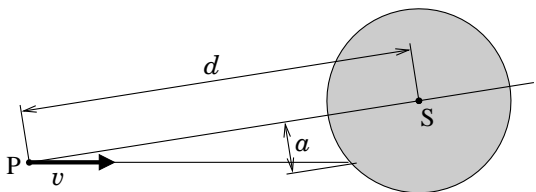


Zadanie 1

Na poziomej płaszczyźnie znajduje się jednorodny, cienki, początkowo nieruchomy krążek o promieniu R i masie M . W chwili $t_0 = 0$ z punktu P na tej płaszczyźnie, odległego o d od środka krążka S , jest wystrzeliwany z prędkością v mały pocisk o masie m . Pocisk ślizga się po płaszczyźnie, a następnie uderza w krążek i przyczepia się do niego w miejscu zderzenia, w odległości a od osi PS (rys. 1). Nie ma tarcia między płaszczyzną a krążkiem oraz między płaszczyzną a pociskiem.



rys. 1 Krążek i pocisk – widok z góry

Po jakim najmniejszym czasie $t > 0$ należy oddać drugi strzał, by drugi pocisk trafił w krążek w miejscu uderzenia pierwszego pocisku? Drugi strzał oddajemy takim samym pociskiem, z tego samego miejsca, w takim samym kierunku i z taką samą prędkością początkową jak pierwszy.

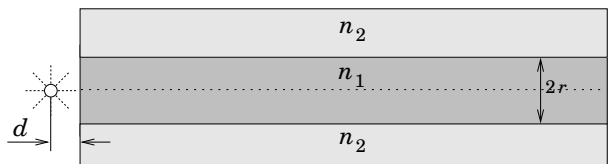
Podaj wynik liczbowy dla $M = 100$ g, $m = 10$ g, $R = 0,05$ m, $a = 0,04$ m, $v = 10$ m/s, $d = 2$ m.

Moment bezwładności krążka względem jego osi symetrii obrotowej wynosi $I_0 = MR^2/2$.

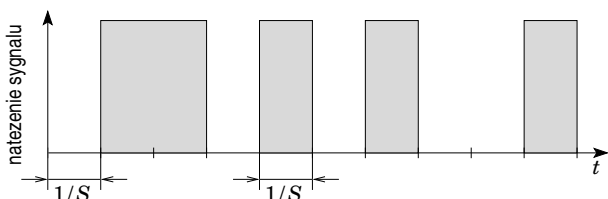
Zadanie 2

Rozważmy następujący model światłowodu (tzw. wielomodowego): walcowaty rdzeń o promieniu $r = 25 \mu\text{m}$ i współczynniku załamania $n_1 = 1,475$ jest otoczony otuliną (której grubość nie ma znaczenia dla zachowania światłowodu) o współczynniku załamania $n_2 = 1,460$.

W odległości $d = 25 \mu\text{m}$ od początku światłowodu umieszczono na jego osi symetrii punktowe, izotropowe źródło promieniowania elektromagnetycznego o mocy $P = 1$ mW wysyłające promieniowanie o długości fali $1,55 \mu\text{m}$ (rys. 2).



rys. 2 Światłowód oraz źródło promieniowania



rys. 3 Sygnał odpowiadający ciągowi 0110101001.

Oblicz jaka jest maksymalna odległość L na jaką można przesyłać tym światłowodem informacje z szybkością S równą a) 1 Gb/s, b) 1 Mb/s, c) 1 kb/s, gdzie b/s oznacza bit/sekundę.

Uwzględnij że:

- Współczynnik tłumienia α zdefiniowany jako:

$$\alpha = (10/L) \log_{10}(E_{out}/E_{in})$$

gdzie E_{out} jest energią sygnału po przebyciu odległości L , jeśli na wejściu jego energia wynosiła E_{in} , jest w przypadku rdzenia równy $\alpha = -0,02/\text{km}$.

- Detektor rejestrujący impuls na końcu światłowodu jest w stanie zarejestrować impulsy o energii większej niż $E_d = 10^{-15}$ J.

- Pojedynczy impuls (bit) ma początkowo kształt prostokąta o szerokości $1/S$ (przez szerokość rozumiemy tu odstęp czasu między

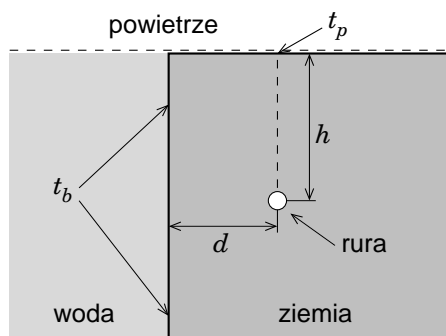
początkiem a końcem wysyłania tego impulsu – rys. 3).

Uznajemy, że informacji nie da się przesyłać, jeśli w wyniku przesyłania czas trwania pojedynczego impulsu wzrasta więcej niż dwukrotnie.

- Parametry w zadaniu są dobrane tak, że można pominąć falową naturę promieniowania i traktować je jako wiązkę promieni.
- Promieniowanie, które znajdzie się w otulinie, jest tak szybko tłumione, że jego rolę w przesyłaniu informacji można pominąć.
- Źródło promieniowania umieszczone jest w powietrzu (przyjmij, że współczynnik załamania $n = 1$), a odbicie na granicy powietrze-rdzeń można pominąć.
- Prędkość światła w próżni wynosi $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s.

Zadanie 3

Energia cieplna jest przesyłana z elektrociepłowni za pomocą prostej metalowej rury, wewnątrz której płynie gorąca woda. Rura biegnie na głębokości h pod powierzchnią ziemi, w odległości d od kanału wypełnionego wodą, równoległe do niego (rys. 4). Wiadomo, że temperatura ziemi tuż pod powierzchnią, dokładnie nad rurą, wynosi t_p , a temperatura wody i stykającej się z nią ziemi wynosi t_b .



rys. 4 Rura ciepłownicza w ziemi.

a) Oblicz szybkość strat ciepła na jednostkę długości rury, tzn. ilość ciepła wypływającą do ziemi w jednostce czasu z odcinka rury o jednostkowej długości.

b) Wiedząc, że promień rury wynosi R , oblicz jej temperaturę.

W pkt. a) i b) podaj wyniki liczbowe dla $h = 3$ m, $d = 2$ m, $t_p = 10^\circ\text{C}$, $t_b = 4^\circ\text{C}$, $R = 0,1$ m, przewodnictwa cieplnego ziemi $\sigma = 0,7$ W/(m·K).

Przyjmij następujące upraszczające założenia:

- powierzchnia ziemi jest płaska i pozioma; nie przepływa przez nią ciepło (tzn. przyjmujemy, że powietrze jest izolatorem cieplnym);
- kanał ma nieskończoną głębokość i jest wypełniony wodą aż do powierzchni ziemi; jego brzeg jest pionowy i w każdym punkcie ma temperaturę t_b ;
- ziemia jest jednorodna; jej temperatura w dowolnym miejscu nie ulega zmianie w czasie;
- średnica rury jest mała w porównaniu z h i d , a jej temperatura jest stała;
- nie ma transportu energii przez promieniowanie.

Przewodnictwo cieplne σ jest zdefiniowane następująco:

Rozważmy dwie bliskie, odległe o Δr , równoległe powierzchnie, każda o polu S . Obszar między nimi jest wypełniony ośrodkiem o przewodnictwie cieplnym σ . Jeśli na jednej z tych powierzchni temperatura wynosi t , a na drugiej $t + \Delta t$, to strumień energii cieplnej (ciepło w jednostce czasu), płynący prostopadłe do nich, jest równy $J_S = \sigma \Delta t / \Delta r$.

Wzory, które mogą być przydatne w zadaniach 1-3

$$\int \frac{dx}{\alpha + \beta x} = \frac{1}{\beta} \ln|\alpha + \beta x| + \text{const}$$

$$\int (\alpha + \beta x)^\gamma dx = \frac{1}{(\gamma + 1)\beta} (\alpha + \beta x)^{\gamma + 1} + \text{const}, \text{ gdzie } \gamma \neq -1$$

Kąt bryłowy w wierzchołku stożka o kącie rozwarcia 2θ wynosi $\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta)$.

Rozwiązanie zadania 1

Po uderzeniu pocisku w krążek układ będzie się obracał ze stałą prędkością kątową wokół swojego środka masy, który będzie się poruszał ze stałą prędkością po linii prostej. Środek masy układu znajduje się w odległości

$$x = \frac{mR}{m+M} \quad (1)$$

od środka krążka. Z twierdzenia Steinera moment bezwładności układu względem środka masy wynosi

$$\begin{aligned} I &= I_0 + Mx^2 + m(R-x)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{m}{M+m} \right) MR^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Prędkość kątową ω układu po zderzeniu jest określona przez zasadę zachowania momentu pędu (poniżej liczymy momenty pędu względem środka masy układu)

$$I\omega = mv \frac{b}{R} (R-x), \quad (3)$$

gdzie b jest odległością środka kuli od prostej, po której początkowo porusza się pocisk. Z powyższego

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{mMbv}{(M+m)I} \\ &= 2 \frac{mbv}{(M+3m)R^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Prędkość środka masy po zderzeniu jest określona przez zasadę zachowania pędu i wynosi

$$u = \frac{mv}{m+M}. \quad (5)$$

Aby drugi pocisk uderzył w krążek w tym samym miejscu co pierwszy, układ powinien wykonać pełny obrót. Zatem czas między zderzeniami powinien wynosić $T = 2\pi/\omega$. Dodatkowy czas ruchu drugiego pocisku (w porównaniu z pierwszym) wynosi $T - t$ i przebywa on w tym czasie dodatkową drogę $(T - t)v$. Ta droga jest równa drodze przebytej przez środek masy układu do chwili drugiego zderzenia, czyli

$$(T - t)vt = uT. \quad (6)$$

Stąd

$$\begin{aligned} t &= \frac{M}{m+M}T \\ &= \frac{M}{m+M} \frac{(M+3m)R^2}{mbv} \pi. \end{aligned} \quad (7)$$

Musimy jeszcze wyznaczyć parametr b poprzez a , d i R .

Oznaczmy przez U punkt, w którym pocisk uderzył w krążek, przez A – punkt na odcinku \overline{PS} , taki, że $\overline{PS} \perp \overline{UA}$ (co oznacza, że $UA = a$) i przez B – punkt na przedłużeniu odcinka \overline{PU} taki, że $\overline{BS} \perp \overline{PU}$ (co oznacza, że $BS = b$). Z tych definicji, twierdzenia Pitagorasa i podobieństwa trójkątów PUA i PSB wynika: $AS = \sqrt{R^2 - a^2}$, $PA = d - AS$, $b/d \stackrel{\Delta}{=} a/(PU)$, $PU = \sqrt{a^2 + (PA)^2}$, stąd

$$b = \frac{ad}{\sqrt{d^2 + R^2 - 2d\sqrt{R^2 - a^2}}}. \quad (8)$$

Zatem ostatecznie

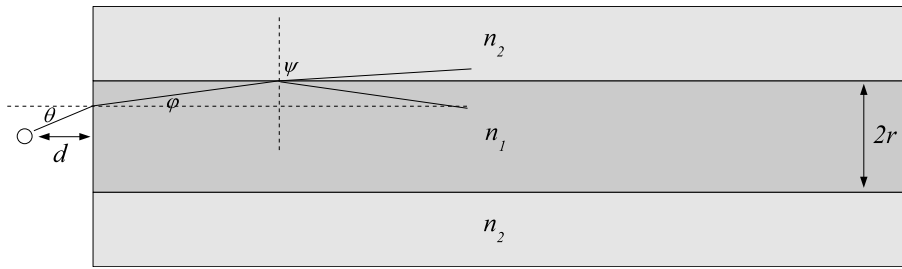
$$t = \frac{M}{m+M} \frac{(M+3m)R^2}{mv} \frac{\sqrt{d^2 + R^2 - 2d\sqrt{R^2 - a^2}}}{ad} \pi. \quad (9)$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymujemy:

$$t \approx 0,23 \text{ s}. \quad (10)$$

Rozwiązanie zadania 2

Ograniczenie na możliwości przesyłania informacji są dwójakiego rodzaju: tłumienie oraz rozmycie sygnału (dyspersja międzymodowa). Oszacujmy najpierw ograniczenie wynikające z tłumienia. Energia pojedynczego impulsu emitowanego przez źródło wynosi $E_0 = P/S$. Wkład do impulsu w rdzeniu dadzą tylko te promienie, które doznają całkowitego wewnętrznego odbicia na granicy rdzeń-otulina (patrz rysunek) lub trafią wprost w "otwór wylotowy" światłowodu.



Maksymalny kąt emitowanych promieni θ , które ulegną całkowitemu wewnętrznemu odbiciu można obliczyć korzystając z prawa załamania i z faktu, że tym granicznym przypadkiem kąt załamania promieni wchodzących do otuliny wynosi 90° :

$$\frac{\sin \theta}{\sin \phi} = n_1, \quad \frac{\sin(90^\circ - \phi)}{\sin 90^\circ} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (1)$$

Skąd otrzymujemy

$$\sin \theta = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}. \quad (2)$$

Zauważmy, że $\theta \approx 12^\circ$, co oznacza, że kąt z jakiego zbierane są promienie jest mniejszy niż kąt, pod jakim widziany jest rdzeń ze źródła – 45° . Oznacza to że kąt bryłowy, z jakiego promienie wysyłane przez źródło dotrą do rdzenia, wynosi $\Omega = 2\pi(1 - \sqrt{1 - n_1^2 + n_2^2})$ (gdyby $\theta > 45^\circ$ wtedy należałoby użyć kąta 45° zamiast θ). Początkowa energia impulsu w rdzeniu wynosi więc:

$$E_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - n_1^2 + n_2^2}}{2} \frac{P}{S}. \quad (3)$$

Aby detektor zarejestrował impuls, jego energia po przebyciu drogi L musi być większa od E_d : $E_1 \cdot 10^{\alpha L/10} \geq E_d$, co oznacza:

$$L \leq -\frac{10}{\alpha} \log_{10} \left(\frac{P(1 - \sqrt{1 - n_1^2 + n_2^2})}{2E_d S} \right) \quad (4)$$

Dla szybkości 1Gb/s, 1Mb/s, 1kb/s daje to odpowiednio $L \leq 523, 2\text{km}$, $L \leq 2023\text{km}$, $L \leq 3523\text{km}$

W celu zbadania dyspersji zauważmy, że na pokonanie danej odległości L promień poruszający się po prostej wzdłuż osi światłowodu potrzebuje czasu $t_{min} = Ln_1/c$. Z kolei promieniem, który potrzebuje najwięcej czasu na pokonanie tej odległości jest promień poruszający się pod maksymalnym dopuszczalnym kątem ϕ , dla którego zachodzi jeszcze całkowite wewnętrzne odbicie: $\cos \phi = n_2/n_1$, a odpowiadający mu czas $t_{max} = Ln_1^2/cn_2$. Różnica czasów, a tym samym poszerzenie impulsu wynosi więc:

$$\Delta t = \frac{Ln_1}{c} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right). \quad (5)$$

Powyżej pominęliśmy różnicę czasów dotarcia promieniowania ze źródła do światłowodu.

Warunek na to by impuls nie poszerzył się więcej niż dwukrotnie przyjmuje postać $\Delta t \leq 1/S$, co prowadzi do ograniczenia na odległość:

$$L \leq \frac{cn_2}{Sn_1(n_1 - n_2)} \quad (6)$$

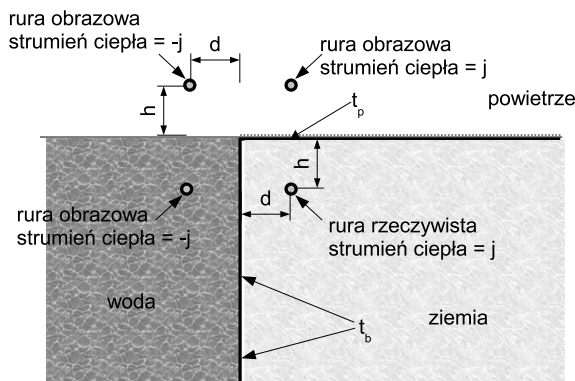
co dla szybkości 1Gb/s, 1Mb/s, 1kb/s daje odpowiednio $L \leq 19, 8\text{m}$, $L \leq 19, 8\text{km}$, $L \leq 19796\text{km}$. Widzimy, że dla szybkości 1Gb/s, 1Mb/s ograniczenie na odległość pochodzi od dyspersji i wynosi odpowiednio $L \leq 19, 8\text{m}$, $L \leq 19, 8\text{km}$, natomiast dla szybkości 1kb/s ograniczenie pochodzi od tłumienia i wynosi: $L \leq 3523\text{km}$.

Rozwiązanie zadania 3

Zagadnienie jest analogiczne do zagadnienia elektrostatycznego, w którym występuje jednorodnie naładowany prostoliniowy przewód, zatem wykorzystamy znaną z elektrostatyki metodę obrazów.

Na granicy woda–ziemia żądamy, by temperatura była stała. Można to osiągnąć umieszczając (formalnie) w wodzie rurę będącą odbiciem względem tej granicy rury rzeczywistej. Strumień ciepła wypływający z tej fikcyjnej rury powinien być równy minus strumieniowi ciepła wypływającego z rury rzeczywistej (podobnie jak ładunek obrazowy "wewnątrz" przewodnika jest równy minus ładunkowi rzeczywistemu).

Przez poziomą granicę ziemia–powietrze ciepło nie przepływa. W analogii elektrostatycznej oznacza to, że nie występuje składowa pola elektrycznego styczna do tej granicy. Taki efekt można osiągnąć umieszczając "obrazową" rurę ponad tą granicą. Strumień ciepła wypływający z tej rury powinien być identyczny jak strumień ciepła wypływający z rury rzeczywistej. Analogiczną rurę "obrazową" (odbicie "obrazu" znajdującego się w wodzie) powinniśmy umieścić w powietrzu ponad wodą. W sumie sytuację określającą przepływ ciepła i temperaturę w ziemi przedstawia rysunek.



Rura rzeczywista i rury "obrazowe"

Zatem ciepło w ziemi płynie tak, jakby w pozostałym obszarze, traktowanym tak, jakby to również była ziemia, były umieszczone jeszcze trzy rury.

Wyznamy teraz temperaturę t w odległości r od środka rury z której na jednostkę długości wypływa strumień ciepła j , przy założeniu, że znajduje się ona w jednorodnym ośrodku o przewodnictwie cieplnym σ i nie ma innych źródeł ciepła. Strumień ciepła płynący przez powierzchnię boczną współśrodkowego z rurą walca o promieniu r i długości ΔL jest równy $j\Delta L$, zatem zgodnie definicją przewodnictwa cieplnego (poniżej znak "-" uwzględnia, że ze wzrostem odległości temperatura maleje)

$$\frac{\Delta t}{\Delta r} = -\frac{j\Delta L}{S\sigma} = -\frac{j}{\sigma} \frac{1}{2\pi r}.$$

Przechodząc z Δr do 0 otrzymamy

$$t(r)' = \frac{j}{\sigma} \frac{1}{2\pi r},$$

stąd całkując

$$t(r) = t_0 - \frac{j}{2\pi\sigma} \ln \frac{r}{r_0}, \quad (1)$$

gdzie t_0 i r_0 są stałymi. Jest to wzór analogiczny do wzoru na potencjał od nieskończonego drutu naładowanego na jednostkę długości ładunkiem j .

Temperatura w dowolnym punkcie ziemi jest sumą temperatur pochodzących od rury rzeczywistej oraz rur obrazowych (podobnie jak potencjał elektryczny jest sumą potencjałów pochodzących od każdego ładunku). W punkcie tuż pod powierzchnią ziemi, pionowo nad rzeczywistą rurą, otrzymujemy

$$t_p = -\frac{j}{2\pi\sigma} \ln \frac{h}{r_0} - \frac{-j}{2\pi\sigma} \ln \frac{\sqrt{h^2 + (2d)^2}}{r_0} - \frac{j}{2\pi\sigma} \ln \frac{h}{r_0} - \frac{-j}{2\pi\sigma} \ln \frac{\sqrt{h^2 + (2d)^2}}{r_0} + 4t_0. \quad (2)$$

W punkcie na brzegu na głębokości y otrzymujemy

$$t_b = -\frac{j}{2\pi\sigma} \ln \frac{\sqrt{(y-h)^2 + d^2}}{r_0} - \frac{-j}{2\pi\sigma} \ln \frac{\sqrt{(y-h)^2 + d^2}}{r_0} +$$

$$-\frac{j}{2\pi\sigma} \ln \frac{\sqrt{(y+h)^2 + d^2}}{r_0} - \frac{-j}{2\pi\sigma} \ln \frac{\sqrt{(y+h)^2 + d^2}}{r_0} + 4t_0. \quad (3)$$

Zatem $4t_0 = t_b$ oraz

$$t_p - t_b = \frac{j}{\pi\sigma} \ln \frac{\sqrt{h^2 + 4d^2}}{h} = \frac{j}{2\pi\sigma} \ln \left(1 + 4\frac{d^2}{h^2} \right). \quad (4)$$

(Zauważmy, że gdybyśmy przyjęli stałe t_0 i r_0 różne dla różnych rur, powyższy wynik nie uległby zmianie.)
Ostatecznie otrzymujemy

$$j = 2\pi\sigma \frac{t_p - t_b}{\ln \left(1 + 4\frac{d^2}{h^2} \right)}. \quad (5)$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymamy

$$j \approx 26 \frac{\text{W}}{\text{m}}. \quad (6)$$

Temperatura górnej krawędzi prawdziwej rury jest sumą wkładów od wszystkich czterech źródeł ciepła

$$t_r = t_b - \frac{j}{2\pi\sigma} \ln \frac{R}{r_0} + \frac{j}{2\pi\sigma} \ln \frac{\sqrt{4d^2 + R^2}}{r_0} - \frac{j}{2\pi\sigma} \ln \frac{2h - R}{r_0} + \frac{j}{2\pi\sigma} \ln \frac{\sqrt{4d^2 + (2h - R)^2}}{r_0}.$$

Dla dolnej krawędzi powinniśmy zastąpić w powyższym wzorze $2h - R$ przez $2h + R$. Zgodnie z założeniami z treści zadania $2h - R \approx 2h - R \approx 2h$, $4d^2 + R^2 \approx 4d^2$, zatem temperatura rury wynosi

$$t_r = t_b + \frac{j}{2\pi\sigma} \left(\ln \frac{2d}{R} + \ln \frac{\sqrt{d^2 + h^2}}{h} \right). \quad (7)$$

Uwzględniając nasz wynik na j otrzymujemy

$$t_r = t_b + \frac{t_p - t_b}{\ln \left(1 + 4\frac{d^2}{h^2} \right)} \left[\ln \frac{2d}{R} + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{d^2}{h^2} \right) \right]. \quad (8)$$

(Pominięcie w powyższym wzorze wyrazu $\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{d^2}{h^2} \right)$ jest w naszym przypadku również bardzo dobrym przybliżeniem.)

Podstawiając wartości liczbowe otrzymamy

$$t_r \approx 27 \text{ } ^\circ\text{C}. \quad (9)$$

Ta temperatura jest sporo niższa od temperatury wody ciepłowniczej, co zapewne oznacza, że w rozważanym przypadku między zewnętrzną powierzchnią rury, a jej częścią stykającą się z wodą znajduje się warstwa izolacji cieplnej.