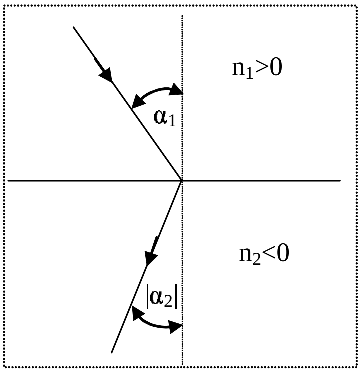
Zadanie 1

Pewne sztucznie wytworzone materiały mogą mieć w wąskim zakresie częstotliwości fal elektromagnetycznych ujemny współczynnik załamania (dla mikrofal są to metamateriały utworzone z układów drutów a dla światła widzialnego tzw. kryształy fotoniczne). Przy przejściu z ośrodka o współczynniku załamania $n_1 > 0$ do ośrodka o współczynniku załamania $n_2 < 0$ jest spełnione zwykłe prawo załamania $n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$, przy czym $\alpha_2 < 0$ – patrz rysunek.



a) Mały przedmiot umieszczono w odległości a_p od płaskorównoległej płytki o grubości d wykonanej z materiału o współczynniku załamania równym -1. Rozważmy obraz utworzony przez promienie, które przeszły przez płytkę. Znajdź jego położenie, powiększenie i ustawienie (tzn. czy jest on odbity, obrócony...). Dla jakich a_p rozważany obraz jest rzeczywisty?

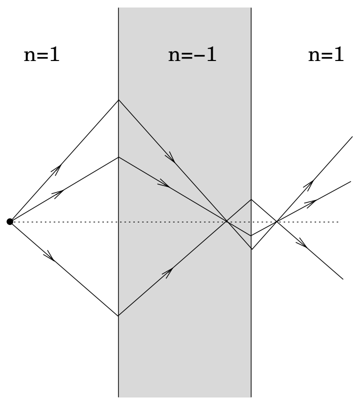
b) Mały przedmiot umieszczono w punkcie o współrzędnych $(a_p, -b_p, 0)$ (gdzie $a_p > 0, b_p > 0$). Obszar przestrzeni spełniający równania $x > 0$, $y > 0$ jest wypełniony ośrodkiem o współczynniku załamania równym -1. Znajdź położenie, powiększenie i ustawienie obrazu tego przedmiotu, utworzonego przez promienie, które wyszły z obszaru o $n = -1$. Z jakich miejsc można zobaczyć ten obraz? Rozważ tylko promienie w płaszczyźnie $z = 0$.

W obu przypadkach narysuj bieg różnych promieni wybiegających z przedmiotu i przechodzących przez obszar o $n = -1$.

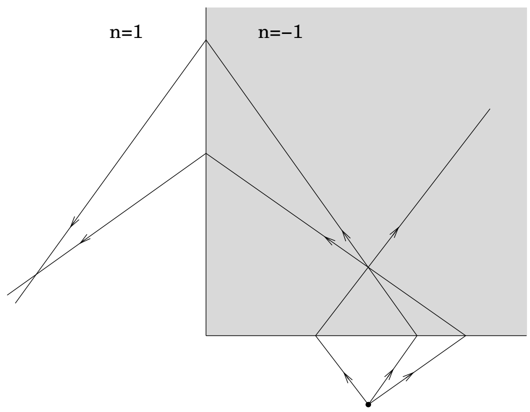
Współczynnik załamania przestrzeni poza płytką (w pkt. a)) i poza obszarem $x > 0$, $y > 0$ (w punkcie b)) jest równy 1.

Rozwiązanie zadania 1

Zauważmy, że dla współczynnika załamania równego -1 kąt załamania jest równy minus kątowi padania, tzn. bieg promienia jest taki, jakby odbił się od lustra prostopadłego do płaszczyzny rozdziału ośrodków.



rys. 1 Bieg promieni światła w przypadku a).



rys. 2 Bieg promieni światła w przypadku b).

I sposób rozwiązania

Ze względu na związek $\alpha_2 = -\alpha_1$ promienie wychodzące z danego punktu, po załamaniu na granicy ośrodków, skupiają się (one lub ich przedłużenie) w punkcie symetrycznym względem

płaszczyzny rozdziału ośrodków. Zatem obraz przedmiotu utworzony przez promienie załamane na granicy ośrodków otrzymujemy przez odbicie przedmiotu względem płaszczyzny rozdziału ośrodków. Przyjmijmy, że granice płytki są określone równaniami $x = 0$ oraz $x = d$.
a) Zgodnie z powyższymi rozważaniami jeśli $(-a_p, 0)$ jest położeniem przedmiotu, to wychodzące z niego promienie (lub ich przedłużenia) po przejściu przez granicę otoczenie-płytka skupią się w punkcie $(a_p, 0)$ (odbicie względem płaszczyzny $x = 0$). Po przejściu przez granicę płytka-otoczenie znajdującą się w $x = d$, skupią się one w punkcie $(d - (x - d), 0)$ (odbicie względem płaszczyzny $x = d$). Zatem obraz przedmiotu, utworzony przez promienie, które przeszły przez płytkę, będzie się znajdował w punkcie

$$(2d - a_p, 0). \tag{1}$$

Obraz ten będzie rzeczywisty jeśli $2d - a_p > d$, czyli dla $a_p < d$. Można go otrzymać przez równoległe przesunięcie przedmiotu o $2d$ w kierunku płytki, a więc jest to obraz nieodwrócony i o niezmienionej wielkości.
b) Po przejściu przez granicę otoczenie-płytka w $y = 0$ promienie skupią się w punkcie (a_p, b_p), a następnie po przejściu przez granicę w $x = 0$ skupią się w punkcie

$$(-a_p, b_p). \tag{2}$$

Otrzymany obraz będzie odwróceniem przedmiotu o kąt 180^o wokół osi $x = 0$, $y = 0$. Jednak tylko promienie wychodzące z przedmiotu, które początkowo oddalały się od osi Y mogą dolecieć do punktu $(-a_p, b_p)$. Zatem ten obraz może być widoczny tylko z punktów (x, y) spełniających warunki $x < -a_p$, $y < b_p$.

II sposób rozwiązania

a) Rozważmy zagadnienie w płaszczyźnie biegu promienia. Niech $(-a_p,\ 0)$ będzie położeniem przedmiotu, $(0,\ z_1)$ – punktem, w którym promień wysłany z przedmiotu wchodzi do płytki, $(d,\ z_2)$ – punktem w którym ten promień wychodzi z płytki, $(a_o, y_o,)$ – położeniem obrazu, a α – kątem padania tego promienia na płytkę.
Z rozważań geometrycznych dostajemy

$$\begin{aligned} z_1 &= x\operatorname{tg}\alpha, && (3)\\ z_2 &= z_1 - d\operatorname{tg}\alpha, && (4)\\ z_o &= z_2 + (a_o - d)\operatorname{tg}\alpha. && (5) \end{aligned}$$

Z powyższego

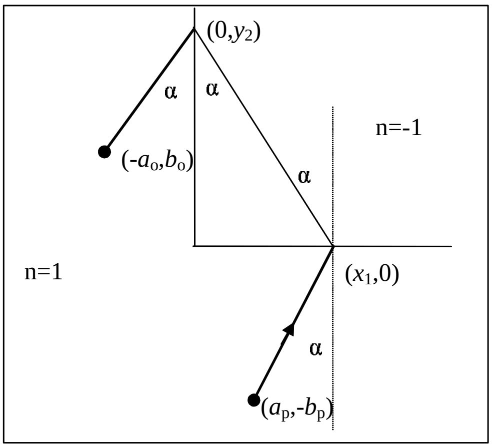
$$z_o = (x - d + a_o - d)\operatorname{tg}\alpha.$$

Ponieważ to równanie ma być spełnione dla różnych α , otrzymujemy $z_o = 0$ (co było do przewidzenia), oraz

$$a_o = 2d - a_p.$$

Obraz jest rzeczywisty, gdy $a_o > d$, czyli dla $a_p < d$. Obraz ten otrzymujemy przez równoległe przesunięcie przedmiotu o $2d$ w kierunku płytki, a więc jest to obraz nieodwrócony i o nie zmienionej wielkości.
Ciekawe jest to, że w tym szczególnym przypadku wszystkie wychodzące ze źródła promienie które padają na płytkę, zbiegają się w punkcie $(a_o, 0)$ – w przypadku gdy współczynnik załamania płytki $n \neq -1$ dotyczy to tylko promieni przyosiowych (małe α).
b) Rozważmy promień wylatujący z naszego przedmiotu pod kątem α w stosunku do osi OX. Przyjmijmy, że promień biegnie przez punkty $(x_1, 0)$, $(0, y_2)$, $(-a_o, b_o)$ (patrz rysunek 3).
Otrzymujemy

$$\begin{aligned} x_1 &= a_p + b_p\operatorname{tg}\alpha, && (6)\\ y_2 &= x_1\operatorname{ctg}\alpha, && (7)\\ y_2 &= b_o + a_o\operatorname{ctg}\alpha && (8) \end{aligned}$$



rys. 3

Stąd

$$y_2 = b_o + a_o \operatorname{ctg}\alpha = \mathrm{x}_1 \operatorname{ctg}\alpha = (\mathrm{a}_\mathrm{p} + \mathrm{b}_\mathrm{p} \operatorname{tg}\alpha)\operatorname{ctg}\alpha.$$

Zatem

$$b_o + a_o \operatorname{ctg}\alpha = \mathrm{a}_\mathrm{p} \operatorname{ctg}\alpha + \mathrm{b}_\mathrm{p}.$$

Jeśli punkt $(-a_o, b_o)$ jest obrazem punktu $(a_p, -b_p)$, to promienie światła wysłane pod różnymi kątami z tego drugiego punktu dochodzą od tego pierwszego. Oznacza to, że

$$b_o = b_p,\ a_o = a_p.$$

Zatem położenie punktu obrazowego otrzymujemy przez obrót punktu źródła o kąt π wokół osi $x = 0 = y$.

Gdy rozważymy przedmiot składający się z wielu punktów, to jego obraz otrzymamy też przez obrót przedmiotu o kąt π wokół osi $x = 0 = y$. Jest to obraz o niezmienionej wielkości i obrócony, ale obrócony w innym sensie niż zwykle rozumiemy to w optyce (w przypadku zwykłych soczewek mówiąc o obrazie odwróconym mamy na myśli, że obraz jest odbiciem przedmiotu względem osi optycznej.

Podobnie jak w przypadku a) promienie wysłane z punktu $(a_p, -b_p)$ dokładnie schodzą się w punkcie $(-a_o, b_o)$, ale dotyczy to tylko promieni o $\alpha > 0$. Gdy $\alpha \leqslant 0$ (promienie wysyłane w lewo i oraz do góry), promień padający na "pryzmat" nie przedostaje się do obszaru $x < 0$. Oznacza to, że obraz jest widoczny tylko z punktów (x, y) spełniających warunki $x + a_o < 0$, $y - b_o < 0$.

Zadanie 2
Na prostym, poziomym odcinku drogi przeprowadzono testy samochodu. Ustalono, że minimalna droga hamowania tego samochodu od v_{100} =100$\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ do 0$\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ wynosi l =40m.
Obliczyć minimalny czas osiągnięcia przez spoczywający początkowo samochód prędkości v_{100}, przy założeniu, że samochód może w każdej chwili w pełni wykorzystywać moc swojego silnika. Zakładamy, że warunki są dokładnie takie same jak w powyższym teście.
Samochód ma (wraz z kierowcą) masę m = 1000kg, moc silnika P = 50kW, oraz napęd i hamulce na wszystkie koła. Pomijamy opór powietrza, opory toczenia i wszystkie opory układu przeniesienia napędu. Nawierzchnia drogi była taka sama w każdym punkcie rozpatrywanego odcinka testowego. Samochód ma system optymalnie dobierajacy siłę hamowania każdego koła oraz układ optymalnie rozkładający moc silnika na każdą z osi.
Rozwiązanie zadania 2
Minimalna droga hamowania samochodu jest określona przez współczynnik tarcia między kołami a jezdnią. W trakcie testu hamowania ten współczynnik nie zmienia się, stała jest również siła nacisku samochodu na podłoże, zatem siła tarcia R w trakcie tego testu jest również stała. Siła ta wykonuje na drodze l pracę $-Rl$. Ta praca jest równa zmianie energii kinetycznej samochodu w trakcie hamowania, zatem

$$Rl = \frac{mv_{100}^2}{2},$$

Stąd

$$R = \frac{mv_{100}^2}{2l}. \tag{9}$$

Jest to jednocześnie maksymalna pozioma siła, z jaką jezdnia może działać na samochód.
Ze związku między mocą a siłą $P = vF$ wynika, że gdyby nie było możliwości poślizgu, przy wykorzystaniu maksymalnej mocy silnika na samochód działałaby siła $\frac{P}{v}$. Ponieważ jednak współczynnik tarcia jest skończony, maksymalna siła jaka może działać na samochód w trakcie przyspieszania jest równa

$$F = \begin{cases} R & \text{gdy} \quad P/v \geqslant R, \ \text{czyli } v \leqslant P/R, \\ P/v & \text{gdy} \quad M/v < R, \ \text{czyli } v > P/R. \end{cases} \tag{10}$$

Zatem proces rozpędzania składa się z dwóch etapów: pierwszego, w którym nie jest wykorzystywana maksymalna moc silnika a przyspieszenie jest określone przez współczynnik tarcia, oraz drugiego, w którym przyspieszenie jest określone przez moc silnika.
W pierwszym etapie przyspieszenie jest stałe i równe $a_I = \frac{R}{m}$. Czas osiągniecia prędkości granicznej

$$v_g = \frac{P}{R} \tag{11}$$

wynosi

$$t_I = \frac{a_I}{v_g} = \frac{Pm}{R^2}. \tag{12}$$

W drugi etapie samochód przyspiesza od prędkości v_g do prędkości v_{100}. Czas t_{II} tego ruchu można określić porównując porównując pracę wykonaną przez silnik ze zmianą energii kinetycznej samochodu

$$Pt_{II} = \frac{mv_{100}^2}{2} - \frac{mv_g^2}{2}. \tag{13}$$

Zatem ostatecznie minimalny czas osiągnięcia przez początkowo spoczywający samochód prędkości v_{100} wynosi

$$t = t_I + t_{II} = \frac{Pm}{R^2} + \frac{m\left(v_{100}^2 - P^2/R^2\right)}{2P} \tag{14}$$

jeśli $v_{100} > v_g$, oraz

$$t = \frac{mv_{100}}{R}, \tag{15}$$

gdy $v_g \geqslant v_{100}$, przy czym $R = mv_{100}^2/2l$.
W naszym przypadku $R \approx 9,64 \cdot 10^3\,\mathrm{N}$, $v_g = P/R \approx 5,18\,\mathrm{m/s}$, czyli $v_g < v_{100} \approx 27,8\,\mathrm{m/s}$. Zatem szukany czas rozpędzania

$$t \approx 0,53\,\mathrm{s} + 7,46\,\mathrm{s} \approx 8,0\,\mathrm{s}. \tag{16}$$

Zadanie 3

Rozważmy prostopadłościenną taflę lodu o wymiarach $a \times b \times h$, gdzie $a \gg h$, $b \gg h$. Tafla ta przesuwa się z prędkością v po płaskiej, poziomej powierzchni.

a) Jakie jest największe v, przy którym tafla nie zacznie się topić. Tafla porusza się w takich warunkach, że temperatura jej górnej powierzchni jest równa $T_{ot} = -10^o$C.

Współczynnik przewodnictwa cieplnego lodu jest równy $\lambda = 2,3\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\cdot K}}$, natomiast powierzchnia, po której przesuwa się tafla, nie przewodzi ciepła. Współczynnik tarcia suchej powierzchni lodu o tę powierzchnię jest równy $f = 0,1$. Obliczenia wykonaj dla dla (i) $a = 0,3$m, $b = 0,3$m, $h = 0,02$m, (ii) $a = 2$m, $b = 2$m, $h = 0,1$m (fragment kry) oraz dla (iii) $a = 30$m, $b = 30$m, $h = 2$m (oderwany fragment lodowca w górach).

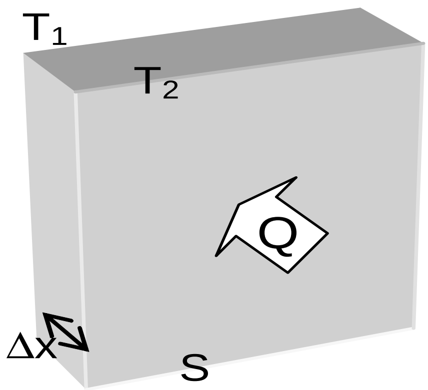
Gęstość lodu jest równa $\rho_L = 900\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, a przyspieszenie ziemskie $g = 9,8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Współczynnik przewodnictwa cieplnego danego ośrodka jest zdefiniowany następujaco:

Rozważmy dwie równoległe, odległe o Δx warstwy ośrodka, o powierzchni S każda (patrz rysunek). Jeśli temperatury warstw wynoszą odpowiednio T_1 i T_2 , to

$$\lambda = \frac{Q/\Delta t}{S}\frac{\Delta x}{|T_2 - T_1|},$$

gdzie Q jest ilością ciepła przepływającego w ciągu czasu Δt od warstwy cieplejszej do chłodniejszej.



Rozwiązanie zadania 3

Gdy tafla zaczyna się topić, to temperatura jej dolnej powierzchni jest równa $T_0 = 0^o$C. Szybkość ciepła (moc) odprowadzanego przez taflę jest równa

$$M_Q = \lambda\frac{T_0 - T_{ot}}{h}ab. \tag{17}$$

Ponieważ siła tarcia F_R jest równa $abh\rho gf$, praca wykonywana przeciwko niej w jednostce czasu (czyli moc) wynosi

$$M_T = F_R v = abh\rho_L gfv. \tag{18}$$

Lód będzie się topił, jeśli ciepło wytwarzane w wyniku tarcia będzie większe od ciepła wypływającego z górnej powierzchni tafli, czyli gdy $M_T > M_Q$. W granicznym przypadku $M_T = M_Q$ otrzymujemy

$$abh\rho_L gfv = \lambda\frac{T_{ot} - T_0}{h}ab. \tag{19}$$

Stąd

$$v = \lambda\frac{T_0 - T_{ot}}{h^2\rho_L gf}. \tag{20}$$

Dla wartości podanych w treści zadania otrzymujemy ($T_{ot} = -10$°C):

$$\text{(i) dla } h \;=\; 0,02\,\mathrm{m} : v \approx 65\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \tag{21}$$

$$\text{(ii) dla } h = 0,1\,\mathrm{m} : v \approx 2,6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \tag{22}$$

$$\text{(iii) dla } h = 2\,\mathrm{m} : v \approx 0,0065\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{23}$$