a$.

Powyższe wzory wynikają z przedstawionego poniżej (w uproszczonej postaci) prawa Ampère'a

Prawo Ampère'a

Krążeniem $\mathcal{E}_B$ wektora indukcji pola magnetycznego $\vec{B}$ po łamanej zamkniętej W nazywamy wielkość

$$\mathcal{E}_B = \sum_{k=1}^{N} \vec{B}_k \cdot \Delta\vec{l}_k,$$

gdzie $\Delta\vec{l}_k$ odpowiadają kolejnym odcinkom łamanej W, a $\vec{B}_k$ jest średnim wektorem indukcji pola magnetycznego na odcinku $\Delta\vec{l}_k$.

W próżni zgodnie z prawem Ampère'a krążenie $\mathcal{E}_B$ wektora indukcji pola magnetycznego $\vec{B}$ po łamanej zamkniętej W jest równe całkowitemu natężeniu prądu I przepływającego przez powierzchnię S, której brzegiem jest łamana W, pomnożonemu przez przenikalność magnetyczną próżni μ_0:

$$\mathcal{E}_B = \mu_0 I.$$

Rozwiązanie zadania 1.

Rozważmy mały fragment gumki, który gdy nie jest ona napięta, ma długość Δl. Masa Δm tego fragmentu jest równa

$$\Delta m = \frac{\Delta l}{2\pi r_0} m. \tag{1}$$

Gdy promień gumki wynosi r, siła jej napięcia jest równa $N = 2\pi (r - r_0) k$, a długość rozpatrywanego fragmentu jest równa $\Delta l' = \Delta l \frac{r}{r_0}$. Z symetrii wynika, że wypadkowa siła działająca na rozpatrywany fragment gumki jest skierowana do środka okręgu, który tworzy gumka. Ta siła (przy ustalonym r) jest proporcjonalna do $\Delta l'$ i możemy ją zapisać jako $p\Delta l'$, gdzie p zależy od napięcia i promienia gumki. Aby zwiększyć o Δr promień okręgu, jaki tworzy gumka, trzeba wykonać pracę $2\pi r p \Delta r$. Z drugiej strony przy takim zwiększeniu promienia, długość gumki zwiększy się o $2\pi\Delta r$, a zatem jej energia sprężystości wzrośnie o $2\pi\Delta r \cdot N$. Z zasady zachowania energii mamy

$$2\pi r p \Delta r = 2\pi \Delta r \cdot N, \tag{2}$$

skąd wynika, że $rp = N$, czyli że

$$p = \frac{2\pi (r - r_0) k}{r}. \tag{3}$$

Działająca na rozważany fragment siła wywołana napięciem gumki jest prostopadła do osi stożka i ma wartość

$$f_x = p\Delta l' = \Delta l \frac{2\pi (r - r_0) k}{r_0}. \tag{4}$$

Ponieważ pomijamy grawitację, siła nacisku tego fragmentu gumki na stożek wynosi

$$f_{\mathrm{n}} = f_x \cos\alpha = \Delta l \frac{2\pi (r - r_0) k}{r_0} \cos\alpha. \tag{5}$$

Zakładając, że siła tarcia działająca na rozważany fragment gumki jest maksymalną siłą tarcia, wynosi ona μf_{n}. Zatem wzdłuż tworzącej stożka na ten fragment działa siła

$$f_{\mathrm{s}} = -f_x \sin\alpha + \mu f_n = \Delta l \left[-\frac{2\pi (r - r_0) k}{r_0} (\sin\alpha - \mu \cos\alpha) \right], \tag{6}$$

gdzie znak „$-$” oznacza zwrot w kierunku wierzchołka stożka, a znak „$+$” oznacza zwrot przeciwny.

Równanie ruchu rozważanego małego fragmentu gumki wzdłuż tworzącej stożka ma postać

$$\Delta m \cdot a = f_{\mathrm{s}}, \tag{7}$$

czyli

$$\frac{\Delta l}{2\pi r_0} m \cdot a = -\Delta l \frac{2\pi (r - r_0) k}{r_0} (\sin\alpha - \mu \cos\alpha). \tag{8}$$

Powyższe równanie jest zgodne z tym, że dla $r = r_0$ mamy stan równowagi.

Zaważmy, że warunek $\operatorname{tg}\alpha > \mu$ oznacza, że zachodzi $\sin\alpha - \mu\cos\alpha > 0$, tzn. że pochodząca od napięcia gumki siła ściągająca ją ze stożka jest większa niż przeciwstawiająca się temu siła tarcia.

Zmiana promienia o Δr odpowiada przesunięciu $\Delta x = \frac{\Delta r}{\sin\alpha}$ wzdłuż tworzącej stożka. Równanie (8) możemy zatem zapisać jako:

$$ma = -4\pi^2 k (\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \sin\alpha \cdot x, \tag{9}$$

gdzie $x = \frac{1}{\sin\alpha}(r - r_0)$ opisuje położenie gumki wzdłuż tworzącej stożka. Jest to równanie identyczne z równaniem ruchu pod wpływem siły sprężystej ze stałą sprężystości równą

$$\varkappa = 4\pi^2 k (\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \sin\alpha, \tag{10}$$

a więc jest to równanie oscylatora harmonicznego o okresie drgań

$$T = \sqrt{\frac{m}{k(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\sin\alpha}}. \tag{11}$$

W rozważanej chwili początkowej prędkość gumki jest równa zeru, a w rozważanej chwili końcowej napięcie nici jest równe zeru. Zatem szukany odstęp czasu jest równy $T/4$, czyli

$$\Delta t = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{m}{k\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)\sin\alpha}}. \tag{12}$$

Punktacja zadania T1

Skierowana do środka siła działająca na jednostkę długości gumki (wzór (3)), wraz z wyprowadzeniem – 2 pkt.

Siła nacisku fragmentu gumki na stożek (wzór (5) lub równoważny) – 2 pkt.

Styczna do stożka siła działająca na fragment gumki (wzór (6) lub równoważny) – 2 pkt.

Równanie ruchu we współrzędnej $r_{\mathrm{w}} = r - r_0$ (wzór (9)) lub równanie równoważne oraz zauważenie, że jest to równanie ruchu oscylatora harmonicznego – 2 pkt.

Wynik końcowy (wzór (12)) – 2 pkt.

Rozwiązanie zadania 2.

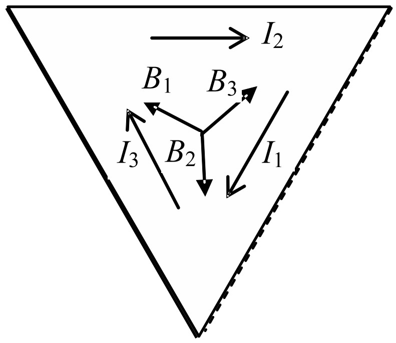
Nad i pod daną płytką, w odległości od niej znacznie mniejszej od w i z dala od jej brzegów, pole magnetyczne jest równe polu nieskończonej, płaskiej płyty, przez którą płynie jednorodny prąd o gęstości liniowej $j = I/w$. Oznaczmy przez $\vec{e}_z$– jednostkowy wektor prostopadły do płytek, o zwrocie od pierwszej do ostatniej, przez $\vec{j}_k$ – wektor gęstości liniowej prądu płynącego przez płytkę k, a przez $\vec{B}_k$ indukcję pola magnetycznego nad tą płytką pochodzącą od prądu $\vec{j}_k$. Zgodnie z konstrukcją z treści zadania wektory $\vec{j}_k$ i $\vec{j}_{k+1}$ tworzą ze sobą kąt 120°. Mamy też

$$\left|\vec{j}_k\right| = \frac{I}{w} = j, \tag{13}$$

$$\vec{j}_k + \vec{j}_{k+1} + \vec{j}_{k+2} = 0. \tag{14}$$

Zgodnie z uwagą dotyczącą wniosków z prawa Ampère'a pole $\vec{B}_k$ jest prostopadłe do $\vec{j}_k$ i jest równoległe do płytek:

$$\vec{B}_k = \frac{\mu_0}{2}\, \vec{j}_k \times \vec{e}_z. \tag{15}$$



Rys. do rozw. zad. 2.: Widok z góry trzech pierwszych płytek, z zaznaczonymi prądami i polami magnetycznymi nad tymi płytkami. Pogrubioną linią ciągłą zaznaczono bok, wzdłuż którego łączą się płytki 1 i 2 (górna i środkowa), a linią przerywaną – bok, wzdłuż którego łączą się płytki 2 i 3 (środkowa i dolna).

Konsekwencją równości (14) i (15) jest

$$\vec{B}_k + \vec{B}_{k+1} + \vec{B}_{k+2} = \vec{0}. \tag{16}$$

Oznacza to, że pole magnetyczne pochodzące od trzech kolejnych płytek jest nad tymi płytkami równe $\vec{0}$. Ponieważ pole wytwarzane przez prąd płynący w danej płytce ma pod tą płytką zwrot przeciwny niż pole nad tą płytką, w podobny sposób otrzymujemy, że pole od trzech kolejnych płytek jest pod nimi równe $\vec{0}$. Zatem pole magnetyczne nie wydostaje się poza układ trzech płytek i spośród $3n$ płytek każde trzy kolejne możemy traktować niezależnie.

Trzecia płytka znajduje się w polu magnetycznym wytworzonym przez dwie pierwsze, czyli o indukcji równej

$$\vec{B}_1 + \vec{B}_2 = -\vec{B}_3 = -\frac{\mu_0}{2}\, \vec{j}_3 \times \vec{e}_z. \tag{17}$$

Zauważmy, że zwykły wzór na siłę elektrodynamiczną $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$ można przepisać w przypadku, gdy prąd płynie w taśmie o szerokości a jako $\vec{F} = aL \cdot \vec{j} \times \vec{B}$, gdzie $\vec{j}$ jest wektorem gęstości liniowej prądu. Oznacza to, że siła na jednostkę powierzchni taśmy wynosi

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}. \tag{18}$$

Zatem na trzecią płytkę działa siła elektrodynamiczna

$$\vec{F}_3 = s\, \vec{j}_3 \times \left(\vec{B}_1 + \vec{B}_2\right) \tag{19}$$

$$= -\frac{\mu_0}{2} s\, \vec{j}_3 \times \left(\, \vec{j}_3 \times \vec{e}_z\right) \tag{20}$$

$$= s\frac{\mu_0}{2} j^2 \vec{e}_z = \frac{\sqrt{3}}{6}\mu_0 I^2 \vec{e}_z. \tag{21}$$

gdzie $s = \frac{\sqrt{3}}{3} w^2$ jest polem powierzchni płytki.

Zauważmy, że wartość siły $\vec{F}_3$ łatwo jest wyznaczyć zauważając, że $\vec{j}_3$ jest prostopadłe do $\vec{B}_3$, a zatem $F_3 = sj\left|\vec{B}_3\right| = s\frac{\mu_0}{2}j^2$. Zauważmy też, że prąd w trzeciej płytce efektywnie oddziałuje z sumarycznym prądem od płytek 1 i 2, który ma zwrot przeciwny do $\vec{j}_3$, a zatem trzecia płytka jest odpychana od pierwszej i drugiej.

Podobnie otrzymujemy, że na pierwszą płytkę działa siła

$$\vec{F}_1 = -s\mu_0 \frac{j^2}{2}\vec{e}_z = -\frac{\sqrt{3}}{6}\mu_0 I^2 \vec{e}_z. \tag{22}$$

Druga płytka jest powyżej pierwszej a poniżej drugiej, zatem znajduje się w polu o indukcji magnetycznej $\vec{B}_1 - \vec{B}_3$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\left(\vec{B}_1 - \vec{B}_3\right) \cdot \vec{B}_2 = {} & \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2 - \vec{B}_3 \cdot \vec{B}_2 = \\ = {} & \left|\vec{B}_1\right|^2 (\cos 120^{\circ} - \cos 120^{\circ}) = 0,\end{aligned}$$

czyli $\vec{B}_1 - \vec{B}_3$ jest prostopadłe do $\vec{B}_2$. Ponieważ $\vec{B}_2$ jest prostopadłe do $\vec{j}_2$, a $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$, $\vec{B}_3$, $\vec{j}_2$ leżą w jednej płaszczyźnie, zatem $\vec{B}_1 - \vec{B}_3$ jest równoległe do $\vec{j}_2$, To oznacza, że siła elektrodynamiczna działająca na drugą płytkę (patrz wzór (18)) jest równa zero

$$\vec{F}_2 = \vec{0}. \tag{23}$$

Gdyby nie zachodziło $\vec{F}_2 = 0$, to mielibyśmy sprzeczność z III zasadą dynamiki Newtona – na nasz układ trzech płytek nie działa siła zewnętrzna, zatem $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$, a jak ustaliliśmy $\vec{F}_1 = -\vec{F}_3$.

Podsumowując, siła elektrodynamiczna działająca na płytkę k jest równa

$$-\frac{\sqrt{3}}{6}\mu_0 I^2 \vec{e}_z, \text{ gdy } k = 3m+1, \tag{24}$$

$$\vec{0}, \text{ gdy } k = 3m+2, \tag{25}$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{6}\mu_0 I^2 \vec{e}_z, \text{ gdy } k = 3m+3, \tag{26}$$

gdzie m jest nieujemną liczbą całkowitą, a $\vec{e}_z$ – wektorem jednostkowym od pierwszej płytki do ostatniej, prostopadłym do tych płytek. Powyższe oznacza, że w każdej trójce płytek pierwsza i trzecia się odpychają, a na drugą nie działa siła elektrodynamiczna.

Punktacja zadania T2

Zauważenie, że pole magnetyczne pod oraz nad płytką, w bliskiej od niej odległości jest polem od nieskończonej płaszczyzny w której płynie prąd o jednorodnej gęstości liniowej oraz wykorzystanie związku między prądem płynącym w płytce a wytwarzanym przez ten prąd polem (wzór (15) wraz z $j = I/w$ lub równoważne) – 1 pkt.

Zauważenie, że wektory gęstości liniowej prądów (lub po prostu kierunki przepływu prądów) w sąsiednich płytkach tworzą ze sobą kąt 120° – 1 pkt.

Zauważenie, że wypadkowe pole magnetyczne pochodzące od prądów płynących w trzech kolejnych płytkach jest równe $\vec{0}$ – 1 pkt.

Zauważenie, że grupy kolejnych trzech płytek można traktować niezależnie – 1 pkt.

Wzór na siłę elektrodynamiczną na jednostkę powierzchni (wzór (18) lub równoważny) – 1 pkt.

Siła działająca na trzecią (lub pierwszą jeśli najpierw rozważono pierwszą) płytkę (wzór (21) lub równoważny wraz z prawidłowo określonym zwrotem) – 2 pkt.

Siła działająca na pierwszą (lub trzecią) płytkę (wzór (22) lub równoważny wraz z prawidłowo określonym zwrotem) – 1 pkt.

Siła działająca na środkową płytkę (wzór (23)) – 1 pkt.

Wynik podsumowujący dla układu wszystkich płytek (wzory (24–26) lub równoważne) – 1 pkt.

Rozwiązanie zadania 3.

Pole grawitacyjne rozpatrywanego układu jest równe sumie pól pochodzących od jednorodnej kuli o gęstości ρ i promieniu R oraz walca o gęstości $-\rho$ i promieniu r Te pola wyznaczymy z grawitacyjnej wersji prawa Gaussa.

Pole grawitacyjne wewnątrz jednorodnej kuli o gęstości ρ.

Ze względu na symetrię pole grawitacyjne γ_{k} wewnątrz kuli jest skierowane radialnie i zależy tylko od odległości od jej środka. Rozważmy sferę o promieniu y, gdzie $y < R$. Strumień pola grawitacyjnego przechodzącego przez tę sferę jest równy $4\pi y^2\gamma_{\mathrm{k}}(y)$. Masa zawarta wewnątrz tej sfery to $\frac{4}{3}\pi y^3\rho$, zatem mamy

$$4\pi y^2 \cdot \gamma_{\mathrm{k}}(y) = -4\pi G\frac{4}{3}\pi y^3\rho, \tag{27}$$

gdzie G jest uniwersalną stałą grawitacyjną.

Z powyższego wzoru otrzymujemy, że zależność pola grawitacyjnego kuli od odległości y od jej środka jest dana wzorem

$$\gamma_{\mathrm{k}}(y) = -\frac{4}{3}\pi G\rho y \tag{28}$$

Znak „–” w powyższym wzorze oznacza, że pole to ma zwrot do środka kuli.

Pole grawitacyjne γ_{w} wewnątrz jednorodnego walca o gęstości $-\rho$.

Ponieważ interesuje nas pole w okolicy środka walca, a $r < R$, do celów naszych wyprowadzeń możemy przyjąć, że walec jest nieskończony. Dla takiego walca, ze względu na symetrię, pole grawitacyjne jest prostopadłe do osi walca i zależy tylko od odległości od tej osi. Rozważmy współosiową z naszym walcem powierzchnię walcową o promieniu y, $(y \leqslant r)$ i długości l. Strumień pola grawitacyjnego przechodzącego przez tę powierzchnię jest równy $2\pi yl\gamma_{\mathrm{w}}(y)$. Masa zawarta wewnątrz tej powierzchni to $\pi y^2 l \cdot (-\rho)$, zatem mamy

$$2\pi yl\gamma_{\mathrm{w}}(y) = -4\pi G\pi y^2 l \cdot (-\rho)\,, \tag{29}$$

a stąd

$$\gamma_{\mathrm{w}}(y) = 2\pi G\rho y. \tag{30}$$

Pole jest skierowane od osi walca (znak plus), gdyż ma on ujemną masę.

W płaszczyźnie prostopadłej do osi walca i przechodzącej przez środek kuli wektory pól grawitacyjnych od walca oraz od osi są do siebie równoległe. Wypadkowe pole jest równe

$$\begin{aligned} \gamma(y) &= \gamma_{\mathrm{k}}(y) + \gamma_{\mathrm{w}}(y) && (31)\\ &= \frac{2}{3}\pi G\rho y. && (32) \end{aligned}$$

Zauważmy , że dla $y > 0$ (i oczywiście $y \leqslant r$) pole to wypycha obiekty w stronę brzegu tunelu.

Zatem w przypadku a) prędkość musi być większa od 0 (zauważmy, że jeśli jest ona równa 0 to ciało jest w równowadze, a zatem nie zacznie się poruszać; jest to jednak równowaga nietrwała). Zatem szukanym przedziałem jest przedział lewostronnie otwarty

$$(0,\ \infty)\,. \tag{33}$$

W przypadku b) na ciało o masie m działa siła liniowo zależna od odległości od środka kuli, zatem aby się tam dostać, trzeba wykonać pracę $\frac{1}{2}m\frac{2}{3}\pi G\rho r^2$. Ta praca nie może być większa od początkowej energii kinetycznej tego ciała równej $\frac{1}{2}mv^2$. Zatem mamy

$$\frac{1}{2}m\frac{2}{3}\pi G\rho r^2 \leqslant \frac{1}{2}mv^2,$$

a stąd

$$v \geqslant \sqrt{\frac{2\pi G\rho}{3}}r. \tag{34}$$

Jeśli ciało dotrze do środka, to zgodnie z punktem a) musi mieć niezerową prędkość, aby dolecieć do przeciwległego brzegu tunelu. Zatem w przypadku b) prędkość początkowa ciała musi spełniać warunek

$$v > \sqrt{\frac{2\pi G\rho}{3}}r, \tag{35}$$

czyli szukanym przedziałem jest przedział lewostronnie otwarty

$$\left(\sqrt{\frac{2\pi G\rho}{3}}r,\ \infty\right). \tag{36}$$

Zauważmy, że brak górnego ograniczenia prędkości jest wynikiem czysto teoretycznym w ramach przybliżenia nierelatywistycznego. W rzeczywistości prędkości ciał muszą być mniejsze od prędkości światła.

Punktacja zadania T3

Zauważenie, że pole grawitacyjne w pobliżu środka kuli można traktować jako sumę pól pochodzących od jednorodnej kuli o gęstości ρ oraz nieskończonego walca o gęstości $-\rho$ lub podejście równoważne – 2 pkt.

Pole grawitacyjne wewnątrz jednorodnej kuli (wzór (28) lub równoważny) wraz z wyprowadzeniem – 1 pkt.

Pole grawitacyjne wewnątrz jednorodnego walca (wzór (30) lub równoważny) wraz z wyprowadzeniem – 2 pkt.

Pole grawitacyjne wewnątrz tunelu w rozpatrywanej w zadaniu płaszczyźnie (wzór (32)) wraz zauważeniem, że jest to pole odpychające od środka – 2 pkt.

Warunek $v > 0$ na prędkość początkową w przypadku a) – 1 pkt.

Warunek na prędkość w przypadku b) ((wzór (35) lub równoważny) – 2 pkt.