

LXXV OLIMPIADA FIZYCZNA

ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAWODÓW I STOPNIA

CZĘŚĆ I

ZADANIA CZĘŚCI I (termin wysyłania rozwiązań — 10 października 2025 r.)

Przy rozwiązywaniu wszystkich zadań możesz korzystać z Internetu, pamiętaj jednak, że nie wszystkie znalezione tam informacje są prawdziwe.

CZĘŚĆ TESTOWA

Zadanie W1

W ciepły dzień w pomieszczeniu biurowym włączono klimatyzację, w wyniku jej działania temperatura powietrza obniżyła się z 25 do 22 stopni Celsjusza, a ciśnienie w pomieszczeniu nie zmieniło się. Niech U_0 , U_1 oznaczać całkowitą energię kinetyczną cząsteczek powietrza wewnątrz pomieszczenia odpowiednio przed i po włączeniu klimatyzatora, a $\bar{U}_0$, $\bar{U}_1$ molową średnią energię kinetyczną cząsteczek powietrza odpowiednio przed i po włączeniu klimatyzatora. Pomijając rozszerzalność termiczną elementów pomieszczenia, wskaż poprawne stwierdzenie zakładając, że powietrze można traktować jak gaz doskonały, a proporcje jego składników nie ulegają zmianie

- $U_1 < U_0$, $\bar{U}_1 = \bar{U}_0$
- $U_1 = U_0$, $\bar{U}_1 < \bar{U}_0$
- $U_1 < U_0$, $\bar{U}_1 < \bar{U}_0$
- $U_1 = U_0$, $\bar{U}_1 = \bar{U}_0$
- $U_1 < U_0$, $\bar{U}_1 > \bar{U}_0$
- $U_1 > U_0$, $\bar{U}_1 < \bar{U}_0$.

Rozwiązanie zadania W1

Energia kinetyczna n moli gazu o molowym cieple właściwym C_V jest równa

$$U = nC_V T,$$

gdzie T jest temperaturą absolutną.

Korzystając z równania stanu gazu doskonałego można ten wzór przepisać jako

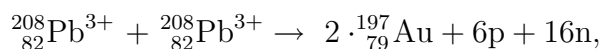
$$U = pV \frac{C_V}{R},$$

gdzie p jest ciśnieniem, V – objętością, a R – uniwersalną stałą gazową.

Z powyższego wynika, że $U_0 = U_1$. Z drugiej strony, skoro temperatura spadła, spadła też średnia energia kinetyczna cząsteczek powietrza. Zatem prawidłową odpowiedzią jest $U_1 = U_0$, $\bar{U}_1 < \bar{U}_0$. Oznacza to, że skutkiem ubocznym działania klimatyzatora jest zwiększenie liczby cząsteczek w pomieszczeniu.

Zadanie W2

W wyniku zderzania przeciwbieżnych wiązek zawierających jądra ołowiu w akceleratorze CERN powstają między innymi jądra złota. Załóżmy, że opanowaliśmy technologię pozwalającą na przeprowadzenie następującej reakcji w skali przemysłowej



gdzie ${}^{208}_{82}\text{Pb}^{3+}$ jest jonem ołowiu (atomem ołowiu z usuniętymi trzema elektronami), ${}^{197}_{79}\text{Au}$ – atomem złota, p – protonem, n – neutronem.

Masy występujących powyżej elementów wynoszą: $M_{\text{Pb}^{3+}} = 207,97500$ u, $M_{\text{Au}} = 196,96657$ u, $M_{\text{p}} = 1,007276$ u, $M_{\text{n}} = 1,008665$ u, gdzie u jest jednostką masy atomowej.

Przyjmij cenę energii elektrycznej 1,5 zł/kWh oraz pominiń wpływ obecności elektronów na rozpatrywany bilans energetyczny. Minimalny koszt K energii potrzebnej do wyprodukowania 1 g złota w tym procesie spełnia warunek:

- $K \leq 10$ zł
- $10 \text{ zł} < K \leq 1000$ zł
- $1000 \text{ zł} < K \leq 50 \text{ tys. zł}$
- $50 \text{ tys. zł} < K \leq 10 \text{ mln zł}$
- $K > 10 \text{ mln zł}$.

Rozwiązanie zadania W2

Niezbędna minimalna energia na jedno jądro złota jest równa

$$E_1 = (M_{\text{Au}} + 3M_{\text{p}} + 8M_{\text{n}} - M_{\text{Pb}^{3+}}) \cdot c^2,$$

gdzie c jest prędkością światła, którą przyjmujemy równą $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Minimalna energia potrzebna do otrzymania 1 g złota jest równa

$$E = \frac{(M_{\text{Au}} + 3M_{\text{p}} + 8M_{\text{n}} - M_{\text{Pb}^{3+}}) \cdot c^2}{M_{\text{Au}}} \cdot 0,001 \text{ kg},$$

co daje $E = 3,78 \cdot 10^{10}$ J = 37,8 GJ ≈ 10 MWh. Przy podanej cenie energii otrzymujemy, że koszt wyprodukowania 1 g złota nie może być mniejszy niż 15 000 zł. Zatem prawidłową odpowiedzią jest $1000 \text{ zł} < K \leq 50 \text{ 000 zł}$.

Zadanie W3

Pewien astronauta zabrał (w ramach małego bagażu podręcznego) w podróż do Międzynarodowej Stacji Kosmicznej podręczny zegar wahadłowy. Zadbął przy tym, by podstawa zegara była prostopadła do kierunku wskazującego pion. Sumaryczne przeciążenie działające na astronautów wynosiło (średnio): w chwilach od 0 (startu) do 1,5 min – 1,5g, od 1,5 do 3 min – 3,5g, od 3 min do 9 min – 1,5g. W momencie startu zegar pokazywał godzinę 12:00. Jaki czas wskazywał ten zegar w chwili wyłączenia silników (po 9 minutach od startu):

- 12:06

- 12:09
- 12:12
- 12:15
- odpowiedź zależy od tego, czy napęd zegara był sprężynowy, czy grawitacyjny (za pomocą ciężarków).

Rozwiązanie zadania W3

Przyrost czasu wskazywanego przez zegar jest proporcjonalny do częstości drgań wahadła, która jest proporcjonalna do pierwiastka z przyspieszenia ziemskiego g_0 . W naszym przypadku należy zastąpić przyspieszenie ziemskie przez przeciążenie.

Zatem czas wskazywany przez zegar jest równy

$$t = t_0 + T_1 \sqrt{\frac{g_1}{g_0}} + T_2 \sqrt{\frac{g_2}{g_0}} + T_3 \sqrt{\frac{g_3}{g_0}},$$

gdzie T_i , g_i , $i = 1, 2, 3$ odpowiadają długości odpowiedniego przedziału czasu, g_i – przeciążeniu w danym przedziale, a t_0 odpowiada chwili początkowej.

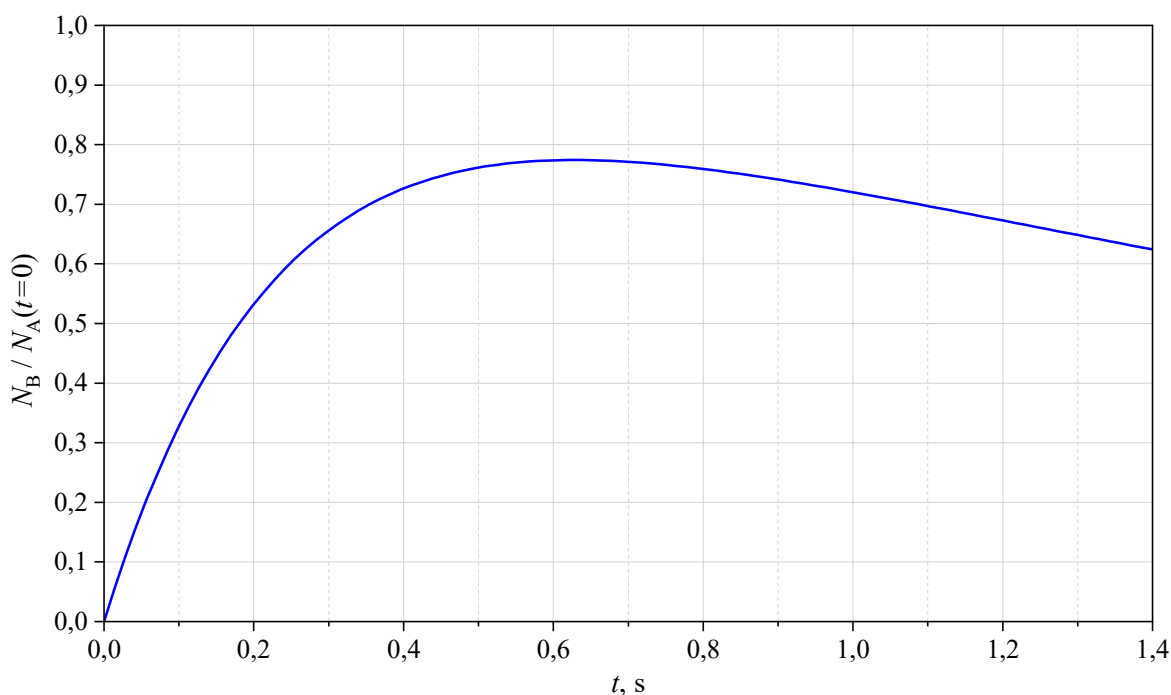
Dla danych z treści zadania $T_1 = 1,5$ min, $g_1 = 1,5 \cdot g_0$, $T_2 = 1,5$ min, $g_2 = 3,5 \cdot g_0$, $T_3 = 6,0$ min, $g_3 = 1,5 \cdot g_0$ otrzymamy

$$t - t_0 \approx 12 \text{ min.}$$

Zatem prawidłową odpowiedzią jest 12:12.

Zadanie W4

Izotop A rozpada się przechodząc w izotop B, a ten z kolei rozpada się przechodząc w izotop C. W chwili początkowej badana próbka zawierała tylko izotop A. Wykres przedstawia zależność od czasu t stosunku liczby jąder izotopu B do początkowej liczby jąder izotopu A (uwaga: nie są to realne izotopy, parametry są arbitralne).



Wyznacz czasy połowicznego rozpadu izotopu A oraz izotopu B. Załóż, że liczba jąder jest tak duża, że przypadkowość rozpadów (fluktuacje) można zaniedbać.

Jedna z podanych odpowiedzi jest prawdziwa (zgodna z wykresem). Wybierz tę odpowiedź

- $T_{A1/2} = 0,17 \text{ s}$, $T_{B1/2} = 0,17 \text{ s}$
- $T_{A1/2} = 0,17 \text{ s}$, $T_{B1/2} = 1,7 \text{ s}$
- $T_{A1/2} = 1,7 \text{ s}$, $T_{B1/2} = 0,17 \text{ s}$
- $T_{A1/2} = 0,31 \text{ s}$, $T_{B1/2} = 0,31 \text{ s}$
- $T_{A1/2} = 0,31 \text{ s}$, $T_{B1/2} = 3,1 \text{ s}$
- $T_{A1/2} = 3,1 \text{ s}$, $T_{B1/2} = 0,31 \text{ s}$.

Rozwiązanie zadania W4

Zgodnie z prawem rozpadu promieniotwórczego, dla bardzo małych czasów t

$$\begin{aligned} \frac{N_B(t)}{N_A(t=0)} &= 1 - \frac{N_A(t)}{N_A(t=0)} = 1 - e^{-t \ln 2 / T_{A1/2}} = \\ &\approx t \cdot \ln 2 / T_{A1/2}, \end{aligned}$$

przy czym ze względu na małość t pominęliśmy to, że izotop B się rozpada. Wartość $\ln 2 / T_{A1/2} = k$ można odczytać z wykresu, jako współczynnik kierunkowy prostej stycznej do wykresu w $t = 0$. W naszym przypadku $k \approx 4 \text{ 1/s}$, zatem $T_{A1/2} \approx 0,17 \text{ s}$.

W maksimum (chwila t_m) liczba jąder B się nie zmienia, a zatem w krótkim czasie Δt liczba jąder B powstających w rozpadzie jąder A jest równa liczbie rozpadających się jąder B, czyli korzystając z analogicznego przybliżenia jak powyżej mamy

$$\Delta t \cdot N_A(t = t_m) \ln 2/T_{A1/2} - \Delta t \cdot N_B(t = t_m) \ln 2/T_{B1/2} = 0.$$

A zatem

$$\frac{N_A(t = t_m)}{N_A(t = 0)} \ln 2/T_{A1/2} = \frac{N_B(t = t_m)}{N_A(t = 0)} \ln 2/T_{B1/2}.$$

Wartość $N_B(t = t_m)/N_A(t = 0)$ możemy odczytać z wykresu (wynosi ona około 0,86 w chwili $t_m = 0,65$ s), natomiast

$$\frac{N_A(t = t_m)}{N_A(t = 0)} = e^{-t_m \ln 2/T_{A1/2}} = e^{-t_m \cdot k} \approx 0,074.$$

Zatem

$$T_{B1/2} = \frac{N_B(t = t_m)/N_A(t = 0)}{N_A(t = t_m)/N_A(t = 0)} T_{A1/2} \approx 2 \text{ s}.$$

Spośród podanych w treści zadania odpowiedzi, najbliższa otrzymanemu tutaj wynikowi jest $T_{A1/2} = 0,17$ s, $T_{B1/2} = 1,7$ s (otrzymana przez nas wartość $T_{B1/2}$ różni się od podanej w rozwiązaniu głównie ze względu na niedokładność wyznaczenia t_m).

Zadanie W5

Rozważmy „kroplę” wody o promieniu R , znajdującą się gdzieś w przestrzeni kosmicznej. Dla jakiego R wkład do ciśnienia w środku kropli pochodzący od napięcia powierzchniowego jest równy wkładowi do ciśnienia w środku kropli pochodzącemu od grawitacji wody zawartej w kropli? Pomiń ściśliwość wody. Przyjmij, że woda nie paruje. Napięcie powierzchniowe wody wynosi $\sigma = 0,072$ N/m, gęstość wody $\rho = 1000$ kg/m³, uniwersalna stała grawitacyjna $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg². Pomiń oddziaływanie grawitacyjne innych ciał.

Wybierz warunek, który spełnia wyznaczone R :

- $R \leq 1$ m
- $1 \text{ m} < R \leq 100$ m
- $100 \text{ m} < R \leq 10$ km
- $10 \text{ km} < R \leq 1000$ km
- $R > 1000$ km.

Jaki jest wkład napięcia powierzchniowego do ciśnienia wewnątrz kropli wyszukaj w dostępnych źródłach.

Rozwiązanie zadania W5

Natężenie pola grawitacyjnego w odległości r od środka kropli jest równe

$$\gamma = G \frac{4\pi r^3 \rho}{3r^2} = G \frac{4\pi \rho}{3} r.$$

Stąd ciśnienie w środku kropli pochodzące od grawitacji wynosi

$$p_{\text{graw}} = G \frac{2\pi \rho^2}{3} R^2.$$

Ponieważ natężenie pola grawitacyjnego γ jest liniową funkcją r , ten wynik można otrzymać mnożąc średnie (połowę sumy maksymalnej oraz minimalnej wartości) natężenie pola grawitacyjnego przez promień kropli R i gęstość wody ρ .

Ciśnienie pochodzące od napięcia powierzchniowego jest równe

$$p_{\text{nap}} = \frac{2\sigma}{R}$$

Z warunku $p_{\text{graw}} = p_{\text{nap}}$ otrzymamy

$$R = \sqrt[3]{\frac{3\sigma}{\pi G \rho^2}}$$

dla

$$\begin{aligned} G &= 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}, \\ \rho &= 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \\ \sigma &= 0,072 \text{ N/m}, \end{aligned}$$

otrzymamy $R = 10,1 \text{ m}$, zatem prawidłowa jest odpowiedź $1 \text{ m} < R \leq 100 \text{ m}$.

CZĘŚĆ NUMERYCZNA**Zadanie N1**

Okres obiegu satelity wokół pewnej planety po orbicie kołowej o promieniu $R_0 = 3500 \text{ km}$ wynosi $T_0 = 132 \text{ min}$. Wyznacz okres obiegu wokół tej samej planety satelity po orbicie, w której najmniejsza odległość satelity od środka planety (perycentrum) wynosi $R_{\text{min}} = 6000 \text{ km}$, natomiast największa odległość satelity od środka planety (apocentrum) wynosi $R_{\text{max}} = 16000 \text{ km}$.

Rozwiązanie zadania N1

Zgodnie z trzecim prawem Keplera

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const},$$

gdzie T jest okresem obiegu po elipsie o półosi wielkiej równej a .

W naszym przypadku oznacza to

$$\frac{T_0^2}{R_0^3} = \frac{T^2}{\left(\frac{R_{\min} + R_{\max}}{2}\right)^3}.$$

Stąd

$$T = \left(\frac{R_{\min} + R_{\max}}{2R_0}\right)^{3/2} T_0.$$

Dla $R_0 = 3500$ km, $T_0 = 132$ min, $R_{\min} = 6000$ km, $R_{\max} = 16000$ km otrzymamy $T = 735,5$ min.

Zadanie N2

Tenisista uderza piłkę znajdującą się w momencie uderzenia tuż nad powierzchnią kortu, w odległości $d = 10$ m od siatki. Chce on by piłka przeleciała nad siatką i uderzyła po jak najkrótszym czasie (od momentu uderzenia) w kort, w odległości nie większej niż $a = 12$ m od siatki. Wysokość siatki jest stała i równa $h = 1,02$ m, a szerokość kortu (i zarazem długość siatki) wynosi $b = 8,2$ m. W momencie uderzenia piłka jest w takiej samej odległości od bocznych linii kortu. Przyjmij, że przyspieszenie grawitacyjne wynosi $g = 9,81$ m/s².

Pomijając wpływ powietrza na ruch piłki oraz jej rozmiary i przyjmując, że uderzenie jest natychmiastowe, wyznacz ten najkrótszy czas.

Rozwiązanie zadania N2

Aby piłka przeleciała nad siatką, musi wznieść się co najmniej na wysokość h nad powierzchnię kortu. Jednocześnie jeśli wysokość lotu piłki wynosi z , to czas jej lotu t jest równy sumie czasu wznoszenia i opadania, czyli $t = 2\sqrt{2z/g}$. Zatem najkrótszy lot odpowiada najmniejszemu możliwemu z , czyli $z = h$. Parabola lotu piłki jest krzywą symetryczną względem najwyższego punktu, zatem jeśli ten najwyższy punkt jest nad siatką, to piłka spadnie po drugiej stronie siatki, w odległości d od siatki, po drugiej jej stronie. Zatem jeśli $a \geq d$ (a taki warunek spełniają przypadki rozważane w zadaniu) to taki tor spowoduje upadek piłki w dopuszczalnym miejscu. Zatem w przypadku $a \geq d$, minimalny czas będzie równy

$$t = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Dla $h = 1,02$ m, przy $g = 9,81$ m/s², otrzymamy $t = 0,912$ s.

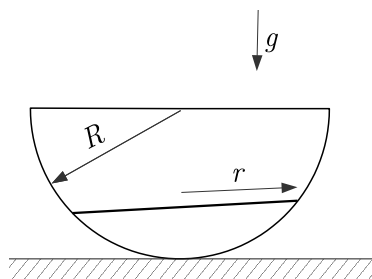
Oczywiście pozioma składowa prędkości musi być taka, by rzeczywiście najwyższy punkt toru piłki był tuż nad siatką, co oznacza że prostopadła do siatki, pozioma składowa prędkości piłki musi być równa

$$v_x = \frac{d}{t}.$$

To czy w poziomie piłka porusza się prostopadle do siatki, czy pod kątem nie ma znaczenia dla naszych rozważań.

Zadanie N3

Wewnątrz unieruchomionej, półsferycznej czaszy o promieniu wewnętrznym $R = 0,16$ m znajduje się cienki, jednorodny krążek o masie $m = 0,1$ kg i promieniu $r = 0,112$ m, patrz rysunek.



Krażek może ślizgać się po wnętrzu czaszy. Wyznacz okres T drgań krążka przy małych odchyleniach od położenia równowagi.

Przyspieszenie grawitacyjne wynosi $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ i jest równoległe do osi symetrii czaszy. Pomiń tarcie i opór powietrza.

Moment bezwładności krążka względem osi przechodzącej przez jego środek i leżącej w jego płaszczyźnie jest równy $mr^2/4$.

Rozwiązanie zadania N3

Rozważane zagadnienie sprowadza się do drgań krążka opisanego w zadaniu, zawieszonego na nieważkim pręcie długości $l = \sqrt{R^2 - r^2}$, przy czym pręt stale pozostaje prostopadły do płaszczyzny krążka (wahadło fizyczne).

Przy odchyleniu rozważanego pręta o kąt α od pionu, moment siły grawitacji względem punktu zawieszenia jest równy

$$M = -lmg \sin \alpha,$$

gdzie znak minus odpowiada temu, że M dąży do powrotu do położenia pionowego.

Z drugiej strony moment bezwładności krążka przymocowanego do pręta względem punktu zawieszenia wynosi

$$I = ml^2 + \frac{mr^2}{4}.$$

Z drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego mamy

$$I \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -lmg \sin \alpha,$$

co dla małych α można zapisać jako

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\frac{lmg}{I} \alpha.$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego, a zatem szukany okres T jest równy

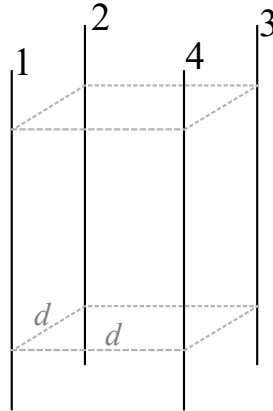
$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{lmg/I}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\sqrt{R^2 - r^2}g/(R^2 - 3r^2/4)}}.$$

Dla $R = 0,16 \text{ m}$, $r = 0,112 \text{ m}$, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ otrzymamy

$$T = 0,755 \text{ s}.$$

Zadanie N4

Rozważmy cztery cienkie, długie, równoległe do siebie przewody tworzące cztery krawędzie prostopadłościanu o kwadratowej podstawie o boku $d = 7$ cm, patrz rysunek. Przez przewód k (gdzie $k = 1, 2, 3, 4$) płynie prąd o zmiennym natężeniu $I_k = I_0 \cos(\omega t + k\pi/2)$, gdzie $\omega = 150$ 1/s, $I_0 = 4,2$ A. Wyznacz wartość średniej (w czasie) siły na jednostkę długości przewodu 1, z jaką ten przewód jest przyciągany przez pozostałe przewody (ewentualna ujemna wartość będzie oznaczała, że przewód 1 jest (średnio) odpychany od pozostałych przewodów. Przenikalność magnetyczna próżni jest równa $\mu_0 = 12,57 \cdot 10^{-7}$ V·s/(A·m).

**Rozwiązanie zadania N4**

Skierowana w stronę przewodu 3 siła na jednostkę długości działająca na przewód 1 jest w chwili t równa

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \mu_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} I_1(t) I_2(t) \frac{1}{2\pi d} + I_1(t) I_3(t) \frac{1}{2\pi \sqrt{2} d} + \frac{\sqrt{2}}{2} I_1(t) I_4(t) \frac{1}{2\pi d} \right) = \\ &= \mu_0 I_0^2 \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 2\pi d} \sum_{k=2}^4 \cos(\omega t + \pi/2) \cos(\omega t + k\pi/2) = \\ &= \mu_0 I_0^2 \frac{\sqrt{2}}{4\pi d} \sum_{k=2}^4 (\cos(2\omega t + (k+1) \cdot \pi/2) + \cos((k-1)\pi/2)) / 2. \end{aligned}$$

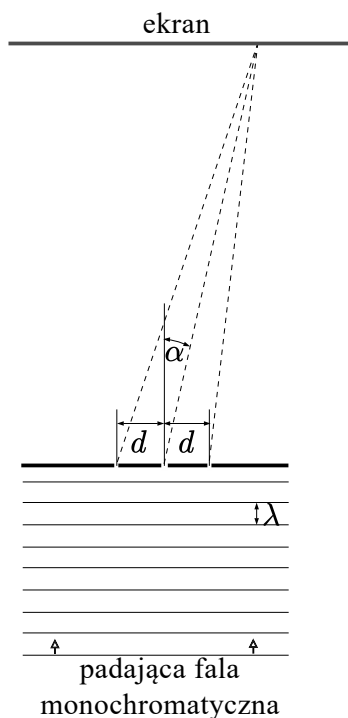
Średnia po okresie $T = 2\pi/\omega$ z $\cos(2\omega t + (k+1) \cdot \pi/2)$ jest równa 0, $\cos(\pi/2) = 0 = \cos(3\pi/2)$, $\cos(2\pi/2) = -1$, stąd średnie f_1 jest równe

$$\langle f_1 \rangle = -\mu_0 I_0^2 \frac{\sqrt{2}}{8\pi d}.$$

Dla $I_0 = 4,2$ A, $d = 0,07$ m otrzymamy $\langle f_1 \rangle = -1,78 \cdot 10^{-5}$ N/m.

Zadanie N5

W płaskiej przegrodzie znajdują się trzy równoodległe, cienkie szczeliny o identycznej długości. Odległość między sąsiednimi szczelinami wynosi $d = 2,116 \mu\text{m}$. Szerokość środkowej szczeliny jest $w = 1,4$ raza większa niż pozostałych. Na przegrodę pada prostopadłe monochromatyczna fala o długości fali $\lambda = 650$ nm. Na ekranie znajdującym się w odległości znacznie większej od d można zaobserwować prążki interferencyjne.



Wyznacz kąt odchylenia α odpowiadający pierwszemu minimum interferencyjnemu.

Rozwiązanie zadania N5

Jeśli l jest drogą przy przejściu przez środkową szczelinę, to drogi odpowiadające przejściu światła przez pozostałe szczeliny wynoszą $l - d \sin \alpha$ oraz $l + d \sin \alpha$, gdzie α jest kątem odchylenia. Zatem natężenie pola fali świetlnej w punkcie obserwacji jest proporcjonalne do

$$\begin{aligned} \cos \left(2\pi \frac{l - d \sin \alpha}{\lambda} - \omega t \right) + w \cos \left(2\pi \frac{l}{\lambda} - \omega t \right) + \cos \left(2\pi \frac{l + d \sin \alpha}{\lambda} - \omega t \right) = \\ = \cos \left(2\pi \frac{l}{\lambda} - \omega t \right) \left(w + 2 \cos \frac{2\pi d \sin \alpha}{\lambda} \right), \end{aligned}$$

gdzie ω jest częstością drgań światła, a t – czasem.

Minimum natężenia światła (czyli średniej w czasie kwadratu powyższego wyrażenia) wystąpi, gdy $w + 2 \cos \frac{2\pi d \sin \alpha}{\lambda} = 0$, czyli gdy $\cos \frac{2\pi d \sin \alpha}{\lambda} = -w/2$, co daje

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{\lambda}{2\pi d} \arccos \left(-\frac{w}{2} \right), \\ \alpha &= \arcsin \left(\frac{\lambda}{2\pi d} \arccos \left(-\frac{w}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Dla $\lambda = 650 \cdot 10^{-9}$ m, $d = 2116 \cdot 10^{-9}$ m, $w = 1,4$ otrzymamy $\alpha = 0,1150$ rad = $6,59^\circ$.

Zadanie N6

Kulkę o masie $m = 6,5$ g, promieniu $r = 0,7$ cm oraz momencie bezwładności $I = kmr^2$, gdzie $k = 0,45$ (kulka nie jest jednorodna, ale jej gęstość zależy tylko od odległości od jej środka) położono na poziomym taśmociągu, którego taśma porusza się z prędkością $v_0 = 0,4$

m/s względem podłoża. Współczynnik tarcia między kulką a taśmą jest równy $f = 0,45$, tarcie toczone oraz opory powietrza są pomijalnie małe. Początkowo kulka była nieruchoma względem podłoża.

Wyznacz końcową prędkość ruchu postępowego kulki v względem podłoża.

Rozwiązanie zadania N6

Zauważmy, że siła tarcia działająca na kulkę jest pozioma i przyłożona w punkcie styczności kulki z taśmociągiem S, natomiast zarówno siła ciężkości działająca na kulkę, jak i siła reakcji podłoża są pionowe i leżą na prostej przechodzącej przez S. Oznacza to, że moment pędu kulki względem S jest zachowany. Początkowo kulka była nieruchoma, więc ten moment pędu był równy 0, natomiast w stanie końcowym kulka toczy się bez poślizgu po taśmociągu obracając się z prędkością kątową $\omega = (v - v_0)/r$. Zatem

$$\begin{aligned} 0 &= mvr + I\omega = \\ &= mvr + I\frac{v - v_0}{r}. \end{aligned}$$

Stąd

$$v = \frac{Iv_0}{mr^2 + I} = \frac{k}{1 + k}v_0.$$

Dla $k = 0,45$, $v_0 = 0,4$ m/s otrzymamy 0,124 m/s.

Zadanie N7

Sonda kosmiczna Parker krąży wokół Słońca, zbliżając się do niego (w peryhelium orbity) na odległość około 6,1 mln km. Aby uświadomić sobie, jak gorąco jest w takich odległościach od Słońca, wyobraźmy sobie, że ta sonda minęła po drodze planetoidę będącą kulą o promieniu $r = 800$ m poruszającą się wokół Słońca po kołowej orbicie o promieniu $R = 6,6$ mln km. Jaką temperaturę T miałyby rozważana planetoida, gdyby była ciałem doskonale szarym o względnej zdolności emisyjnej $A = 0,8$. Przyjmij, że materiał planetoidy jest bardzo dobrym przewodnikiem ciepła.

Co to jest ciało doskonale szare, wyszukaj w dostępnych ci źródłach.

Stała Stefana-Boltzmann'a jest równa $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ W/(m² · K⁴), promień Słońca $R_S = 696$ tys. km, temperatura jego powierzchni $T_S = 5770$ K. W promieniowaniu Słońca uwzględnij jedynie promieniowanie elektromagnetyczne.

Rozwiązanie zadania N7

Natężenie promieniowania w odległości R od środka Słońca wynosi

$$s = \sigma T_S^4 \frac{R_S^2}{R^2}.$$

To promieniowanie jest pochłaniane przez poprzeczną do kierunku promieniowania część powierzchni planetoidy równą πr^2 ; uwzględniając zdolność emisyjną powierzchni kuli (równą zdolności absorpcyjnej), pochłaniana moc promieniowania jest równa

$$P = A_s \pi r^2 s.$$

W stanie równowagi o temperaturze T moc pochłaniana jest równa mocy wypromieniowanej równej $A\sigma T^4 \cdot 4\pi r^2$, zatem

$$A\sigma T_S^4 \frac{R_S^2}{R^2} \pi r^2 = A\sigma T^4 \cdot 4\pi r^2.$$

Stąd

$$T = \sqrt[4]{\frac{R_S^2}{4R^2}} T_S = \sqrt{\frac{R_S}{2R}} T_S.$$

Zauważmy, że wynik nie zależy od zdolności emisyjnej (pod warunkiem, że jest ona niezerowa), gdyż rozważamy stan równowagi.

Dla $R_S = 0,696 \cdot 10^9$ m, $T_S = 5770$ K, $R = 6,6 \cdot 10^9$ m otrzymamy

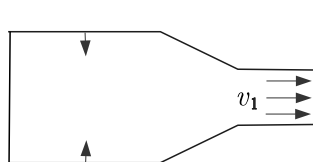
$$T = 1325 \text{ K}.$$

Uwaga: w powyższych rachunkach przyjęliśmy przybliżenie, że w odległości R od środka Słońca, jego promieniowanie jest radialne, co nie jest ściśle. Można wykazać, że błąd w określeniu T wynikający z takiego przybliżenia jest jednak mniejszy niż 0,5 %, a więc dopuszczalny w tych zadaniach. Pominęliśmy też promieniowanie reliktowe.

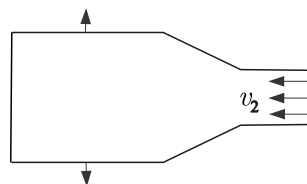
Zadanie N8

Niektóre zwierzęta morskie wykorzystują do poruszania się (napędu przy pływaniu) odrzut wody. Rozpatrzmy następujący uproszczony model odpowiedniego „silnika odrzutowego”.

- zwierzę każdorazowo zasysa, a następnie wyrzuca masę $m = 10$ g wody przez ten sam otwór (dyszę) o powierzchni $S = 2,0$ cm²
- w trakcie zasysania prędkość wlatującej wody wynosi $v_2 = 0,07$ m/s, a strugi wody są do siebie równoległe
- w trakcie wyrzutu prędkość wylatującej wody wynosi $v_1 = 0,1$ m/s, strugi wody są do siebie równoległe i równoległe do strug w przypadku zasysania; przekrój poprzeczny wyrzucanego strumienia jest taki sam, jak przekrój poprzeczny strumienia zasysanego i wynosi S
- między zasysaniem a wyrzutem nie występują przerwy – b) oraz c) występują natychmiast po sobie
- wszelkie zmiany rozmiarów zwierzęcia związane z zasysaniem i wyrzutem wody są prostopadłe do kierunku zasysanej/wylatującej wody i nie powodują działania na zwierzę żadnej dodatkowej siły w kierunku potencjalnego ruchu.



Wyrzut wody



Zasysanie wody

Rozważając sytuację, gdy prędkość otaczającej wody jest względem zwierzęcia równa 0 (np. coś przytrzymuje zwierzę lub stara się ono przedostać przez przegrodę), wyznacz średnią (w czasie) siłę, jaką działa na zwierzę opisany „silnik odrzutowy”.

Gęstość wody wynosi $\rho = 1000$ kg/m³.

Rozwiązanie zadania N8

Czas zasysania wynosi

$$t_2 = \frac{m}{\rho S v_2},$$

natomiast zmiana pędu wody jest równa 0, gdyż woda spoczywa zarówno przed zasysaniem jak i po nim

$$p_2 = 0.$$

Przy wyrzucaniu jego czas oraz zmiana pędu wody wynoszą

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{m}{\rho S v_1}, \\ p_1 &= m v_1. \end{aligned}$$

Stąd wartość średniej siły działającej na zwierzę jest równa

$$\begin{aligned} F &= \frac{p_1 + p_2}{t_1 + t_2} = \\ &= \frac{m v_1}{\frac{m}{\rho S v_1} + \frac{m}{\rho S v_2}} = \\ &= \rho S v_1 \frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że dla małych v_2 ta siła również staje się mała – jest to efekt tego, że wydłuża się czas cyklu.

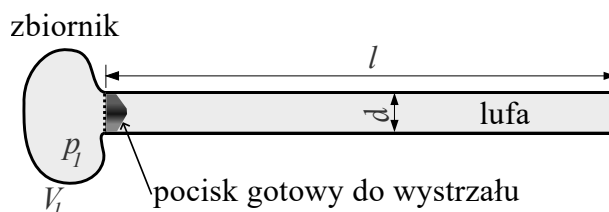
Dla $v_1 = 0,1$ m/s, $v_2 = 0,07$ m/s, $S = 2,0 \cdot 10^{-4}$ m², $m = 0,01$ kg otrzymamy $F = 8,24 \cdot 10^{-4}$ N.

Uwaga:

Ze względu na błąd, system początkowo akceptował rozwiązanie, w którym przyjęto $p_2 = -m v_2$. Takie zaakceptowane rozwiązanie nadal jest traktowane przez system jako poprawne.

Zadanie N9

Wiatrówka składa się z lufy o długości $l = 57$ cm oraz wewnętrznej średnicy $d = 4,6$ mm, i ze zbiornika na powietrze o objętości $V_1 = 12$ cm³. Pocisk o masie $m = 0,4$ g oraz pomijalnej objętości wkładamy do lufy od strony zbiornika (patrz rysunek). Wyznacz prędkość wylotową pocisku z lufy, jeśli początkowe ciśnienie (tuż przed naciśnięciem spustu) w zbiorniku wynosiło $p_1 = 2,1$ MPa, a ciśnienie zewnętrzne jest równe $p_0 = 1000$ hPa. Początkowa temperatura powietrza jest równa $T_1 = 300$ K. Rozważ przybliżenie, w którym rozprężanie powietrza jest adiabatyczne i odwracalne.



Przyjmij, że powietrze jest dwuatomowym gazem doskonałym o molowym cieple właściwym przy stałej objętości równym $C_V = 5R/2$, gdzie $R = 8,31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$. Masa wiatrówki jest znacznie większa od m . Równanie opisujące odwracalną przemianę adiabatyczną wyszukaj w dostępnych ci źródłach.

Rozwiązanie zadania N9

Ponieważ przemiana jest adiabatyczna, zachodzi

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa,$$

gdzie $\kappa = (C_V + R)/C_V$, $V_2 = V_1 + \pi d^2 l/4$, a p_2 jest ciśnieniem w lufie tuż przed opuszczeniem przez nią pocisku. Z powyższego równania możemy wyznaczyć p_2 jako

$$p_2 = p_1 \frac{V_1^\kappa}{V_2^\kappa},$$

a następnie, z równania stanu gazu doskonałego temperaturę końcową powietrza

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} T_1 = \\ &= \frac{V_1^{\kappa-1}}{V_2^{\kappa-1}} T_1. \end{aligned}$$

Zmiana energii wewnętrznej powietrza w wiatrówce jest równa

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{C_V}{R} p_1 V_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = \\ &= \frac{C_V}{R} p_1 V_1 \left(\frac{V_1^{\kappa-1}}{V_2^{\kappa-1}} - 1 \right). \end{aligned}$$

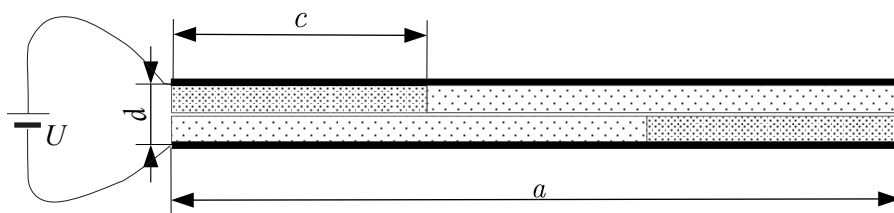
Ta zmiana jest ujemna; energia została wykorzystana na zmianę energii kinetycznej pocisku $mv^2/2$ oraz pracę wykonaną przeciwko otoczeniu zewnętrznemu $p_0 \pi d^2 l/4$. Zatem prędkość wylotowa pocisku v jest równa

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2 \frac{-\Delta U - p_0 \pi d^2 l/4}{m}} = \\ &= \sqrt{2 \frac{\frac{C_V}{R} p_1 V_1 \left(1 - \frac{V_1^{\kappa-1}}{(V_1 + \pi d^2 l/4)^{\kappa-1}} \right) - p_0 \pi d^2 l/4}{m}}. \end{aligned}$$

Dla $l = 0,57 \text{ m}$, $d = 0,0046 \text{ m}$, $m = 0,0004 \text{ kg}$, $p_1 = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ otrzymamy $v = 246 \text{ m/s}$.

Zadanie N10

Kondensator płaski składa się z odległych o $d = 0,5 \text{ mm}$ dwóch prostokątnych okładek o wymiarach $a \times b$, przy czym $a, b \gg d$, między którymi znajdują się cztery prostopadłościenne dielektryki: dwa o wymiarach $c \times b \times d/2$ i stałej dielektrycznej $\varepsilon_1 = 2,3$, oraz dwa o wymiarach $(a - c) \times b \times d/2$ i stałej dielektrycznej $\varepsilon_2 = 6,0$, patrz rysunek.



Okładki kondensatora są podłączone do baterii o napięciu $U = 20 \text{ V}$.

Między górnymi, a dolnymi dielektrykami (zgodnie z orientacją rysunku) jest wąska (w porównaniu z d) szpara. W tę szparę wsunięto powoli cienką, nienaładowaną płytkę metalową.

Wyznacz pracę mechaniczną W wykonaną w trakcie wsuwania tej płytki dla wartości $a = 6 \text{ cm}$, $b = 7 \text{ cm}$, $c = 2,5 \text{ cm}$. Pomiń tarcie.

Uwaga: jeśli siły elektrostatyczne wciągają płytkę, to szukana praca jest ujemna. Przenikalność elektryczna próżni wynosi $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$.

Rozwiązanie zadania N10

W początkowej sytuacji kondensator możemy potraktować jako równolegle połączone trzy kondensatory, z których każdy jest szeregowym połączeniem dwóch kondensatorów płaskich; pojemności każdego z tych trzech kondensatorów wynoszą

dla $c \leq a/2$:

$$C_1 = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 c b / (d/2)} + \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_2 c b / (d/2)}} = \frac{\varepsilon_0 c b}{d} \frac{2\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2},$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 (a - 2c) b}{d} \varepsilon_2,$$

$$C_3 = \frac{2\varepsilon_0 c b}{d} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = C_1;$$

dla $c > a/2$:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 (a - c) b}{d} \frac{2\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2},$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 (2c - a) b}{d} \varepsilon_1,$$

$$C_3 = C_1.$$

Pojemność początkowego kondensatora wynosi

$$C_p = C_1 + C_2 + C_3.$$

Po wsunięciu płytki mamy do czynienia z szeregowym układem dwóch kondensatorów, z których każdy jest równoległym połączeniem dwóch kondensatorów i ma pojemność

$$C_{k1} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 c b}{d/2} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 (a - c) b}{d/2} = 2 \frac{\varepsilon_0 b}{d} (\varepsilon_1 c + \varepsilon_2 (a - c)).$$

Całkowita pojemność układu po wsunięciu płytki wynosi

$$C_k = \frac{1}{1/C_{k1} + 1/C_{k2}} = \frac{\varepsilon_0 b}{d} (\varepsilon_1 c + \varepsilon_2 (a - c)).$$

Praca wykonana w trakcie wsuwania płytki jest równa zmianie energii układu minus praca wykonana przez źródło napięcia

$$W = \frac{1}{2} C_k U^2 - \frac{1}{2} C_p U^2 - U \Delta Q,$$

gdzie ΔQ jest ładunkiem, jaki dopłynął do układu

$$\Delta Q = C_k U - C_p U.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{2} (C_k - C_p) U^2 = \\ &= -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{b}{d} (\varepsilon_1 c + \varepsilon_2 (a - c)) - \left(4 \frac{cb}{d} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} + \frac{(a - 2c)b}{d} \varepsilon_2 \right) \right) U^2, \end{aligned}$$

przy czym jawny wynik podaliśmy dla przypadku $c \leq a/2$.

Zauważmy, że ta praca jest ujemna – płytka jest wciągana do kondensatora.

Dla $a = 0,06$ m, $c = 0,025$ m, $b = 0,07$ m, $d = 0,0005$ m, $\varepsilon_1 = 2,3$, $\varepsilon_2 = 6,0$, $U = 20$ V, biorąc pod uwagę, że $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m, otrzymujemy $W = -1,022 \cdot 10^{-8}$ J.