LXXI OLIMPIADA FIZYCZNA
ROZWIĄZANIA ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA
CZĘŚĆ I

ZADANIA CZĘŚCI I (termin wysyłania rozwiązań — 15 października 2021 r.)
Przy rozwiązywaniu wszystkich zadań możesz korzystać z Internetu,
pamiętaj jednak, że nie wszystkie znalezione tam informacje są prawdziwe.

CZĘŚĆ TESTOWA

Zadanie W1.

Dragstery to pojazdy zbudowane tak, by osiągać jak największe przyspieszenia. Zbudowano innowacyjny model dragstera, posiadający masywne przednie koła, napędzane niezależnie od kół tylnych.

Niestety przy okazji podniesiono środek ciężkości pojazdu, tak, że głównym czynnikiem ograniczającym przyspieszenie nie jest tarcie ani moc silnika, a to żeby pojazd nie przewrócił się do tyłu.

Jak powinny być napędzane przednie koła w chwilę po ruszeniu pojazdu, aby pojazd osiągał jak największe przyspieszenie bez podnoszenia środka ciężkości:

A. z całą mocą tak, by obracały się do przodu
B. z całą mocą tak, by obracały się do tyłu
C. to jak będą napędzane przednie koła (i czy w ogóle będą) nie ma znaczenia.

Stwierdzenie „w chwilę po ruszeniu pojazdu ”oznacza, że ruch dzielimy na dwie fazy: pierwszą bardzo krótką, ale z maksymalnym możliwym przyspieszeniem i następująca po niej drugą („w chwilę po ruszeniu pojazdu”) trwająca aż do zakończenia przyspieszania.

Rozwiązanie zadania W1: B.

Ponieważ środek masy musi się znajdować nad podłożem, to w pierwszej fazie przednie koła uniosą się - cały pojazd obróci się nieco wokół osi tylnych kół. W drugiej fazie bardzo duże przyspieszenie będzie powodował o kontynuowanie tego obrotu, czyli unoszenie się środka ciężkości. Jeśli jednak będziemy napędzać przednie koła (zauważmy, że nie naciskają one na podłoże, więc obrót tych kół nie będzie zmieniał wypadkowej siły działającej na pojazd), czyli działać na nie pewnym momentem siły, to przeciwny moment siły będzie działać na kadłub pojazdu. Jeśli koła będą obracać się „do tyłu”, to moment siły działający na pozostałą część pojazdu będzie dążył do przeciwstawienia się obrotowi pojazdu (podnoszeniu środka ciężkości). Zatem w takiej sytuacji przyspieszenie może być większe, niż gdy przednie koła nie są napędzane.

Poprawną odpowiedzią jest: z całą mocą tak, by obracały się do tyłu.

Zadanie W2.

Rozważmy trzy współśrodkowe sfery o promieniach $R_1 = r$, $R_2 = 2r$, $R_3 = 3r$. Sfery są naładowane jednorodnie niezerowymi ładunkami Q_1, Q_2, Q_3. W którym przypadku siły elektrostatyczne pochodzące od rozpatrywanych ładunków działające na środkową sferę (o promieniu R_2) nie będą dążyć do zmiany jej promienia:

A. $Q_2 = -Q_1$, $Q_3 = Q_1$
B. $Q_2 = Q_1$, $Q_3 = -2Q_1$
C. $Q_2 = -2Q_1$, $Q_3 = -Q_1$
D. $Q_2 = -4Q_1$, $Q_3 = Q_1$
E. można dobrać takie niezerowe Q_1, Q_2, Q_3, a nie odpowiada to żadnemu z pozostałych wymienionych przypadków.

Rozwiązanie zadania W2: C.

Zauważmy następujące fakty:

1. na zewnątrz danej sfery, pole elektryczne pochodzące od niej jest takie, jakby cały ładunek tej sfery znajdował się w jej środku; zatem pole elektryczne w odległości R od środka sfery o ładunku Q wynosi $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$, gdzie ϵ_0 jest przenikalnością elektryczną próżni.

2. wewnątrz danej sfery, pole elektryczne pochodzące od niej jest równe 0.

3. ładunki danej sfery działają na siebie wzajemnie; pole elektryczne, w jakim znajduje się mały (bardzo cienki i w przybliżeniu płaski) fragment sfery (pochodzące od pozostałych części sfery) jest średnią pól „zewnętrznego” i „wewnętrznego” (podobnie jak w przypadku siły działającej na okładkę płaskiego kondensatora), czyli dla sfery o ładunku Q i promieniu R wynosi

$$\frac{1}{2}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Z punktu 2. wynika, że przy rozpatrywaniu środkowej sfery możemy zaniedbać sferę zewnętrzną. Z punktów 1. i 3. wynika, że pole elektryczne, w jakim znajduje się mały fragment środkowej sfery jest równe

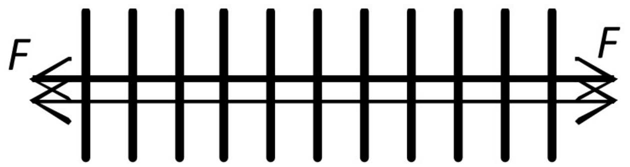
$$\frac{1}{2}\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left(\frac{Q_2}{8} + \frac{Q_1}{4}\right).$$

Aby to pole było równe 0 (a tym samym siła elektryczna działająca na ten fragment była równa 0) musi być zatem spełniony warunek

$$Q_2 = -2Q_1.$$

Taka sytuacja odpowiada przypadkowi $Q_2 = -2Q_1$, $Q_3 = -Q_1$ (oczywiście wartość Q_3 nie ma tu znaczenia).

Zadanie W3.



Do dwóch równoległych nitek przymocowano w równych odstępach jednakowe i jednorodne poprzeczne pręty (rys.). Napięto nitki pewną jednakową siłą F i wzbudzono falę polegającą na skręceniu kolejnych prętów w płaszczyźnie prostopadłej do nitek. Jak zmieni się prędkość tej fali, gdy:

a) zwiększymy siłę napinającą nitki,
b) zwiększymy masę prętów bez zmiany ich długości,
c) zwiększymy długość prętów bez zmiany ich masy,
d) zwiększymy odległość między prętami,
e) zwiększymy odległość między nitkami?

Przy każdym z punktów a-e wybierz W (wzrośnie), Z (zmaleje) lub N (nie zmieni się).

Rozwiązanie zadania W3: a) W, b) Z, c) Z, d) W, e) W.

Zauważmy, że dla zwykłej struny prędkość rozchodzącej się wzdłuż niej fali poprzecznej rośnie ze wzrostem naprężenia struny i maleje wraz ze wzrostem masy na jednostkę długości struny. Podobna sytuacja będzie zachodzić w naszym przypadku - zamiast masy mamy moment bezwładności pręta, a zamiast siły - moment siły.

Gdy zwiększymy siłę napinającą nitki, wzrośnie moment siły powodujący powrót wychylonego pręta do położenia równowagi, a więc prędkość fali wzrośnie.

Gdy zwiększymy masę prętów bez zmiany ich długości, wzrośnie ich moment bezwładności, a więc zmaleje przyspieszenie kątowe przywracające położenie równowagi - prędkość fali zmaleje.

Gdy zwiększymy długość prętów bez zmiany ich masy, wzrośnie ich moment bezwładności, a więc zmaleje przyspieszenie kątowe przywracające położenie równowagi - prędkość fali zmaleje.

Gdy zwiększymy odległość między prętami, zmaleje średni moment bezwładności prętów przypadający na jednostkę długości nici, a więc podobnie jak w przypadku struny, prędkość fali wzrośnie.

Gdy zwiększymy odległość między nitkami, przy danym kącie wychylenia pręta względem sąsiednich, będzie na niego działał większy moment siły dążący do szybszego powrotu pręta do położenia równowagi; zatem prędkość fali wzrośnie.

Zadanie W4.

Wiadomo, że masa cząsteczki wody nie jest dokładnie równa sumie mas atomu tlenu i dwóch atomów wodoru.

A. Większa jest suma mas wymienionych atomów, co ma związek z ciepłem spalania wodoru.
B. Większa jest suma mas wymienionych atomów, co ma związek ze ściśliwością gazów i cieczy.
C. Większa jest masa cząsteczki wody, co ma związek z ciepłem właściwym gazów i cieczy.
D. Większa jest masa cząsteczki wody, co ma związek z gęstością wody i gazów.

Rozwiązanie zadania W4: A.

Ponieważ cząsteczka wody jest stanem związanym (trwałym), jej energia musi być mniejsza niż suma energii pojedynczych atomów będących jej składnikami. Zatem, uwzględniając relatywistyczny związek między masą a energią, *większa jest suma mas wymienionych atomów*.
A ponieważ łączenie tlenu i wodoru to spalanie wodoru, prawidłową odpowiedzią jest:
Większa jest suma mas wymienionych atomów, co ma związek z ciepłem spalania wodoru.

Zadanie W5.

Jacek zaobserwował na gwiaździstym niebie szereg (więcej niż 20) świecących punktów (wyglądających jak poruszające się gwiazdy). Punkty znajdowały się w jednej linii i przesuwały względem gwiazd stałych jeden za drugim z taką samą, znaczną prędkością – czas przelotu każdego z nich przez widoczną część nieba wynosił kilka minut. Kilka dni później zaobserwował podobne zjawisko. Wybierz najbardziej prawdopodobne wyjaśnienie tego zjawiska:

A. to zapewne było przygotowanie do inwazji przez Obcych;
B. to były prawdopodobnie spalające się w atmosferze szczątki I stopnia chińskiej rakiety „Długi Marsz", której pozostała część spadła kilka tygodni wcześniej do oceanu;
C. to były planety, bo jak wiadomo planety poruszają się względem gwiazd stałych i wszystkie poruszają się w przybliżeniu w tej samej płaszczyźnie;
D. to były wystrzelone przez jedną rakietę, przelatujące się na wysokości kilkuset kilometrów nad Ziemią minisatelity systemu, który ma zapewnić dostęp do Internetu ze wszystkich punktów powierzchni Ziemi;
E. to były satelity geostacjonarne – jak wiadomo orbita geostacjonarna jest tylko jedna, a satelitów znajdujących się na tej orbicie jest dużo, zatem przy sprzyjających warunkach można zaobserwować opisany efekt.

Rozwiązanie zadania W5: D.

Prawidłową odpowiedzią jest: *to były wystrzelone przez jedną rakietę, przelatujące na wysokości kilkuset kilometrów nad Ziemią minisatelity systemu, który ma zapewnić dostęp do Internetu ze wszystkich punktów powierzchni Ziemi* - taki system rzeczywiście jest budowany, nazywa się *Starlink*, a opisany efekt widoczny - patrz np. https://findstarlink.com.

Komentarze odnośnie pozostałych odpowiedzi:

to zapewne było przygotowanie do inwazji przez Obcych - tego całkowicie nie da się wykluczyć, jednak jest to mało prawdopodobne wyjaśnienie;

to były prawdopodobnie spalające się w atmosferze szczątki I stopnia chińskiej rakiety "Długi Marsz" - szczątki rakiety powstają w trakcie jej spadania i spadają na ziemię w przybliżeniu w tym samym czasie, co pozostała część rakiety; spalając się są widoczne jak meteory, tzn. część z nich spala się szybko i przestaje być widoczna; nie oczekujemy również, że podobne zjawisko powtórzy się po kilku dniach;

to były satelity geostacjonarne - satelity geostacjonarne znajdują się w ustalonym punkcie na niebie, więc nie może to być poprawna odpowiedź;

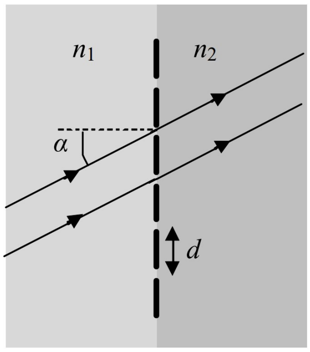
to były planety - planety poruszają się z niewielką prędkością po nieboskłonie względem gwiazd stałych; prócz tego liczba obserwowalnych planet jest istotnie mniejsza niż 20; zatem to nie mogły być planety.

CZĘŚĆ NUMERYCZNA

Zadanie N1.

Wiązka światła laserowego o długości fali w próżni λ pada na siatkę dyfrakcyjną o stałej siatki d znajdującą się na granicy ośrodków o współczynnikach załamania n_1 i n_2. Kierunek padania wiązki jest prostopadły do szczelin siatki, ale nie jest prostopadły do płaszczyzny siatki – kąt między tymi dwoma kierunkami (kąt padania) jest równy α. Na ekranie znajdującym się w odległości od granicy ośrodków znacznie większej niż d zaobserwowano, że maksimum prążka dyfrakcyjnego sąsiadującego z prążkiem zerowym (czyli o numerze $+1$ lub -1) znajduje się dokładnie na przedłużeniu początkowego kierunku biegu promienia. Wyznacz kąt α.

Rozwiązanie zadania N1.



Konstruktywna interferencja zachodzi, gdy różnica faz jest wielokrotnością 2π , czyli gdy

$$\frac{2\pi d}{\lambda}\left(n_1 \sin\alpha - n_2 \sin\beta\right) = 2\pi m, \tag{1}$$

gdzie β jest kątem, pod jakim obserwujemy maksimum m-tego prążka interferencyjnego (wyprowadzenie powyższego wzoru można znaleźć np. w rozwiązaniu zadania T1 II stopnia 70 OF).

W naszym przypadku $\beta = \alpha$, zatem

$$\frac{2\pi d}{\lambda}\left(n_1 - n_2\right) \sin\alpha = 2\pi m. \tag{2}$$

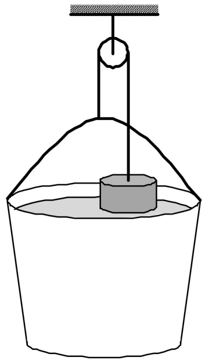
stąd, przyjmując $m = 1$ dla $n_1 > n_2$ oraz $m = -1$ dla $n_1 < n_2$, otrzymamy

$$\sin\alpha = \frac{\lambda}{|n_1 - n_2|\, d},$$

$$\alpha = \arcsin\frac{\lambda}{|n_1 - n_2|\, d}$$

Np. dla $d = 31 \cdot 10^{-6}$ m, $\lambda = 632{,}8 \cdot 10^{-9}$ m, $n_1 = 1{,}932$, $n_2 = 1{,}115$ otrzymamy $\alpha = 1{,}432^{\circ}$.

Zadanie N2.



Wiadro z wodą wisi na linie przerzuconej przez bloczek. Masa samego wiadra jest równa m kg. Na drugim końcu liny jest zawieszony jednorodny, metalowy walec o objętości V i gęstości ρ. Walec jest zanurzony w wodzie, przy czym zanurzona jest część p całkowitej objętości walca i nie dotyka on dna wiadra. Układ jest w równowadze. Wyznacz objętość wody w wiadrze. Gęstość wody wynosi ρ_w.

Rozwiązanie zadania N2.

Siła działająca na koniec liny, na którym jest zawieszone wiadro wynosi

$$F = (m + \rho_\mathrm{w} V_\mathrm{w} + \rho_\mathrm{w} \alpha V)\, g,$$

gdzie α jest ułamkiem, jaki stanowi zanurzona część walca w stosunku do jego całkowitej objętości.

Z drugiej strony wypadkowa siła F_c działająca na walec jest równa

$$F_\mathrm{c} = (\rho - \alpha\rho_\mathrm{w})\, V g - F.$$

Ponieważ układ jest w równowadze, to siła F_c jest równa 0, a zatem

$$(\rho - \alpha\rho_\mathrm{w})\, V g = (m + \rho_\mathrm{w} V_\mathrm{w} + \alpha\rho_\mathrm{w} V)\, g.$$

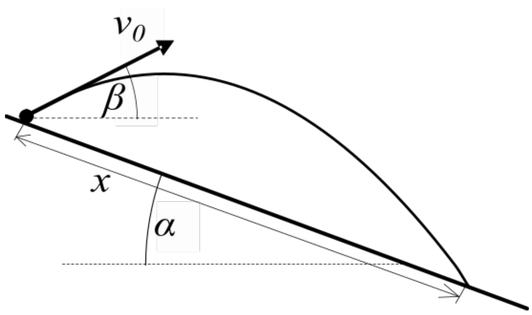
Stąd

$$V_\mathrm{w} = \frac{(\rho - 2\alpha\rho_\mathrm{w})\, V - m}{\rho_w}.$$

Np. dla $m = 4{,}3$ kg, $\rho = 3{,}8$ g/cm^3, $\alpha = 0,4$, $V = 2{,}8$ dm^3 otrzymamy

$$V_\mathrm{w} \approx 0{,}0041 \text{ m}^3 = 4{,}1 \text{ dm}^3$$

Zadanie N3.



Z równi pochyłej o kącie nachylenia α wyrzucono małe ciało z prędkością początkową v_0, patrz rysunek. Jaki powinien być kąt β nachylenia tej prędkości do poziomu, aby zasięg rzutu x był maksymalny? Pomiń opór powietrza.

Rozwiązanie zadania N3.

Ruch ciała wzdłuż równi jest ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem $g \sin\alpha$, zatem zależność od czasu t składowej x (wzdłuż równi) położenia ciała jest dana wzorem

$$x = v_0 \cos(\alpha + \beta)t + \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2.$$

Ruch ciała w kierunku prostopadłym do równi też jest ruchem jednostajnie przyspieszonym, ale z przyspieszeniem $g \cos\alpha$, zatem zależność od czasu t składowej y (prostopadłej do równi) położenia ciała jest dana wzorem

$$y = v_0 \sin(\alpha + \beta)t + \frac{1}{2} g \cos \alpha t^2.$$

Czas $t_{\max}$, po jakim ciało spadnie na równię, jest rozwiązaniem równania $y(t_{\max}) = 0$, stąd

$$t_{\max} = \frac{2v_0 \sin(\alpha + \beta)}{g \cos \alpha}.$$

Stąd zasięg

$$\begin{aligned}
x_{\max} &= v_0 \cos(\alpha + \beta) \frac{2v_0 \sin(\alpha + \beta)}{g \cos \alpha} + \frac{1}{2} g \sin \alpha \left(\frac{2v_0 \sin(\alpha + \beta)}{g \cos \alpha} \right)^2 \\
&= \frac{2v_0^2 \sin(\alpha + \beta)}{g \cos^2 \alpha} \left(\cos \alpha \cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin(\alpha + \beta) \right) \\
&= \frac{2v_0^2 \sin(\alpha + \beta)}{g \cos^2 \alpha} \cos(\beta) = \frac{v_0^2}{g \cos^2 \alpha} \left(\sin(\alpha + 2\beta) + \sin(\alpha) \right)
\end{aligned}$$

Dla ustalonego α powyższe wyrażenie ma maksimum, gdy $\sin(\alpha + 2\beta) = 1$, czyli gdy $\alpha + 2\beta = \pi/2$, co daje

$$\beta = (\pi/2 - \alpha)/2.$$

Np. dla $\alpha = 63{,}72^{\circ}$ otrzymamy $\beta = (90^{\circ} - \alpha)/2 = 13{,}14^{\circ}$.

Zadanie N4.

Marek zainstalował na swoim dachu kolektor słoneczny ciepła (woda jest ogrzewana promieniami słońca), natomiast Paweł zainstalował na swoim dachu baterie fotowoltaiczne o takiej samej powierzchni i ustawione tak samo jak kolektor Marka. Marek planuje używać swojego kolektora do podgrzewania wody o temperaturze otoczenia $t_1 = 13,1$ °C do temperatury $t_2 = 43,4$ °C. Paweł również zamierza podgrzewać wodę o temperaturze otoczenia t_1 do temperatury t_2, ale chce do tego użyć pompy ciepła (działającej w odwrotnym cyklu Carnota - informacje na temat cyklu Carnota wyszukaj w dostępnych Ci źródłach) wykorzystującej energie elektryczną pochodzącą z baterii fotowoltaicznych.

Ustal, ile razy więcej wody może podgrzać Paweł zakładając, że sprawność baterii fotowoltaicznych jest równa 15%, a w kolektorze do podgrzania wody jest wykorzystywane 50% energii światła słonecznego. Dla uproszczenia przyjmij, że pompa cieplna działa między temperaturą otoczenia t_1 a oczekiwaną końcową temperaturą wody t_2; jej sprawność jest równa maksymalnej sprawności teoretycznej.

Rozwiązanie zadania N4.

W cyklu Carnota

$$W = \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) Q_2,$$

gdzie W oznacza wykonaną przez silnik pracę, Q_2 oznacza ciepło pobrane z rezerwuaru ciepła (otoczenia) o temperaturze (w skali Kelvina) T_2, natomiast T_1 oznacza temperaturę chłodnicy ($T_2 > T_1$).

Pompa cieplna pracuje w odwrotnym cyklu Carnota i zachodzi związek

$$\bar{W} = \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) \bar{Q}_2,$$

gdzie $\bar{W}$ oznacza wykonaną przez pompę pracę (czyli energię dostarczoną do pompy), T_1 oznacza temperaturę otoczenia, a $\bar{Q}_2$ oznacza ciepło przekazane wodzie o temperaturze T_2. Zatem

$$\bar{Q}_2 = \frac{T_0 + t_2}{t_2 - t_1} \bar{W},$$

gdzie $T_0 = 273{,}15$ K oznacza temperaturę w kelwinach odpowiadającą 0 °C.

W przypadku kolektora słonecznego pochłonięta energia Słońca E_{S} jest zużywana na podgrzanie wody; w przypadku ogniwa fotowoltaicznego jest zamieniania na pracę, a następnie ta praca jest wykorzystywana w pompie cieplnej; czyli na podgrzanie wody może być użyte $\bar{Q}_2 = \frac{T_0+t_2}{t_2-t_1} E_{\mathrm{S}}$ ciepła. Zatem szukany stosunek wynosi w idealnym przypadku

$$\frac{T_0 + t_2}{t_2 - t_1}.$$

Uwzględniając założoną 15% sprawność baterii fotowoltaicznych oraz 50% sprawność kolektora słonecznego otrzymamy, że szukany stosunek wynosi

$$\frac{T_0 + t_2}{t_2 - t_1} \cdot \frac{0{,}15}{0{,}5}.$$

Dla $t_2 = 43{,}4^{\circ}$ C, $t_1 = 13{,}1^{\circ}$C, $T_0 = 273{,}15$ K jest on równy 3,13.

Zadanie N5.

Ustalono, że w stanie nieważkości pewna rakieta po czasie t_1 od włączenia silników zwiększy prędkość o v_0, przy czym w każdym momencie jej przyspieszenie będzie większe od 2 m/s^2. Jaką prędkość osiągnie po tym samym czasie ta rakieta startując pionowo z powierzchni Księżyca? Pomiń oddziaływanie gazów wylotowych z powierzchnią Księżyca.

Informacje, które mogą być przydatne:

przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Księżyca $g_{\mathrm{K}} = 1.62$ m/s^2,

prędkość wylotowa gazów $v_{\mathrm{g}} = 2000$ m/s.

Dla rakiety w próżni i stanie nieważkości obowiązuje wzór Ciołkowskiego

$$v = v_{\mathrm{g}} \ln \frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{k}}},$$

gdzie ln jest logarytmem naturalnym, tzn. logarytmem, którego podstawą jest liczba e $\approx 2{,}718$

Rozwiązanie zadania N5.

Przy starcie rakiety z powierzchni Księżyca jej przyspieszenie jest równe

$$a = a_{\mathrm{N}} - g_{\mathrm{K}},$$

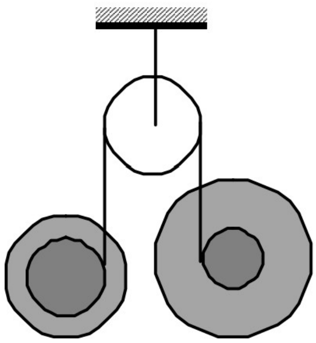
gdzie a_{N} jest przyspieszeniem rakiety w stanie nieważkości w tej samej chwili od włączenia silników. Stąd prędkość rakiety po czasie t_1 będzie równa

$$v = v_0 - g_{\mathrm{K}} t_1.$$

Zauważmy, że dla podanych danych droga przebyta przez rakietę jest rzędu kilku kilometrów, a więc zmiana przyspieszenia księżycowego z wysokością jest zaniedbywalna.

Np. dla $v_0 = 115$ m/s, $t_1 = 19{,}7$ s otrzymamy $v = 83{,}1$ m/s.

Zadanie N6.



Zabawka „jo-jo” składa się z dwóch walców o promieniu R_1 i łącznej masie m_{11} połączonych trzecim, mniejszym walcem o promieniu r_1 i masie m_{12}. Walce są jednorodne i mają wspólną oś. Dla drugiej takiej zabawki analogiczne parametry to R_2, m_{21}, r_{21} i m_{22}. Na mniejszych walcach nawinięto końce długiej nici, którą przełożono przez blok (rys.), po czym oba „joja” puszczono. Masę bloku, tarcie w jego osi, oraz opór powietrza można pominąć. Nić nie ślizga się po walcach, na które jest nawinięta. Przyjmij, że proste odcinki nici są stale pionowe. Podaj wartość stosunku przyspieszenia pierwszej zabawki do przyspieszenia drugiej.

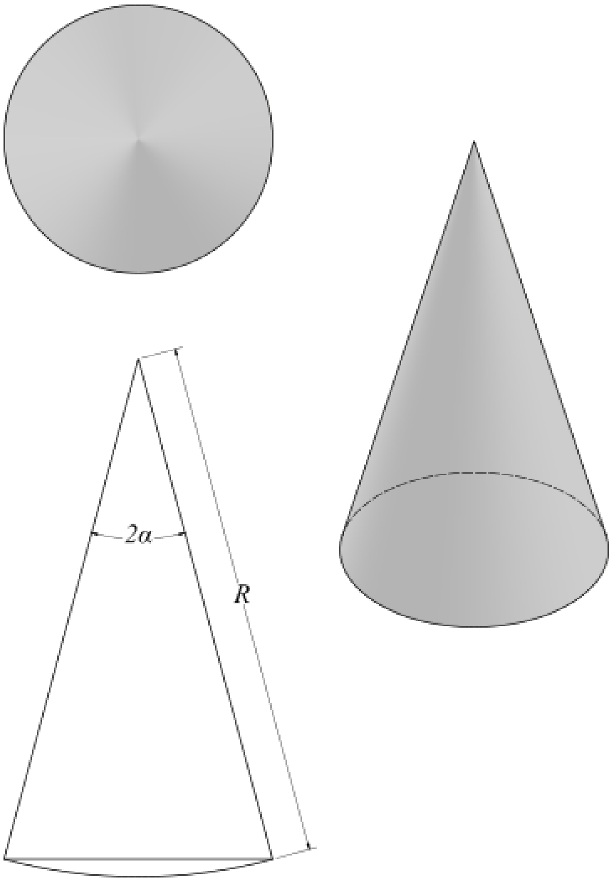
Rozwiązanie zadania N6.

Przyspieszenie każdej z zabawek jest równe

$$a_1 = \frac{(m_{11} + m_{12})\, g - N}{m_{11} + m_{12}},$$
$$a_2 = \frac{(m_{21} + m_{22})\, g - N}{m_{21} + m_{22}},$$

gdzie N oznacza napięcie nici, a g oznacza przyspieszenie grawitacyjne. Ponieważ zgodnie z danymi $m_{11} + m_{12} = m_{21} + m_{22}$, zatem stosunek przyspieszeń $a_1/a_2 = 1$.

Zadanie N7.



Pewna cywilizacja świętuje 333 333 rocznicę kolonizacji swojej galaktyki wysyłając w przestrzeń kosmiczną jednorodne, spiczaste monolity o masie m, będące wycinkami kuli o promieniu R m i kącie rozwarcia 2α (powierzchnia boczna jest powierzchnią boczną stożka o tworzącej R i małym kącie rozwarcia 2α, a podstawa jest wycinkiem sfery). Wyznacz przyspieszenie grawitacyjne na wierzchołku monolitu wywołane przez ten monolit.

Rozwiązanie zadania N7.

Szukane przyspieszenie otrzymamy sumując przyczynki pochodzące od warstw monolitu znajdujących się w przybliżeniu w stałej odległości od wierzchołka. Masa takiej jednej warstwy o grubości dr, znajdującej się w odległości r od wierzchołka jest równa

$$\rho S(\alpha) r^2 \mathrm{d}r,$$

gdzie ρ oznacza gęstość monolitu, a $S(\alpha)$ jest powierzchnią wycinka sfery o promieniu 1 i kącie rozwarcia 2α (czyli po prostu odpowiednim kątem bryłowym; zauważmy, że $S(\pi) = 4\pi$).

Sumując masy poszczególnych warstw, otrzymamy całkowitą masę monolitu, zatem:

$$m = \sum \rho S(\alpha) r^2 dr$$

z drugiej strony dla $\alpha = \pi$ mamy do czynienia z kulą, czyli musi zachodzić $m = \rho S(\alpha) R^3/3$.

Z symetrii wynika, że szukane przyspieszenie jest skierowane wzdłuż osi monolitu. Ponieważ kąt α jest mały, można przyjąć $\cos\alpha = 1$, czyli że składowa wzdłuż osi monolitu przyspieszenia pochodzącego od małego elementu warstwy jest równa wartości tego przyspieszenia. Sumując przyspieszenia grawitacyjne od poszczególnych warstw, otrzymamy, że szukane przyspieszenie jest dane wzorem

$$\gamma = \sum G \frac{\rho S(\alpha) r^2 \mathrm{d}r}{r^2} = G\rho S(\alpha) \sum \mathrm{d}r = G\rho S(\alpha) R.$$

Stąd szukane przyspieszenie, wyrażone przez masę monolitu, wynosi

$$\gamma = G\frac{3m}{R^2}.$$

Np. dla $R = 1 \cdot 10^6$ m, $\alpha = 1{,}1^{\mathrm{o}}$, $m = 2{,}3 \cdot 10^{16}$ kg i uwzględniając, że uniwersalna stała grawitacyjna wynosi $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m^3/(kg·s^2), otrzymamy $\gamma = 4{,}6 \cdot 10^{-6}$ m/s^2.

Zadanie N8.

Kolista pętla o promieniu r z przewodnika o oporze elektrycznym na jednostkę długości λ znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym, którego indukcja zmienia się zgodnie ze wzorem

$$B = B_0 \cos \omega t.$$

gdzie $B_0 = \mathrm{const.}$

Pętla obraca się wokół jednej ze swoich średnich z prędkością kątową ω, przy czym w chwili $t = 0$ pole $\vec{B}$ jest prostopadłe jej płaszczyzny. Wyznacz średnią szybkość wydzielania ciepła w tej pętli.

Rozwiązanie zadania N8.

Strumień indukcji pola magnetycznego przez pętlę jest równy

$$\varPhi = B\pi r^2 \cos\omega t = B_0 \pi r^2 \cos^2 \omega t = B_0 \pi r^2 \frac{\cos 2\omega t + 1}{2}.$$

Z prawa Faradaya wynika, że siła elektromotoryczna wynosi

$$\mathcal{E} = B_0 \pi r^2 \omega \sin 2\omega t.$$

średnia wartość kwadratu $\mathcal{E}$ jest równa $\langle \mathcal{E}^2 \rangle = B_0^2 \pi^2 r^4 \omega^2 / 2$, zatem wydzielana średnia moc to

$$P = \frac{\langle \mathcal{E}^2 \rangle}{R} = \frac{B_0^2 \pi^2 r^4 \omega^2}{2R} = \frac{B_0^2 \pi r^3 \omega^2}{4\lambda},$$

gdzie $R = 2\pi r \lambda$ jest całkowitym oporem pętli.

Np. dla $r = 0{,}148$ m, $\lambda = 0{,}268$ Ω/m, $\omega = 4{,}7$ rad/s, $B_0 = 0{,}18$ T, otrzymamy $P = 0{,}97$ mW.

Zadanie N9.

Napięcie przyspieszające elektrony w pewnym mikroskopie elektronowym pozwalającym obejrzeć koronawirusa SARS Cov-2 wynosi U. Zakładając, że elektrony początkowo spoczywały, wyznacz ich prędkość po przebyciu obszaru przyspieszającego.

Dane, które mogą być przydatne: masa elektronu $m_{\mathrm{e}} = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg$= 511 \cdot 10^3$ eV/c^2, wartość bezwzględna ładunku elektronu $q_{\mathrm{e}} = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C.

Rozwiązanie zadania N9.

Energia całkowita (z uwzględnieniem energii spoczynkowej) elektronu po pokonaniu różnicy potencjałów U wynosi

$$E = m_e c^2 + q_e U.$$

Ze wzoru

$$E = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

otrzymamy

$$v = \sqrt{1 - \frac{m_e^2 c^4}{E^2}}c = \sqrt{\frac{2q_e U}{m_e}} \frac{\sqrt{1 + \frac{q_e U}{2m_e c^2}}}{1 + \frac{q_e U}{m_e c^2}}.$$

Np. dla $U = 379 \cdot 10^3$ V otrzymamy $v = 2{,}454 \cdot 10^8$ m/s (pominięcie efektów relatywistycznych dałoby $v = 3{,}649 \cdot 10^8$ m/s).

Zadanie N10.

Armia amerykańska rozważa wprowadzenie na swoje wyposażenie plecaków odrzutowych. Oszacuj minimalną moc silników takiego plecaka w następujący sposób:

- przyjmij, że masa plecaka wraz z żołnierzem wynosi m = 120-160 kg. Rozważamy, sytuację, gdy plecak z żołnierzem "wiszą" nieruchomo na ustalonej wysokości h.

- z dyszy silników wylatuje powietrze, ze stałą prędkością, taką samą dla każdego silnika i dyszy. łączna powierzchnia przekroju poprzecznego strumienia powietrza tuż za dyszą (gdzie jego ciśnienie jest równe ciśnieniu atmosferycznemu) jest równa S.

- moc plecaka to minimalna moc potrzebna do przyspieszenia powietrza od prędkości 0 m/s, do prędkości zapewniającej utrzymanie zwisu. Przyjmujemy, że powietrze nie zmienia swojej temperatury, a jego gęstość jest równa d.

- pomiń wszelkie efekty aerodynamiczne (np. ruch otaczającego powietrza).

Przyspieszenie grawitacyjne jest równe g.

Rozwiązanie zadania N10.

Przyjmijmy, że prędkość wylotowa powietrza wynosi v. W ciągu czasu $\mathrm{d}t$ z dysz wylatuje masa $\mathrm{d}m = dSv\mathrm{d}t$ powietrza o pędzie równym

$$\mathrm{d}p = v\mathrm{d}m = dSv^2\mathrm{d}t.$$

Ponieważ to powietrze początkowo spoczywało, siła działająca na powietrze, a więc i siła unosząca plecak wynosi

$$F = Sv^2 d.$$

Ta siła musi być równa ciężarowi żołnierza wraz z plecakiem, stąd

$$v = \sqrt{\frac{mg}{Sd}}.$$

Energia kinetyczna wylatującego gazu jest równa

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{2}v^2\mathrm{d}m = \frac{1}{2}v^3 Sd\mathrm{d}t.$$

Ponieważ to powietrze początkowo spoczywało, moc niezbędna do przyspieszenia powietrza wynosi

$$P = \frac{1}{2}v^3 Sd = \frac{1}{2}\frac{(mg)^{3/2}}{(Sd)^{1/2}}.$$

Np. dla $S = 0{,}0190$ m^2, $m = 149{,}2$ kg otrzymamy $P = 179$ kW (jest to oczywiście sytuacja idealna; w praktyce moc musi być znacznie większa).