

LXXIII OLIMPIADA FIZYCZNA

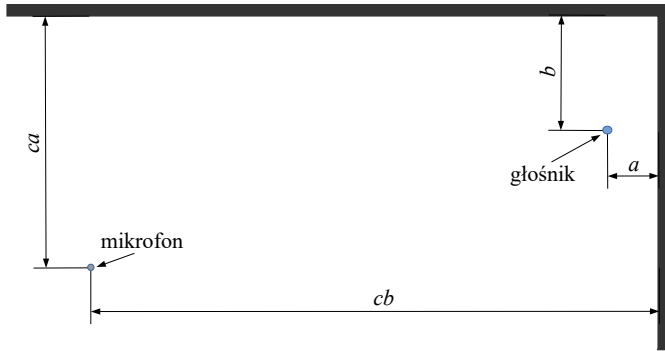
ZAWODY II STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA, 14.01.2024

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

Na końcu znajdują się zależności, które mogą być przydatne przy rozwiązywaniu zadań.

Zadanie 1



W pustym pomieszczeniu umieszczono głośnik w odległościach a oraz b (przy czym $a \neq b$) od dwóch jego prostopadłych ścian, patrz rysunek. Przedstawione na rysunku ściany całkowicie odbijają fale dźwiękowe (co oznacza, że amplituda drgań powietrza w kierunku prostopadłym do ściany, na granicy ściana-powietrze wynosi 0). Sufit, podłoga oraz pozostałe ściany pomieszczenia całkowicie absorbują (tłumią) padające fale – nie powstaje fala odbita. W pomieszczeniu umieszczono również mikrofon, w odległościach odpowiednio $c \cdot b$ oraz $c \cdot a$ od dwóch przedstawionych na rysunku ścian, przy czym $c \gg 1$.

Rozważany głośnik jest innowacyjnym rodzajem głośnika, a jego działanie jest równoważne małej kuli, której promień się zmienia wywołując drgania dźwiękowe – można go traktować jak punktowe, izotropowe źródło kulistej fali dźwiękowej. Częstotliwość f dźwięku emitowanego przez głośnik powoli zwiększano.

Zaobserwowano, że natężenie dźwięku rejestrowanego przez mikrofon zależy od częstotliwości f .

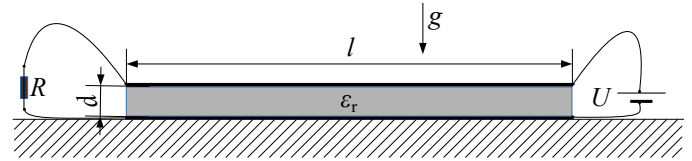
a) Dla jakiej najmniejszej wartości f natężenie rejestrowane przez mikrofon jest minimalne?

b) Wyznacz maksymalne możliwe natężenie dźwięku w punkcie, w którym ustawiono mikrofon w rozważanej sytuacji (zakładając, że częstotliwość f można wybrać dowolnie). Całkowita moc głośnika wynosi P . Natężeniem dźwięku nazywamy jego moc na jednostkę powierzchni. Również w tym punkcie uwzględnij, że $c \gg 1$. Prędkość dźwięku w powietrzu wynosi v . Mikrofon i głośnik ustawione są na tej samej wysokości. Wpływ obecności mikrofonu na rozchodzenie się dźwięku należy po-

minąć. Również należy pominąć wpływ głośnika na fale odbite.

Zadanie 2

Metalowa płytko o masie na jednostkę długości λ , długości l , szerokości w (gdzie $w \ll l$) oraz pomijalnej grubości leży na nieprzewodzącym poziomym podłożu. Do tej płytki przyklejono prostopadłościenny, sztywny dielektryk o stałej dielektrycznej ϵ_r , grubości d (gdzie $d \ll w$) oraz o takiej samej długości oraz szerokości jak płytko. Na dielektryku leży druga metalowa płytko, identyczna z pierwszą. Z jednej strony brzoży płytek o szerokości w podłączono do ogniwa o napięciu U , a z drugiej połączono ze sobą opornikiem o oporności R , patrz rysunek.



Wyznacz największe takie R_0 , że dla $R < R_0$ górna płytko uniesie się nad dielektrykiem. Wyznacz również wartość liczbową R_0 dla $d = 0,001$ m, $w = 0,02$ m, $\epsilon_r = 10$, $\lambda = 4,0 \cdot 10^{-5}$ kg/m, $U = 10$ V. Przyjmij, że przyspieszenie ziemskie $g = 9,81$ m/s².

Pomiń oporność płytek oraz masę połączeń. Pomiń również siły działające na płytki ze strony połączeń. Własności magnetyczne dielektryka można zaniedbać, tzn. są one identyczne z własnościami magnetycznymi próżni. Możesz przyjąć, że cały układ znajduje się w próżni.

Dla próżni przenikalność magnetyczna jest równa $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m, a przenikalność elektryczna $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m.

Zadanie 3

Pewien samochód terenowy o masie m ma cztery koła o osiach odległych o a , przy czym koła tej samej osi są od siebie odległe o b . Koła nie są skręcane, a zmianę kierunku jazdy uzyskuje się przez ich różną prędkość obrotową. Rozważmy sytuację, w której lewe koła obracają się do przodu, prawe do tyłu, z taką samą wartością

prędkości, a samochód obraca się jednostajnie wokół osi pionowej z prędkością kątową ω .

Koła są równomiernie obciążone, a siła tarcia kół o podłoże zależy od kierunku przesuwania się bieżnika względem podłoża; w kierunku a (zgodnym z płaszczyzną koła) współczynnik tarcia wynosi f_a , natomiast w kierunku b (zgodnym z kierunkiem osi kół) współczynnik tarcia wynosi f_b (patrz uwaga na końcu zadania). Podłoże jest jednorodne i poziome, a przyspieszenie ziemskie wynosi g .

Wyznacz minimalną moc silnika, jaka jest potrzebna, aby zachodziła opisana sytuacja.

Uwaga:

Jeśli v_a, v_b są składowymi (odpowiednio w kierunku a oraz b) prędkości bieżnika (w punkcie styczności z podłożem) względem podłoża, $v = \sqrt{v_a^2 + v_b^2}$ jest wartością tej prędkości, natomiast N jest siłą nacisku koła na podłoże, to odpowiednie składowe siły tarcia działające na bieżnik są równe:

$$\begin{aligned} T_a &= -f_a N \frac{v_a}{v}, \\ T_b &= -f_b N \frac{v_b}{v}. \end{aligned}$$

Informacje, które mogą być przydatne

1. Dla $|x| \ll 1$ zachodzi: $(1+x)^r \approx 1+r \cdot x$.

2. Prawo Gaussa

Dla pola elektrycznego \vec{E} w próżni, pola (przyspieszenia) grawitacyjnego $\vec{\gamma}$ oraz wektora indukcji pola magnetycznego \vec{B} całkowity strumień $\Phi_{\text{całk}}$ danego pola przez powierzchnię zamkniętą jest równy

$$\Phi_{\text{całk}} = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon_0} Q & \text{dla pola elektrycznego,} \\ -4\pi G \cdot M & \text{dla pola grawitacyjnego,} \\ 0 & \text{dla pola magnetycznego.} \end{cases}$$

gdzie Q jest całkowitym ładunkiem elektrycznym zawartym wewnątrz rozważanej powierzchni, M – całkowitą masą zawartą wewnątrz rozważanej powierzchni, ϵ_0 – przenikalnością elektryczną próżni, G – uniwersalną stałą grawitacyjną.

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

3. Prawo Ampère'a

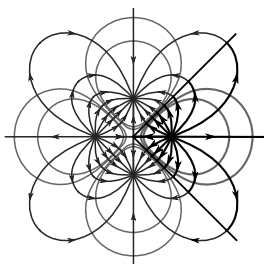
Krażeniem \mathcal{E}_B wektora indukcji pola magnetycznego \vec{B} po łamanej zamkniętej \mathcal{W} nazywamy wielkość

$$\mathcal{E}_B = \sum_{k=1}^N \vec{B}_k \cdot \Delta \vec{l}_k,$$

gdzie $\Delta \vec{l}_k$ odpowiadają kolejnym odcinkom łamanej \mathcal{W} , a \vec{B}_k jest średnim wektorem indukcji pola magnetycznego na odcinku $\Delta \vec{l}_k$.

W próżni zgodnie z prawem Ampère'a krażenie \mathcal{E}_B wektora indukcji pola magnetycznego \vec{B} po łamanej zamkniętej \mathcal{W} jest równe całkowitemu natężeniu prądu I przepływającego przez powierzchnię S , której brzegiem jest łamana \mathcal{W} , pomnożonemu przez przenikalność magnetyczną próżni μ_0 :

$$\mathcal{E}_B = \mu_0 I.$$



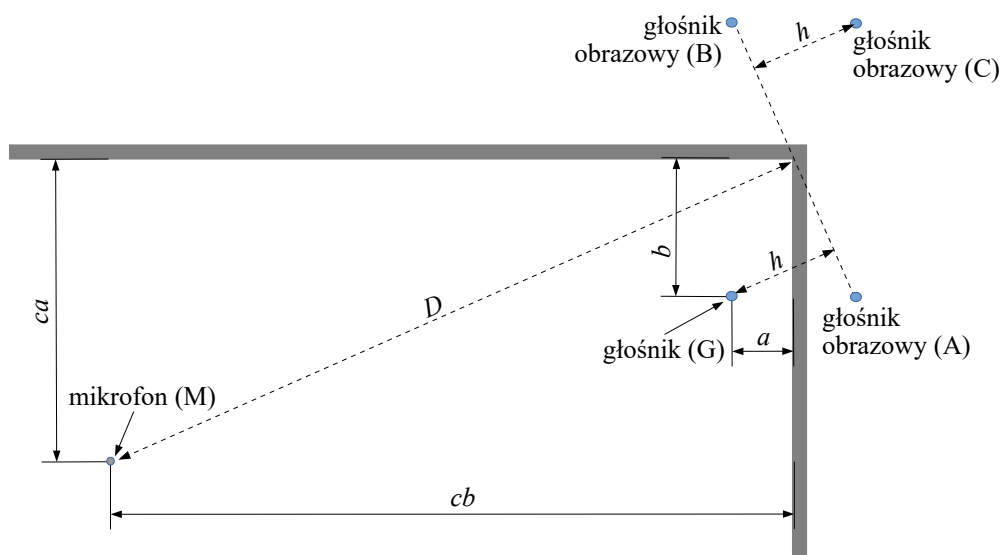
LXXIII OLIMPIADA FIZYCZNA

ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAWODÓW II STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Rozwiązanie zadania 1

Do mikrofonu dochodzi dźwięk pochodzący bezpośrednio od głośnika, odbity od pierwszej ściany, odbity od drugiej ściany, oraz odbity po kolei od obu ścian. Wewnątrz pomieszczenia sytuacja jest równoważna sytuacji, w której nie ma ścian, natomiast mamy układ czterech identycznych głośników umieszczonych symetrycznie względem płaszczyzn ścian (patrz rysunek) i drgających w tej samej fazie.



Aby się o tym przekonać, rozważmy dwa głośniki rozmieszczone symetrycznie względem jednej ze ścian, np. G i A. Wysyłane fale będą naprzeciw siebie, a ponieważ dźwięk jest falą podłużną, w każdym punkcie ściany prostopadłe do niej składowe ruchu powietrza spotykają się w przeciwnych fazach, czyli znoszą – zgodnie z podanym w treści zadania warunkiem. Jeśli do tych dwóch głośników dołożymy dwa otrzymane przez ich symetryczne odbicie względem drugiej ściany (B i C), warunek zerowania prostopadłej składowej wypadkowego ruchu powietrza będzie spełniony także dla drugiej płaszczyzny.

Głośniki znajdują się w wierzchołkach prostokąta o bokach $2a$ oraz $2b$; natomiast mikrofon znajduje się w wierzchołku prostokąta o bokach $2c \cdot b$ oraz $2c \cdot a$; ponieważ ten drugi prostokąt można otrzymać przez obrócenie pierwszego o 90° , a następnie powiększenie go c razy, przekątna większego prostokąta prowadząca od mikrofonu do narożnika pokoju jest prostopadła do przekątnej AB mniejszego prostokąta. To oznacza, że odległości od mikrofonu do głośnika rzeczywistego G

i do obrazowych A, B i C wynoszą odpowiednio:

$$d_G = |\overline{MG}| \approx D - h, \quad (1)$$

$$d_A = |\overline{MA}| \approx D, \quad (2)$$

$$d_B = |\overline{MB}| \approx D, \quad (3)$$

$$d_C = |\overline{MC}| \approx D + h, \quad (4)$$

gdzie

$$D = \sqrt{c^2 a^2 + c^2 b^2},$$

jest odległością od mikrofonu do narożnika, natomiast

$$h = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (5)$$

jest wysokością trójkąta prostokątnego GAB (lub ACB) o przyprostokątnych $2a$ oraz $2b$.

Wzory (1–4) uzyskano stosując przybliżenie używane przy analizie działania siatki dyfrakcyjnej – przyjęto, że źródła A, B, G, C są na tyle blisko siebie, że linie łączące te punkty z głośnikiem są w przybliżeniu równoległe i prostopadłe do odcinka AB; h można wyznaczyć np. zauważając, że pole trójkąta ABG (oraz trójkąta ACB) jest równe zarówno $\frac{1}{2}(2a) \cdot (2b)$ jak również $\frac{1}{2}h \cdot \sqrt{(2a)^2 + (2b)^2}$.

Powyższe wyniki można też otrzymać jawnym rachunkiem, np. dla d_G mamy

$$\begin{aligned} d_G &= \sqrt{(ca - b)^2 + (cb - a)^2} = \sqrt{c^2 a^2 + c^2 b^2 - 4cab + a^2 + b^2} \approx \\ &\approx c\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{1 - \frac{4ab}{c(a^2 + b^2)}} \approx c\sqrt{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{2ab}{c(a^2 + b^2)}\right) = \\ &= D - \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

Powyżej pominęliśmy wyrazy rzędu $1/c$ oraz skorzystaliśmy ze wzoru $(1+x)^r \approx 1+r \cdot x$ (dla $|x| \ll 1$).

Uwzględniając, że długość fali dźwiękowej jest równa v/f , różnice faz φ fali dźwiękowej dochodzącej do mikrofonu odpowiednio od głośników G, A, B, oraz C wynoszą:

$$\varphi_A - \varphi_G = \varphi_B - \varphi_G = 2\pi \frac{hf}{v}, \quad (6)$$

$$\varphi_C - \varphi_G = 4\pi \frac{hf}{v}. \quad (7)$$

Aby natężenie fali dźwiękowej dochodzącej do mikrofonu było minimalne, musi zachodzić interferencja destruktywna, co dla najniższej częstotliwości zajdzie gdy:

$$\varphi_A - \varphi_G = \varphi_B - \varphi_G = \pi, \quad (8)$$

$$\varphi_C - \varphi_G = 2\pi. \quad (9)$$

Zatem szukana najniższa częstotliwość, przy której natężenie dźwięku dochodzącego do mikrofonu będzie minimalne, wynosi

$$f = \frac{v}{2h} = \frac{v\sqrt{a^2 + b^2}}{4ab}. \quad (10)$$

Zauważmy, że ponieważ amplituda fali dźwiękowej maleje wraz z odległością, dla powyższej częstotliwości natężenie dźwięku nie będzie równe dokładnie 0 – będzie jednak zerowe w bardzo dobrym przybliżeniu. Jest to podobna sytuacja, jaka zachodzi dla dyfrakcji światła na siatce dyfrakcyjnej.

b)

Ponieważ dźwięk od jednego głośnika rozchodzi się izotropowo, to w przypadku braku innych głośników jego natężenie w odległości r od głośnika jest równe $P/(4\pi r^2)$, gdzie $4\pi r^2$ jest polem powierzchni sfery o promieniu r . Przy rozważaniu natężenia dźwięku (oraz jego amplitudy), można w przybliżeniu przyjąć, że każdy z czterech rozważanych głośników jest odległy od mikrofonu o $c\sqrt{a^2 + b^2}$, zatem natężenie dźwięku od każdego z głośników rozważanych osobno wynosiłoby $P/(4\pi c^2 (a^2 + b^2))$.

Jeśli zwiększymy częstotliwość dwukrotnie w porównaniu z częstotliwością daną wzorem (10), to fale dźwiękowe przychodzące ze wszystkich głośników (prawdziwych i obrazowych) będą miały tę samą fazę. To oznacza, że amplituda fali wypadkowej będzie 4 razy większa od amplitudy fali od jednego głośnika, a ponieważ natężenie jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy, otrzymamy, że szukane maksymalne natężenie dźwięku I będzie $4^2 = 16$ razy większe od natężenia od jednego głośnika. Zatem zgodnie z tą analizą maksymalne sumaryczne natężenie dźwięku wynosi

$$I = \frac{4P}{\pi c^2 (a^2 + b^2)}. \quad (11)$$

Punktacja zadania 1.

Zauważenie, że sumaryczna fala dźwiękowa dochodząca do mikrofonu jest sumą fal pochodzących bezpośrednio od głośnika rzeczywistego oraz od 3 głośników obrazowych, otrzymanych przez odbicie rzeczywistego głośnika symetrycznie względem płaszczyzn ścian, przy czym wszystkie głośniki drgają w tej samej fazie (nie jest niezbędne jawne wprowadzenie głośników obrazowych – wystarczy prawidłowe rozważenie odbić od ścian /dwa razy pojedyncze, raz podwójne + brak zmiany fazy przy odbiciu) 3 pkt
(1 pkt jeśli są tylko dwa głośniki obrazowe; 1 pkt jeśli są 3 głośniki, ale nie ma uzasadnienia, że fazy są takie same)

Odległości (lub tylko ich różnice), uwzględniające $c \gg 1$ (wzory (1–5) lub równoważne) 2 pkt
(1 pkt jeśli nie ma głośnika C)

Różnice faz dźwięku dochodzącego do mikrofonu od głośników (wzory (6–7) lub równoważne) oraz warunki interferencji destruktywnej (wzory (8–9) lub równoważne) ... 2 pkt.
Najniższa częstotliwość f odpowiadająca minimalnemu natężeniu dźwięku odbieranego przez mikrofon (wzór (10) lub równoważny) 1 pkt
Maksymalna moc docierająca do mikrofonu wraz z uzasadnieniem (wzór (11) lub równoważny) 2 pkt
(1 pkt nieuwzględnienie, że moc jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy, tzn. wynik $I = P/(\pi c^2 (a^2 + b^2))$)

Rozwiązanie zadania 2

Zgodnie ze wzorem na pojemność kondensatora płaskiego

$$C = \varepsilon \frac{S}{d},$$

gdzie $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$, ładunek na każdej z płytek jest równy $\pm Q$, gdzie

$$Q = CU = \varepsilon \frac{lw}{d} U. \quad (12)$$

Pole elektryczne nad i pod płaską płytką, naładowaną ładunkiem powierzchniowym o gęstości powierzchniowej σ jest prostopadłe i symetryczne względem tej płytki i ma wartość

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (13)$$

W naszym przypadku $\sigma = Q/(lw)$.

Wzór (13) można uzyskać np. z faktu, że pole elektryczne między okładkami próżniowego kondensatora płaskiego jest równe (uwaga: w poniższych przekształceniach U , d , S są parametrami ogólnego kondensatora płaskiego, niekoniecznie równymi parametrom w rozważanym zadaniu):

$$E_{\text{kon}} = \frac{U}{d} = \frac{Q/C}{d} = \frac{(Q/S)d/\varepsilon_0}{d} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (14)$$

Ponieważ to pole jest sumą pól pochodzących od dwóch okładek kondensatora, otrzymujemy wzór (13).

Wynik ten można też otrzymać korzystając z symetrii i prawa Gaussa.

Na zewnątrz kondensatora płaskiego pole elektryczne jest równe zero, zatem górna płytka znajduje się w zewnętrznym polu elektrycznym o wartości danej wzorem (13), tzn.

$$E_{\text{zewn}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 lw}. \quad (15)$$

Może się wydawać dziwne, że wzór (15) nie uwzględnia obecności dielektryka. Zauważmy jednak, że płytka znajduje się (w szczególności w sytuacji, gdy zaczyna się unosić) poza dielektrykiem. Można też na to wytłumaczyć w ten sposób, że pola elektryczne od ładunków wyindukowanych na górnej oraz dolnej ścianie dielektryka znoszą się na zewnątrz niego. Zauważmy przy tym, że przy ustalonym napięciu U wartość E_{zewn} zależy od stałej dielektrycznej, gdyż ładunek Q od niej zależy.

Uwzględniając wzory (15) oraz (12) siła elektryczna działająca na górną płytkę jest równa

$$F_{\text{el}} = QE_{\text{zewn}} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 lw} = \quad (16)$$

$$= \frac{\varepsilon_r^2 \varepsilon_0 lw U^2}{2d^2}. \quad (17)$$

Ponieważ płytki są naładowane ładunkami o przeciwnych znakach, ta siła jest skierowana w stronę dolnej płytki, czyli w dół.

Przez płytki płynie prąd, zatem oddziałują one ze sobą siłami magnetycznymi. Ponieważ $l \gg d$, można przyjąć, że ten prąd płynie wzdłuż krawędzi płytki długości l , i że jest rozłożony równomiernie wzdłuż krawędzi długości w .

Obszar między płytkami, ze względu na płynące przez nie prądy, można potraktować jako wnętrze zwojnicy, zatem indukcja pola magnetycznego w tym obszarze jest równa

$$B = \mu_0 \frac{I}{w},$$

gdzie

$$I = \frac{U}{R},$$

jest natężeniem prądu płynącego przez płytki.

Uwaga: na pierwszy rzut oka wydaje się, że zastosowanie zwojnicy do rozważanego przypadku jest błędne, gdyż szerokość naszej zwojnicy jest znacznie większa niż długość; możemy jednak tę zwojnicę podzielić formalnie na wiele małych zwojnic o szerokości d każda, a ponieważ $d \ll w$, sytuacja jest jak w przypadku nieskończonej zwojnicy.

Rozważana indukcja pola magnetycznego jest skierowana prostopadle do kierunku płynącego prądu, czyli wzdłuż krawędzi płytki o długości w .

Ta indukcja jest sumą indukcji pochodzącej od dolnej oraz górnej płytki, zatem indukcja pola magnetycznego pochodząca od dolnej płytki jest równa

$$B_{zew} = \frac{\mu_0 I}{2w}. \quad (18)$$

(Ten wynik można też uzyskać z symetrii i prawa Ampère'a). Jest to jednocześnie indukcja zewnętrznego pola magnetycznego, w jakim znajduje się górna płytka. Zatem siła magnetodynamiczna działająca na górną płytkę jest równa

$$F_m = -IB_{zew}l = \quad (19)$$

$$= -\frac{1}{2}\mu_0 \left(\frac{U}{R}\right)^2 \frac{l}{w}. \quad (20)$$

Użyliśmy to znaku minus, ponieważ równoległe przewody w których płyną prądy o przeciwnych zwrotach się odpychają, a więc siła magnetodynamiczna działająca na górną płytkę jest skierowana do góry.

Sumaryczna siła – z pominięciem ewentualnej siły mechanicznej reakcji dielektryka – działająca na górną płytkę jest zatem równa

$$F_{sum} = F_{el} + F_m + l\lambda g = \quad (21)$$

$$= \frac{\varepsilon_r^2 l w U^2}{2\varepsilon_0 d^2} - \frac{1}{2}\mu_0 \left(\frac{U}{R}\right)^2 \frac{l}{w} + l\lambda g, \quad (22)$$

gdzie $l\lambda g$ jest ciężarem płytki. Wraz ze zmniejszaniem się R siła ta maleje i staje się ujemna – górną płytkę odrywa się od dielektryka. W granicznym przypadku, dla $R = R_0$, powinno być $F_{sum} = 0$, czyli

$$\frac{\varepsilon_r^2 \varepsilon_0 l w U^2}{2d^2} - \frac{1}{2}\mu_0 \left(\frac{U}{R_0}\right)^2 \frac{l}{w} + l\lambda g = 0.$$

Stąd

$$R_0 = \sqrt{\frac{\mu_0 U^2}{\frac{\varepsilon_r^2 \varepsilon_0 w^2 U^2}{d^2} + 2\lambda g w}} = \quad (23)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_r^2 \varepsilon_0 w^2}{\mu_0 d^2} + \frac{2\lambda g w}{\mu_0 U^2}}}. \quad (24)$$

Zauważmy, że dla dużych napięć (tzn. dla $U^2 \gg 2\lambda g w / \mu_0$), R_0 przestaje zależeć od U . Z drugiej strony dla małych napięć (tzn. dla $U^2 \ll 2\lambda g w / \mu_0$), pierwszy wyraz pod pierwiastkiem przestaje mieć znaczenie, co oznacza, że przyciąganie elektrostatyczne jest znacznie mniejsze od siły ciężkości działającej na płytkę.

Dla danych podanych w treści zadania otrzymamy

$$R_0 = 1,57 \Omega. \quad (25)$$

Punktacja zadania 2.

Zewnętrzne pole elektryczne, w którym jest górna płytką (wzór (15) lub równoważny),
wraz z wyprowadzeniem 2 pkt
(1 pkt jeśli współczynnik jest 1 zamiast 1/2, lub wzięto połowę
natężenia pola wewnątrz kondensatora)

Siła elektrostatyczna działająca na okładkę (wzór (17) lub równoważny) 2 pkt
(jeśli wynik jest błędny, ale konsystentny z wynikiem na zewnętrzne
pole elektryczne – patrz uwaga w pkt. 1. – nadal 2 pkt)

Indukcja zewnętrznego pola magnetycznego, w którym znajduje się górna płytką (wzór
(18) lub równoważny), wraz z wyprowadzeniem 2 pkt
(1 pkt jeśli współczynnik jest 1 zamiast 1/2)

Siła magnetodynamiczna działająca na okładkę (wzór (19) lub równoważny) 1 pkt
(jeśli wynik jest błędny, ale konsystentny z wynikiem na zewnętrzne
pole magnetyczne – patrz uwaga w pkt. 3. – nadal 1 pkt)

Wypadkowa siła działająca na okładkę (wzór (22) lub równoważny) 1 pkt

Szukane R_0 (wzór (24) lub równoważny) 1 pkt

Wynik liczbowy na R_0 (wzór (25); wystarczają 2 cyfry znaczące) 1 pkt

Rozwiązanie zadania 3

Ze względu na (anty)symetrię zagadnienia wystarczy rozważyć tylko koła z jednej strony samochodu; niech indeks 1 odpowiada przedniemu lewemu kołu, a indeks 2 – tylnemu lewemu kołu. Przyjmując, że kierunek obrotu jest od lewej do prawej, otrzymujemy, że odpowiednie składowe prędkości \vec{v}_1 oraz \vec{v}_2 przesuwania się bieżnika odpowiedniego koła względem podłoża są równe

$$v_{1a} = \omega \frac{b}{2} - V, \quad v_{1b} = \omega \frac{a}{2}, \quad (26)$$

$$v_{2a} = \omega \frac{b}{2} - V, \quad v_{2b} = -\omega \frac{a}{2}, \quad (27)$$

gdzie V jest (nieznaną w tym momencie) prędkością bieżnika koła względem jego osi. (Zauważmy, że zwroty odpowiednich wektorów przyjęliśmy jako od tylnego koła do przedniego oraz od lewego koła do prawego; dodatnie ω odpowiada obrotowi w prawo z punktu widzenia kierowcy.)

Stąd wynika, że składowe sił działających na odpowiednie koła wynoszą

$$F_{1a} = -f_a \frac{\omega \frac{b}{2} - V}{v} \frac{mg}{4}, \quad F_{1b} = -f_b \frac{\omega \frac{a}{2}}{v} \frac{mg}{4}, \quad (28)$$

$$F_{2a} = -f_a \frac{\omega \frac{b}{2} - V}{v} \frac{mg}{4}, \quad F_{2b} = -f_b \frac{-\omega \frac{a}{2}}{v} \frac{mg}{4}. \quad (29)$$

Powyżej $mg/4$ jest siłą nacisku pojedynczego koła na podłoże, natomiast

$$v = \sqrt{\left(\omega \frac{b}{2} - V\right)^2 + \left(\omega \frac{a}{2}\right)^2}. \quad (30)$$

Uwzględniając powyższe, wypadkowy moment siły względem pionowej osi przechodzącej przez środek masy koła, równoodległej od środka każdego z kół, jest równy

$$M = 2 \left(F_{1a} \frac{b}{2} + F_{1b} \frac{a}{2} + F_{2a} \frac{b}{2} - F_{2b} \frac{a}{2} \right) = \quad (31)$$

$$= -4 \frac{f_a \left(\omega \frac{b}{2} - V\right) \frac{b}{2} + f_b \omega \frac{a}{2} \frac{a}{2}}{v} \frac{mg}{4}. \quad (32)$$

Powyżej, w pierwszym równaniu, pojawił się czynnik 2 ponieważ uwzględniliśmy również koła z prawej strony samochodu.

Ponieważ samochód obraca się jednostajnie, zachodzi $M = 0$, a stąd

$$V = \frac{f_b a^2 + f_a b^2}{2f_a b} \omega. \quad (33)$$

Dla $f_a = f_b$ otrzymamy

$$V = \frac{a^2 + b^2}{2b} \omega,$$

co jest zgodne z wynikiem zadania z I stopnia bieżącej olimpiady.

Dla $f_b = 0$ otrzymamy $V = \frac{b}{2} \omega$, czyli bieżnik będzie się ślizgał względem podłoża tylko w kierunku prostopadłym do płaszczyzny koła.

Dla $f_a \rightarrow 0$ otrzymamy $V \rightarrow \infty$.

Zgodnie z ogólnym wzorem na moc ($P = \vec{F} \cdot \vec{v}$), niezbędna moc jest równa

$$P = -2(F_{1a} v_{1a} + F_{1b} v_{1b} + F_{2a} v_{2a} + F_{2b} v_{2b}) = \quad (34)$$

$$= 4 \frac{f_a \left(\omega \frac{b}{2} - V\right)^2 + f_b \left(\omega \frac{a}{2}\right)^2}{v} \frac{mg}{4}. \quad (35)$$

Powyżej we wzorze (34) pojawił się znak minus, ponieważ siły F_{1a} , F_{1b} , F_{2a} , F_{2b} to siły tarcia, a nas interesuje moc, jaką musimy działać, aby pokonać te siły.

Ponieważ

$$\begin{aligned}\omega \frac{b}{2} - V &= \left(\frac{b}{2} - \frac{f_b a^2 + f_a b^2}{2f_a b} \right) \omega = \\ &= -\frac{f_b a^2}{2f_a b} \omega.\end{aligned}$$

Stąd

$$P = \frac{\frac{f_b^2 a^4}{f_a b^2} + f_b a^2}{\sqrt{\frac{f_b^2 a^4}{f_a^2 b^2} + a^2}} \frac{mg\omega}{2} = \quad (36)$$

$$= \frac{mg\omega}{2} \frac{a}{b} \frac{f_b^2 a^2 + f_a f_b b^2}{\sqrt{f_b^2 a^2 + f_a^2 b^2}}. \quad (37)$$

Rozwiązanie alternatywne zadania 3

W tej wersji rozwiązania nie będziemy wykorzystywać pełnej postaci działających sił oraz nie będziemy wyznaczać momentu sił obracających samochód.

Pierwszym etapem, tak samo jak w poprzednim rozwiązaniu, jest wyznaczenie prędkości bieżnika kół względem podłoża (wzory (26–27)).

Następnie zauważmy, że jeśli samochód obraca się ze stałą prędkością kątową, to wypadkowy moment sił tarcia pochodzących od podłoża powinien być równy zero. To może zajść, jeśli każda z sił tarcia będzie skierowana kierunku (do lub od) osi obrotu, tzn. pionowej osi przechodzącej przez środek masy samochodu. To zajdzie jeśli

$$\frac{F_{1a}}{F_{1b}} = -\frac{a}{b}, \quad (38)$$

$$\frac{F_{2a}}{F_{2b}} = \frac{a}{b}. \quad (39)$$

Uwzględniając wzory na składowe siły tarcia z treści zadania oraz wzory (26–27) otrzymamy w obu przypadkach (38–39)

$$\frac{f_a \left(\omega \frac{b}{2} - V \right)}{f_b \omega \frac{a}{2}} = -\frac{a}{b}. \quad (40)$$

Zauważmy, że gdybyśmy dla każdego koła otrzymali inne równanie, nie można by wyznaczyć V – podejście stosowane w tym rozwiązaniu nie byłoby poprawne. Jednak to, że otrzymaliśmy takie same równanie wynika z odpowiedniej symetrii zagadnienia – w istocie uwzględniając tę symetrię można rozważać tylko jedno koło.

Rozwiązując równanie (40) otrzymamy $V = (a^2 + b^2) \omega / (2b)$, czyli równanie (26).

Wyznamy teraz moc P_{1T} związaną z pracą siły tarcia \vec{F}_1 działającej na przednie lewe koło. Zgodnie z ogólnym wzorem $P_{1T} = \vec{F}_1 \cdot \vec{v}_1$, gdzie \vec{v}_1 jest wektorem prędkości bieżnika koła 1

względem podłoża (o składowych v_{1a} , v_{1b}). Zauważmy, że $\vec{v}_1 = \vec{v}_{\text{obr}} + \vec{V}$, gdzie \vec{v}_{obr} to prędkość środka koła wynikająca z ruchu obrotowego całego samochodu, a \vec{V} – wektor prędkości dolnej części bieżnika względem środka koła. Wektory \vec{v}_{obr} oraz F_1 są do siebie prostopadłe, a więc ich iloczyn skalarny wynosi 0, stąd

$$P_{1T} = \vec{F}_1 \cdot \vec{V} = -F_{1a}V = \quad (41)$$

$$= f_a \frac{v_{1a}}{v} \frac{mg}{4} V, \quad (42)$$

gdzie (jak poprzednio) $v = \sqrt{(v_{1a})^2 + (v_{1b})^2}$. Znak minus w drugiej równości pojawił się, ponieważ wektor \vec{V} ma zwrot przeciwny niż zwrot zgodny z konwencją, jaką przyjęliśmy. Uwzględniając, że mamy cztery koła, oraz że niezbędna moc silnika ma przeciwny znak, niż moc sił tarcia, otrzymujemy

$$P = -4P_{1T} = \quad (43)$$

$$= -4f_a \frac{v_{1a}}{v} \frac{mg}{4} V. \quad (44)$$

Zauważmy, że mimo znaku minus w powyższym wzorze, moc P jest dodatnia, gdyż prędkość v_{1a} jest ujemna.

Uwzględniając wzory (26), (33) oraz wyrażenie na v , po przekształceniach znowu otrzymujemy wynik

Punktacja zadania 3.

| | |
|---|-------|
| Prędkość bieżnika względem podłoża przy założeniu, że prędkość V bieżnika względem osi kół jest znana (wzory (26–27) lub równoważne; wystarczy rozważyć tylko jedno koło, pod warunkiem uzasadnienia tego symetrią) | 2 pkt |
| Siły tarcia działające na koła (wzory (28–29) lub równoważne) | 1 pkt |
| Wypadkowy moment sił tarcia działający na samochód (wzór (32) lub równoważny) | 2 pkt |
| Prędkość bieżnika względem osi kół (wzór (33) lub równoważny) | 2 pkt |
| Szukana moc wyrażona przez prędkość V (wzór (35) lub równoważny) | 1 pkt |
| Szukana moc w jawnej postaci (wzór (37) lub równoważny) | 2 pkt |

Punktacja zadania 3 dla alternatywnego rozwiązania.

| | |
|---|--------|
| Prędkość bieżnika względem podłoża przy założeniu, że prędkość V bieżnika względem osi kół jest znana (wzory (26–27) lub równoważne; wystarczy rozważyć tylko jedno koło, pod warunkiem uzasadnienia tego symetrią) | 2 pkt. |
| Warunek znikania momentów sił (wzory (38–38) lub równoważne albo tylko wzór (38) wraz z argumentem symetrii) wraz z uzasadnieniem | 2 pkt |
| Prędkość bieżnika względem osi kół (wzór (33) lub równoważny) | 2 pkt |
| Szukana moc wyrażona przez prędkości V , v_{1a} oraz v (wzór (44) lub równoważny) .. | 2 pkt |
| Szukana moc w jawnej postaci (wzór (37) lub równoważny) | 2 pkt |