LVI OLIMPIADA FIZYCZNA – ZAWODY II STOPNIA

Zadanie 1

Pewien fotograf posiada aparat fotograficzny z obiektywem o ogniskowej f zmiennej w zakresie od $f_{\min}$ do $f_{\max}$. Średnica otworu przysłony obiektywu jest równa d.

Fotograf pragnie wykonać portret koleżanki w taki sposób, by jej twarz była "ostra" na zdjęciu i zajmowała połowę jego wysokości, a znajdujący się w odległości l za nią budynek był jak najbardziej rozmyty. Przy jakiej wartości ogniskowej fotograf powinien wykonać to zdjęcie? Rozważ następujące przypadki:

a) średnica otworu przysłony d nie zależy od f;

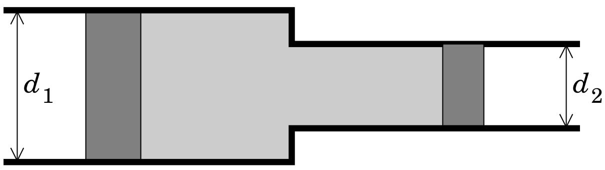
b) d zmienia się wraz ze zmianą f tak, że d/f jest stałe.

Uwaga: Rozmycie obrazu punktu B przy ostrości ustawionej na punkt A jest określone przez wielkość (średnicę) plamki, jaką na matrycy (lub kliszy) aparatu utworzy światło wychodzące z punktu B.

Przyjmij, że dla danego f obiektyw jest cienką, idealną (brak aberracji i dyfrakcji) soczewką o średnicy d oraz że odległość koleżanki od obiektywu jest znacznie większa od ogniskowej.

Zadanie 2

Rura o masie M składa się z odcinków o średnicach d_1 i d_2, w których mogą poruszać się bez tarcia dwa tłoki (patrz rys.). Prawy tłok ma masę m_2. Rura może swobodnie poruszać się w poziomie.

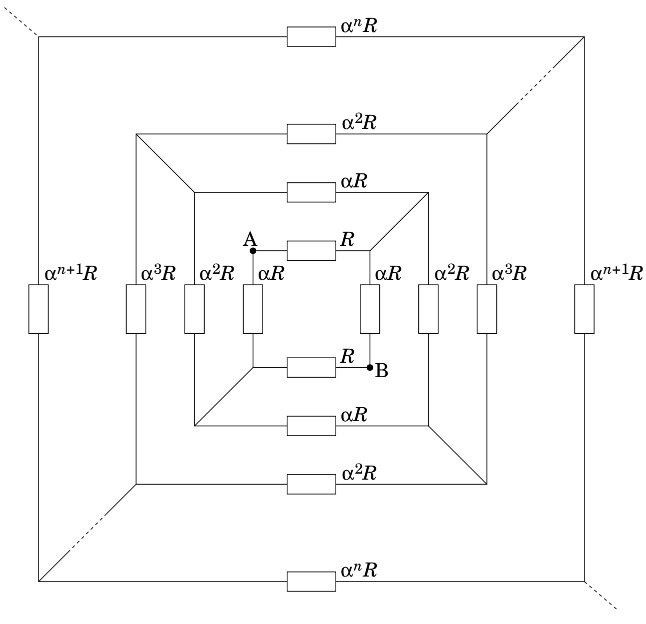


W chwili początkowej ciśnienie powietrza pomiędzy tłokami było równe ciśnieniu zewnętrznemu, rura i prawy tłok były nieruchome, a lewy tłok miał prędkość v_{1p} w prawo. Powietrze z obszaru pomiędzy tłokami nie wydostaje się na zewnątrz, a jego masa jest zaniedbywalna w porównaniu z masami tłoków i rury. Przemiana tego powietrza jest odwracalna i adiabatyczna. Przyjmij, że siła z jaką powietrze działa na element powierzchni tłoka lub rury nie zależy od prędkości tego elementu.

Stwierdzono, że lewy tłok zatrzymał się w chwili, gdy ciśnienie powietrza pomiędzy tłokami powróciło do wartości początkowej. Wyznacz masę m_1 lewego tłoka. Podaj wartość liczbową m_1 dla $m_2 = 1$kg, $M = 3$kg, $d_1 = 0,2$m, $d_2 = 0,1$m. Zakładamy, że wszystkie parametry są tak dobrane, że do momentu zatrzymania lewy tłok nie uderzy w zwężenie, a prawy nie wypadnie z rury.

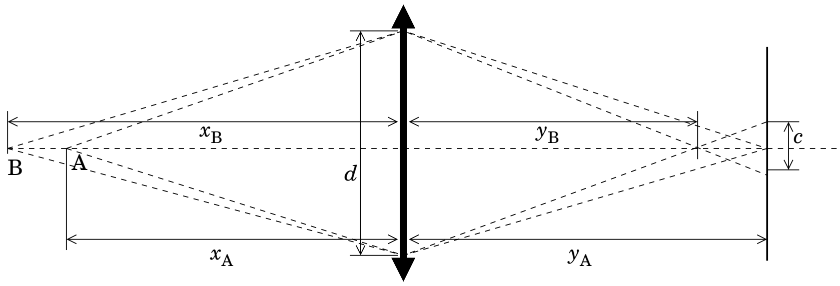
Zadanie 3

Znajdź opór zastępczy między punktami A i B nieskończonej sieci oporów przedstawionej na rysunku ($\alpha > 0$). Dla jakiej wartości α ten opór zastępczy jest równy R ?



Rozwiązanie zadania 1

Niech x_A, x_B będą odległościami punktów A i B od obiektywu, a y_A, y_B odległościami od obiektywu obrazów tych punktów. Zauważmy, że dla soczewki idealnej (i ze względu na twierdzenie Talesa), wystarczy rozważyć jedynie punkty na osi optycznej aparatu.



Rozważając bieg "skrajnego" promienia (patrz rys.), przy ustawieniu ostrości na punkt A, z zależności geometrycznych dostajemy

$$\frac{y_A - y_B}{y_B} = \frac{c}{d}. \tag{1}$$

gdzie c jest średnicą plamki utworzonej na matrycy przez promienie wychodzące z punktu B.
Uwzględniając równanie soczewki

$$\frac{1}{x_i} + \frac{1}{y_i} = \frac{1}{f}, \tag{2}$$

gdzie $i = A, B$, otrzymamy

$$c = d\frac{x_B - x_A}{x_B}\frac{f}{x_A - f}. \tag{3}$$

Uwzględniając $x_A/f \gg 1$ oraz $x_B = l + x_A$ otrzymamy

$$c = d\frac{l}{x_A}\frac{f}{x_A + l}. \tag{4}$$

Rozmycie tła jest tym większe im większa jest ta liczba. Żeby określić x_A odpowiadające maksymalnemu rozmyciu powinniśmy jeszcze uwzględnić, że zgodnie z warunkami zadania (ustalona wielkość twarzy na zdjęciu) powiększenie twarzy koleżanki powinno być stałe,

$$\frac{y_A}{x_A} = p = \text{const}, \tag{5}$$

Uwzględniając dodatkowo, że $y_A/x_A = 1/[(x_A/f) - 1] \approx f/x_A$ dostajemy

$$c \approx \frac{d}{f}\frac{l}{(1/p) + (l/f)}p = d\frac{l}{(1/p)f + l}p. \tag{6}$$

a) Przy ustalonych d, l, p to wyrażenie jest malejącą funkcją f, zatem największe rozmycie otrzymamy przy najmniejszym możliwym f, czyli dla

$$f = f_{\min}.$$

b) Podstawiając do (6) $d = f/F$ (gdzie $F = \text{const}$) otrzymamy

$$c \approx \frac{1}{F}\frac{l}{(1/p) + (l/f)}p. \tag{7}$$

Przy ustalonych F, l, p to wyrażenie jest rosnącą funkcją f. Zatem największe rozmycie otrzymamy przy największym możliwym f, czyli dla

$$f = f_{\max}.$$

Rozwiązanie zadania 2

Tłoki i rura poruszają się zgodnie z równaniami ruchu

$$m_1\frac{dv_1}{dt} = -pS_1,\ m_2\frac{dv_2}{dt} = pS_2,\ M\frac{dv_3}{dt} = pS_3, \tag{1}$$

gdzie $S_1 = \pi d_1^2/4$, $S_2 = \pi d_2^2/4$, $S_3 = S_1 - S_2$; v_1, v_3 i v_3 są odpowiednio prędkościami lewego tłoka, prawego tłoka i rury, a p jest różnicą między ciśnieniem wewnątrz rury a ciśnieniem zewnętrznym. Eliminując z tych równań p dostajemy dwie zasady zachowania

$$\frac{m_1}{S_1}v_1 + \frac{m_2}{S_2}v_2 = \text{const} = \frac{m_1}{S_1}v_{1p}, \tag{2}$$

$$\frac{m_1}{S_1}v_1 + \frac{M}{S_3}v_3 = \text{const} = \frac{m_1}{S_1}v_{1p}. \tag{3}$$

(Inna kombinacja liniowa jest zasadą zachowania pędu $m_1v_1 + m_2v_2 + Mv_3 = \text{const}$). Dla przemiany odwracalnej obowiązuje ponadto zasada zachowania energii, czyli w chwili powrotu ciśnienia gazu do ciśnienia początkowego

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}Mv_3^2 = \text{const} = \frac{1}{2}m_1v_{1p}^2. \tag{4}$$

Uwzględniając nasze zasady zachowania oraz, że w chwili końcowej $v_1 = 0$, otrzymamy

$$\frac{1}{2}m_2\left(\frac{S_2}{m_2}\frac{m_1}{S_1}\right)^2 v_{1p}^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{S_3}{M}\frac{m_1}{S_1}\right)^2 v_{1p}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1p}^2,$$

czyli

$$\frac{S_2^2}{m_2} + \frac{S_3^2}{M} = \frac{S_1^2}{m_1}. \tag{5}$$

Wyrażając S_1, S_2 i S_3 przez d_1 i d_2 otrzymamy stąd

$$m_1 = \frac{d_1^4}{(d_2^4/m_2) + (d_1^2 - d_2^2)^2/M}. \tag{6}$$

Dla podanych wartości liczbowych otrzymamy

$$m_1 = 4\text{kg}. \tag{7}$$

Zauważmy w tym szczególnym przypadku $S_2/m_2 = S_3/m_3$, co oznacza, że przyspieszenia rury i drugiego tłoka są takie same (patrz wzory (1)). Zatem rozważana sytuacja jest równoważna elastycznemu zderzeniu ciała o masie m_1 z ciałem o masie $M + m_2$. W takim przypadku ciało uderzające zatrzyma się po zderzeniu jeśli $m_1 = M + m_2$, co jest zgodne w wynikiem (7).

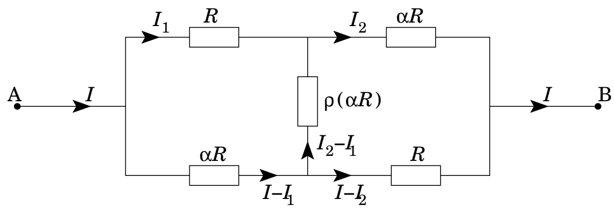
Rozwiązanie zadania 3

Oznaczmy opór zastępczy między punktami A i B przez $\rho(R)$. Ponieważ jedyną wielkością o wymiarze oporu jest R musi zachodzić proporcjonalność

$$\rho(R) = xR, \tag{1}$$

gdzie x jest funkcją wyłącznie α.

Zauważmy, że nasza sieć jest równoważna układowi na poniższym rysunku. Z wcześniejszej analizy wynika, że opór środko-



wego, zastępczego opornika jest równy

$$\rho(\alpha R) = \alpha\rho(R). \tag{2}$$

Stosując drugie prawo Kirchhoffa dla oczek układu zastępczego otrzymujemy

$$RI_1 - (I_2 - I_1)\rho(\alpha R) - (I - I_1)\alpha R = 0, \tag{3}$$

$$\alpha RI_2 - (I - I_2)R + (I_2 - I_1)\rho(\alpha R) = 0. \tag{4}$$

Jednocześnie spadek napięcia między punktami A i B wynosi

$$U_{AB} = I_1 R + I_2 \alpha R. \tag{5}$$

Z drugiej strony ten spadek napięcia jest określony przez opór zastępczy $\rho(R)$ między punktami A i B i prąd I

$$U_{AB} = I\rho(R). \tag{6}$$

Równania (3), (4), (5) i (6) stanowią po uwzględnieniu (2) układ równań pozwalający na wyznaczenie szukanego oporu zastępczego.

Z równań (3) i (4), uwzględniając (2) i (1), dostajemy

$$I_1 = \frac{\alpha(x+1)}{\alpha + 2x\alpha + 1} I, \tag{7}$$

$$I_2 = \frac{(x\alpha + 1)}{\alpha + 2x\alpha + 1} I. \tag{8}$$

Z powyższego wynika że

$$I_1 + I_2 = I, \tag{9}$$

co można zauważyć od razu uwzględniając symetrię naszego układu zastępczego. Wstawiając wzory (7) i (8) do równania (5), po uwzględnieniu równania (6) dostaniemy równanie na współczynnik x

$$2\alpha x^2 + \left(1 - \alpha^2\right) x - 2\alpha = 0. \tag{10}$$

Otrzymujemy dwa rozwiązania

$$x_{1,2} = \frac{\alpha^2 - 1 \pm \sqrt{\left(\alpha^2 - 1\right)^2 + 16\alpha^2}}{4\alpha}. \tag{11}$$

Zauważmy, że drugie rozwiązanie jest niefizyczne, gdyż jest ujemne dla dowolnych $\alpha > 0$. Ostatecznie otrzymujemy, że szukany opór zastępczy jest równy

$$\rho(R) = \frac{\alpha^2 - 1 + \sqrt{\left(\alpha^2 - 1\right)^2 + 16\alpha^2}}{4\alpha} R. \tag{12}$$

Opór zastępczy jest równy R (czyli $x = 1$) jedynie dla $\alpha = 1$ (uwzględniając, że $\alpha > 0$) co widać natychmiast ze wzoru (10). Ze schematu naszego układu zastępczego widać, że wtedy, ze względu na symetrię, przez opór $\rho(\alpha R)$ prąd nie płynie i opór zastępczy można określić uwzględniając tylko oporniki połączone bezpośrednio z punktami A lub B.