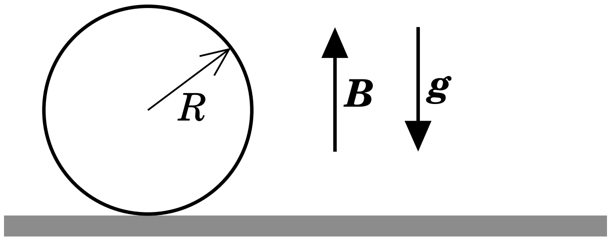
(Za każde z zadań można otrzymać 20 pkt.)

Zadanie 1

Jednorodna, cienkościenna rura o promieniu R, długości L i masie m jest wykonana z izolatora i naładowana całkowitym ładunkiem q o stałej gęstości powierzchniowej. Rura toczy się po poziomym stole, a cały układ jest umieszczony w pionowym, jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B oraz w jednorodnym polu grawitacyjnym o natężeniu g (patrz rys.). Współczynnik tarcia między rurą a stołem wynosi μ.



Wyznacz maksymalną wartość prędkości $v_{\max}$, przy której rura toczy się bez poślizgu po stole, stykając się z nim w więcej niż jednym punkcie. Przedyskutuj zależność otrzymanego wyniku od L przy ustalonych wartościach q/m, R, μ oraz g.

Opisz jakościowo zachowanie rury dla małych czasów $t > 0$, jeśli w chwili $t = 0$ rura toczy się bez poślizgu z prędkością $v > v_{\max}$.

Zadanie 2

Elektrownia geotermalna pobiera wodę o temperaturze T_w z podziemnego zbiornika znajdującego się na głębokości h. Ciśnienie wody w tym zbiorniku jest równe p_w. Woda odprowadzana jest do jeziora na powierzchni ziemi. Temperatura otoczenia, w tym temperatura wody w jeziorze wynosi T_0, ciśnienie otoczenia jest równe p_0 . Masa wody, jaką można pobrać w jednostce czasu, wynosi J.

a) Jaką maksymalną moc może mieć ta elektrownia?

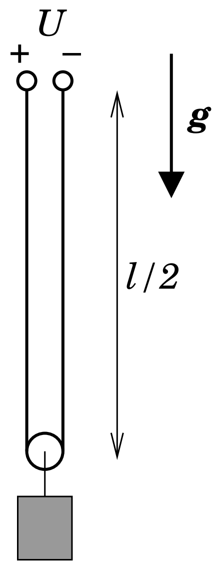
b) Ile wynosiłaby ta maksymalna moc, gdyby woda była wtłaczana z powrotem do tego samego podziemnego zbiornika?

Przyjmij, że ciepło właściwe wody c_w jest stałe oraz pomiń jej ściśliwość i rozszerzalność cieplną.

Podaj wartości liczbowe przyjmując $T_0 = 280$ K, $T_w = 370$ K, $h = 2000$ m, $p_0 = 10^5$ Pa, $p_w = 2,10 \cdot 10^7$ Pa, gęstość wody $\rho = 10^3$ kg/m^3, ciepło właściwe wody $c_w = 4,2 \cdot 10^3$ J/(kg K), przyspieszenie ziemskie $g = 10$ m/s^2 oraz $J = 100$ kg/s.

Zadanie 3.

Rozpatrzmy pętlę z drutu, obciążoną ciężarkiem o masie m (patrz rys.), znajdującą się w otoczeniu o temperaturze T_0. Końce pętli są podłączone do napięcia U.



Gdy długość drutu wynosi l, a jego temperatura jest równa T, to opór elektryczny pętli jest równy $R = R_0 \left[1 + G\left(l - l_0\right)/l_0 + a_R\left(T - T_0\right)\right]$, gdzie G, a_R, R_0, l_0 są stałymi, natomiast siła naciągu drutu wynosi $F_N = k\left\{l - l_0\left[1 + \alpha\left(T - T_0\right)\right]\right\}$, gdzie k jest stałą sprężystości, a α – współczynnikiem rozszerzalności liniowej. Wiadomo, że w rozważanej sytuacji moc cieplna P_c odprowadzana z drutu do otoczenia spełnia związek $P_c = \beta \cdot (T - T_0)$, gdzie β jest stałą dodatnią. Pomijając pojemność cieplną drutu, wyznacz częstotliwość małych, pionowych drgań ciężarka na pętli.

Podaj wartość liczbową tej częstotliwości dla $k = 5000$ N/m, $l_0 = 1$ m, $m = 1$ kg, $U = 2$ V, $R_0 = 2\ \Omega$, $\alpha = 1 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}, $\beta = 0,01$ W/K, $a_R = 5 \cdot 10^{-3}$ K^{-1}, $T_0 = 300$ K oraz $G = 200$.

W rachunkach ogranicz się do wyrazów liniowych w przyrostach temperatury i długości drutu. Masa drutu jest pomijalna w porównaniu z m.

Informacja dodatkowa: zjawisko stosunkowo dużej zależności oporu niektórych materiałów od ich odkształcenia jest wykorzystywane w czujnikach mierzących siły (tzw. czujniki tensometryczne). W przypadku "zwykłych" materiałów typowa wartość stałej G jest zbliżona do 2.

Wzory, które mogą być przydatne

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \mathrm{const},$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + \mathrm{const},$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + \mathrm{const},$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + \mathrm{const},$$

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x, \text{ dla małych } x.$$

Rozwiązanie zadania 1.
Ustalmy układ współrzędnych tak, by jego środek pokrywał się ze środkiem masy rury, oś x była skierowana wzdłuż kierunku ruchu rury, oś y – pionowo górę a oś z – wzdłuż osi rury. Oznacza to, że $\vec{B} = B\vec{e}_y$, przyspieszenie ziemskie $\vec{g} = -g\vec{e}_y$. Gdy rura się toczy, prędkość jej małego elementu określonego (w danej chwili) współrzędnymi x, y, z, jest dana wzorem

$$\vec{v} = \vec{v}_{\rm CM} + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

gdzie $\vec{v}_{\rm CM} = v_{\rm CM}\vec{e}_x$ jest prędkością środka masy, $\vec{\omega} = -\omega\vec{e}_z$ jest prędkością kątową ruchu obrotowego walca, $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$.
Zgodnie z powyższym mamy

$$\begin{aligned} v_x &= v_{\rm CM} + \omega R\cos\alpha, \\ v_y &= -\omega R \sin\alpha, \end{aligned}$$

gdzie α jest kątem jaki tworzy rzut $\vec{r}$ na płaszczyznę xy z osią y (tzn. $\vec{r} = R\left(\vec{e}_x \sin\alpha + \vec{e}_y\cos\alpha\right) + z\vec{e}_z$).
Warunek braku poślizgu oznacza

$$\omega = \frac{v_{\rm CM}}{R}.$$

Na nasz element działa siła Lorentza

$$\Delta\vec{F}_L = \Delta q\vec{v} \times \vec{B},$$

gdzie Δq jest ładunkiem rozpatrywanego elementu; jeśli oznaczymy przez ΔS pole tego elementu, to $\Delta q = \rho\Delta S/\left(2\pi RL\right)$. Uwzględniając poprzednie wzory otrzymamy

$$\Delta\vec{F}_L = \Delta q\left(v_{\rm CM} + \omega R\cos\alpha\right)B\vec{e}_z. \tag{1}$$

Całkowitą siłę Lorentza $\vec{F}_L$ otrzymamy dodając przyczynki $\Delta\vec{F}_L$ od każdego elementu rury. Otrzymamy

$$\vec{F}_L = qBv_{\rm CM}\vec{e}_z, \tag{2}$$

gdzie $\rho\pi R^2 L$ jest całkowitym ładunkiem. (W powyższym wzorze na $\vec{F}_L$ nie ma wyrazu proporcjonalnego do ω gdyż sumujemy po wszystkich α od 0 do 2π, a $\omega R\cos\alpha + \omega R\cos(\alpha+\pi) = 0$.)
Aby walec nie ślizgał się po stole, powyższa siła musi być równoważona przez siłę tarcia, której maksymalna wartość wynosi μmg.
Zatem musi być spełniony warunek

$$qB\left|v_{\rm CM}\right| \le \mu mg, \tag{3}$$

czyli

$$\left|v_{\rm CM}\right| \le \frac{\mu mg}{qB}, \tag{4}$$

Musimy jeszcze rozważyć momenty sił działające na rurę.
Moment siły Lorentza względem osi x działający na dany element rury jest równy

$$\begin{aligned} \Delta M_L &= y\Delta F_L \qquad (5)\\ &= R\cos\alpha\Delta q\left(v_{\rm CM} + \omega R\cos\alpha\right)B, \qquad (6) \end{aligned}$$

przy czym $\Delta q = qR\Delta\alpha\Delta L/\left(2\pi RL\right)$. Zauważmy, że ze względu na symetrię wyrażenia na $\Delta\vec{F}_L$ względem osi y (symetria w zmiennej α we wzorze (1)) moment tej siły względem osi y jest zerowy. Zerowy jest również moment siły Lorentza względem osi z gdyż $\Delta\vec{F}_L$ jest proporcjonalne do $\vec{e}_z$.
Ponieważ ΔM_L nie zależy od L otrzymamy

$$\begin{aligned} M_L &= \frac{q}{2\pi RL}\int_0^{2\pi} L\ R\cos\alpha\cdot\left(v_{\rm CM} + \omega r_\perp\cos\alpha\right)Bd\alpha \\ &= \frac{q}{2\pi}B\left(v_{\rm CM}\int_0^{2\pi}\cos\alpha d\alpha + \omega R\int_0^{2\pi}\cos^2\alpha d\alpha\right). \end{aligned}$$

Ponieważ $\int_0^{2\pi}\cos\alpha d\alpha = 0$ oraz $\int_0^{2\pi}\cos^2\alpha d\alpha = \pi$ (wartość średnia funkcji $\cos^2\alpha$ w przedziale $[0,\ 2\pi]$ jest równa $1/2$ – np. z wiedzy o prądzie zmiennym), otrzymamy

$$\vec{M}_L = \frac{qB\omega R}{2}\vec{e}_x. \tag{7}$$

Moment ten stara się obrócić walec wokół osi x. Aby to nie nastąpiło, musi on być zrównoważony przez moment siły tarcia M_T i moment siły reakcji podłoża M_R. Moment siły tarcia względem osi x wynosi

$$M_T = RT = RqBv_{\mathrm{CM}}, \tag{8}$$

gdzie uwzględniliśmy, że jeśli walec się nie ślizga, to siła tarcia T jest równa sile Lorentza F_L. Siła reakcji równi N jest równa co do wartości ciężarowi walca mg, a maksymalna wartość momentu tej siły względem osi x odpowiada przypadkowi, gdy N jest przyłożona na końcu rury:

$$M_{R\,\max} = N\frac{L}{2} = \frac{mgL}{2}.$$

Ponieważ zwroty M_L i M_T są zgodne, walec nie będzie się obracał wokół osi x (czyli będzie się stykał ze stołem w więcej niż jednym punkcie) jeśli spełniony będzie warunek

$$|M_L + M_T| \le M_{R\,\max}, \tag{9}$$

czyli, uwzględniając, że $\omega R = v_{\mathrm{CM}}$, gdy

$$\left|\frac{1}{2}qBRv_{\mathrm{CM}} + qBRv_{\mathrm{CM}}\right| \le \frac{mgL}{2}.$$

Oznacza to, że powinien być spełniony warunek

$$|v_{\mathrm{CM}}| \le \frac{1}{3}\frac{mgL}{qRB}. \tag{10}$$

Uwzględniając warunek (4), otrzymujemy, że szukane $v_{\max}$ jest równe

$$v_{\max} = \min\left(\mu\frac{mg}{qB},\ \frac{1}{3}\frac{mg}{qB}\frac{L}{R}\right). \tag{11}$$

Gdy L jest mniejsze od $3\mu R$ maksymalna prędkość jest proporcjonalna do L zgodnie ze wzorem $v_{\max} = \frac{1}{3}\frac{mgL}{qRB}$ i jest określona przez warunek nie przewracania się rury. Gdy $L \ge 3\mu R$, maksymalna prędkość jest stała i równa $\frac{\mu mg}{qB}$. W tym drugim przypadku jest ona określona przez warunek nie przesuwania się rury wzdłuż osi styczności ze stołem.
To co się będzie działo z rurą w przypadku $v_{CM} > v_{\max}$ zależy od tego, z którym z rozważanych powyżej przypadków mamy do czynienia. Gdy $\mu\frac{mg}{qB} < v_{CM} \le \frac{1}{3}\frac{mg}{qB}\frac{L}{R}$ (czyli musi być $L > 3\mu R$) siła tarcia będzie za mała, by zrównoważyć siłę Lorentza i walec zacznie się przesuwać (ślizgać) wzdłuż osi z. Gdy $\mu\frac{mg}{qB} \ge v_{CM} > \frac{1}{3}\frac{mg}{qB}\frac{L}{R}$ (czyli musi być $L < 3\mu R$)) podniesie się on w górę obracając wokół osi równoległej do osi x. Ponieważ jednak toczący się walec ma niezerowy moment pędu wzdłuż osi z, w wyniku tego walec zacznie się również obracać wokół pionowej osi przechodzącej przez punkt styczności walca z podłożem - podobnie jak obracający się bąk, którego oś nagle przechylimy. (Można to wyjaśnić też następująco: walec ma pewien moment pędu wzdłuż swojej osi. Po przechyleniu walca, ten moment pędu będzie miał niezerową składową pionową. A niezerowa pionowa składowa momentu pędu oznacza obrót wokół pionowej osi.)
Gdy $v_{CM} > \frac{1}{3}\frac{mg}{qB}\frac{L}{R}$ oraz $v_{CM} > \mu\frac{mg}{qB}$ ruch walca będzie złożeniem opisanych poprzednio ruchów.

Rozwiązanie zadania 2.
Rozważmy porcję wody o masie m. Obliczmy, ile pracy (energii elektrycznej) można uzyskać ochładzając ją od temperatury T_w do temperatury T_0. Największą pracę można uzyskać chłodząc ją przy użyciu silnika Carnota. Załóżmy, że w danym momencie temperatura tej porcji wynosi T. Sprawność cyklu Carnota pracującego między temperaturami T i T_0 wynosi $1 - T_0/T$, co oznacza, że jeśli z wody pobierzemy ciepło $\Delta\bar{Q}_w$, to wykonana praca wyniesie

$$\Delta W = \left(1 - \frac{T_0}{T}\right)\Delta\bar{Q}_w. \tag{12}$$

Z drugiej strony w wyniku pobrania ciepła $\Delta\bar{Q}_w$ temperatura naszej porcji wody spadnie do $T+\Delta T$, gdzie

$$\Delta T = -\frac{\Delta\bar{Q}_w}{mc_w}. \tag{13}$$

Zatem

$$\Delta W = -\left(1-\frac{T_0}{T}\right) mc_w \Delta T. \tag{14}$$

Całkowitą pracę otrzymamy dodając przyczynki od wszystkich ΔT, co oznacza, że

$$W = -\int_{T_w}^{T_o} \left(1-\frac{T_0}{T}\right) mc_w dT \tag{15}$$

$$= mc_w \left[(T_w - T_0) - T_0 \ln\frac{T_w}{T_0}\right]. \tag{16}$$

Przyjmując $m = J\Delta t$, gdzie Δt jest czasem, w którym pobraliśmy tę wodę, otrzymamy, że moc P_c związana z pobieraniem ciepła wynosi

$$P_c = \frac{W}{\Delta t} = Jc_w \left[(T_w - T_0) - T_0 \ln\frac{T_w}{T_0}\right]. \tag{17}$$

W przypadku a) musimy dodać do tego jeszcze czysto mechaniczną moc P_m jaką możemy uzyskać (lub musimy zużyć) wydobywając wodę na powierzchnię (łatwo jest ją obliczyć np. uwzględniając, że różnica ciśnień $p_w - p_0$ jest "równoważna" różnicy wysokości $\Delta h = (p-p_0)/(\rho g)$)

$$P_m = J(p_w - p_0)/\rho - Jgh. \tag{18}$$

Zatem maksymalna moc, jaką może mieć taka elektrownia, w przypadku a) wynosi

$$P_a = J\left\{c_w \left[(T_w - T_0) - T_0 \ln\frac{T_w}{T_0}\right] + (p_w - p_0)/\rho - gh\right\}. \tag{19}$$

W przypadku b) praca uzyskana do wydobycia wody na powierzchnię jest równa pracy niezbędnej do wtłoczenia wody pod ziemię, a zatem maksymalna moc w tym przypadku wynosi

$$P_b = Jc_w \left[(T_w - T_0) - T_0 \ln\frac{T_w}{T_0}\right]. \tag{20}$$

Podstawiając dane liczbowe dostaniemy

$$P_a \approx 5{,}1 \cdot 10^6 \text{ W}, \tag{21}$$

$$P_b \approx 5{,}0 \cdot 10^6 \text{ W}. \tag{22}$$

Rozwiązanie zadania 3.
Moc prądu elektrycznego wyraża się wzorem $P_{el} = U^2/R$, zatem

$$P_{el} = \frac{U^2}{R_0\left[1 + G\Delta l/l_0 + a_R(T-T_0)\right]} \tag{23}$$

$$\approx \frac{U^2}{R_0}\left[1 - G\frac{\Delta l}{l_0} - a_R(T-T_0)\right], \tag{24}$$

gdzie $\Delta l = l - l_0$.
Bilans cieplny drutu w przypadku, gdy pojemność cieplna drutu C jest niezerowa, wyraża się równaniem

$$C\frac{dT}{dt} = P_{el} - P_c = \frac{U^2}{R} - \beta(T-T_0) \tag{25}$$

$$\approx \frac{U^2}{R_0}\left[1 - G\frac{\Delta l}{l_0} - a_R(T-T_0)\right]$$

$$\approx \frac{U^2}{R_0} - \frac{U^2}{R_0}\frac{G}{l_0}\Delta l - \left(\frac{U^2}{R_0}a_R + \beta\right)(T-T_0) \tag{26}$$

Wypadkowa siła działająca na ciężarek jest równa $2F_N - mg$, a jego odległość od punktu zawieszania wynosi $l/2$, zatem równanie ruchu ciężarka jest następujące

$$m\frac{d^2}{dt^2}\frac{l}{2} = -2k\left[l - l_0 - \alpha l_0 \left(T - T_0\right)\right] + mg. \tag{27}$$

Ponieważ pomijamy pojemność cieplną C równanie (26) sprowadza się do postaci

$$\frac{U^2}{R_0} - \frac{U^2}{R_0}\frac{G}{l_0}\Delta l - \left(\frac{U^2}{R_0}a_R + \beta\right)\left(T - T_0\right) = 0. \tag{28}$$

Jeśli oznaczymy przez x i θ odchylenia odpowiednio l i T od wartości równowagowych, to równania (27) i (28) sprowadzą się do równań

$$m\frac{d^2}{dt^2}\frac{x}{2} = -2k\left(x - \alpha l_0 \theta\right), \tag{29}$$

$$0 = -\frac{U^2}{R_0}\frac{G}{l_0}x - \left(\frac{U^2}{R_0}a_R + \beta\right)\theta. \tag{30}$$

Wyznaczając θ z drugiego równania i wstawiając do pierwszego oraz mnożąc obie strony równania przez 2 dostajemy

$$m\frac{d^2}{dt^2}x = -4k\left(1 + \alpha\frac{\frac{U^2}{R_0}G}{\frac{U^2}{R_0}a_R + \beta}\right)x. \tag{31}$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego o masie m i stałej sprężystości $k_{ef} = 4k\left(1 + a\frac{\frac{U^2}{R_0}G}{\frac{U^2}{R_0}a+\beta}\right)$, zatem częstotliwość drgań wynosi

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(1 + \alpha\frac{\frac{U^2}{R_0}G}{\frac{U^2}{R_0}a_R + \beta}\right)\frac{4k}{m}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\left(1 + \alpha\frac{G}{a_R + \beta/\frac{U^2}{R_0}}\right)\frac{k}{m}}. \tag{32}$$

Zauważmy, że w przypadku $U = 0$ (lub $\alpha = 0$ lub $G = 0$) otrzymalibyśmy po prostu

$$f = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Zatem uwzględnienie rozważanych efektów powoduje w przypadku $\alpha > 0$ i $G > 0$ wzrost częstotliwości – efektywnie wzrasta wartość stałej sprężystości.
Dla podanych wartości liczbowych wartość "poprawki" wynosi

$$\alpha\frac{G}{a_R + \beta/\frac{U^2}{R_0}} = 0,2\ , \tag{33}$$

natomiast częstotliwość drgań z jej uwzględnieniem jest równa

$$f \approx 24,7\frac{1}{s}. \tag{34}$$

Informacja dodatkowa: w przypadku $C \neq 0$ i przy dodatnich wartościach parametrów amplituda drgań rośnie z czasem. Zatem nawet jeśli początkowo x jest bliskie 0, po pewnym czasie drgania zaczną być obserwowalne – mamy do czynienia z drganiami "samowzbudnymi". Oczywiście dla dużych amplitud liniowe przybliżenie przestaje być uzasadnione, jednak rozpatrywany efekt musi być uwzględniany przy projektowaniu czujników sensometrycznych.