

# LIX OLIMPIADA FIZYCZNA

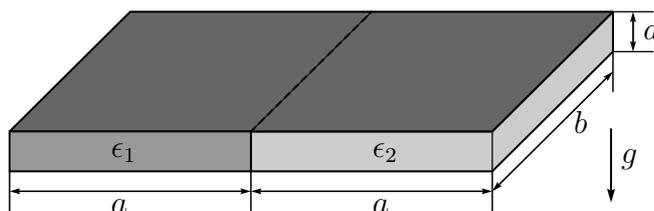
## ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA

### CZEŚĆ TEORETYCZNA

Wzory, które mogą być przydatne:

$(1+x)^n \approx 1+nx$ ,  $\sin x \approx x$ ,  $\cos x \approx 1-x^2/2$ , gdzie  $|x| \ll 1$ .

#### Zadanie 1.



Kondensator płaski o jednorodnych, sztywnych, prostokątnych okładkach o bokach długości  $2a$  i  $b$  jest wypełniony dwoma rodzajami dielektryka o przenikalności elektrycznej  $\epsilon_1$  oraz  $\epsilon_2$  (patrz rysunek). Kondensator jest umieszczony poziomo w polu grawitacyjnym. Górna okładka jest unieruchomiona, dielektryki są do niej przyklejone, natomiast dolna okładka nie jest w żaden sposób umocowana. Jakie powinno być napięcie  $U$  na tym kondensatorze, aby dolna okładka nie oderwała się od dielektryka?

Odległość między okładkami wynosi  $d$ , przy czym  $d \ll a, b$ , a masa dolnej okładki wynosi  $m$ .

Podaj wartość liczbową dla:  $m = 0,02 \text{ kg}$ ,  $a = 0,05 \text{ m}$ ,  $b = 0,1 \text{ m}$ ,  $d = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ ,  $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$ ,  $\epsilon_2 = 4\epsilon_0$ .

Przenikalność elektryczna próżni  $\epsilon_0 \approx 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ , przyspieszenie ziemskie  $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ .

#### Zadanie 2.

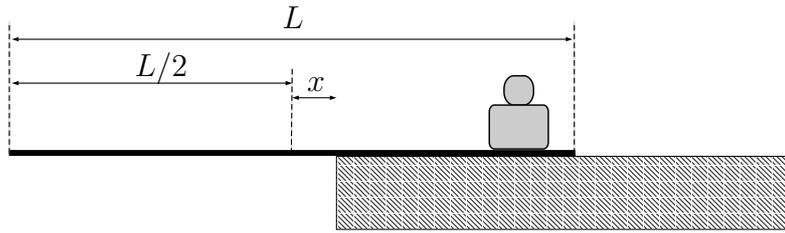
Rozbitek płynie w spokojnym oceanie, trzymając głowę tuż nad powierzchnią wody. Z jakiej największej odległości (mierzonej wzdłuż powierzchni oceanu) może on zobaczyć światło latarni morskiej, wysyłane z wysokości  $H = 30 \text{ m}$  nad powierzchnią oceanu?

W rozważanej sytuacji można przyjąć, że powietrze jest podzielone na dwie warstwy: niższą – od powierzchni oceanu do wysokości  $H/2$  o temperaturze  $t_0 = 20^\circ\text{C}$  oraz wyższą, od  $H/2$  do  $H$ , o temperaturze  $t_1 = 23^\circ\text{C}$ . Przyjmij, że ciśnienie powietrza w obszarze od powierzchni oceanu do wysokości  $H$  jest stałe.

Zależność współczynnika załamania powietrza od jego gęstości  $\rho$  jest dana wzorem  $n = 1 + b \cdot \rho$ , gdzie  $b = 0,23 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$ .

Gęstość powietrza w dolnej warstwie wynosi  $\rho_0 = 1,2 \text{ kg/m}^3$ . Promień Ziemi, mierzony do powierzchni oceanu, jest równy  $R = 6370 \text{ km}$ .

Zakładamy idealną przejrzystość powietrza. Latarnia wysyła światło w zakresie kątów od  $0$  (pionowo w dół) do  $\pi/2$  (poziomo).

**Zadanie 3.**

Jednorodna, sztywna linijka o długości  $L$ , masie  $M$  oraz pomijalnie małej grubości leży na poziomym stole tak, że jej środek masy znajduje się w odległości  $x$  od końca stołu (patrz rysunek). Początkowo linijka była unieruchomiona stojącym na niej odważnikiem. W pewnej chwili zdjęto odważnik i linijka zaczęła się obracać wokół krawędzi stołu. Znajdź kąt odchylenia  $\theta_g$  linijki od poziomu, przy którym zacznie się ona ześlizgiwać z krawędzi.

Współczynnik tarcia linijki o stół wynosi  $\mu$ . Dłuższe krawędzie linijki są prostopadłe do krawędzi stołu.

Podaj wartość liczbową  $\theta_g$  dla  $x = 3$  cm,  $L = 30$  cm,  $M = 0,05$  kg,  $\mu = 0,2$ .

**LIX OLIMPIADA FIZYCZNA****Rozwiązania zadań****ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA****CZEŚĆ TEORETYCZNA****Zadanie 1.**

Pole elektryczne wewnątrz dielektryków, którymi wypełniony jest kondensator, jest prostopadłe do okładek i ma wartość

$$E_d = \frac{U}{d}. \quad (1)$$

Na podstawie prawa Gaussa, gęstość ładunku znajdującego się na okładce wynosi

$$\sigma_i = \epsilon_i E_d = \epsilon_i \frac{U}{d}. \quad (2)$$

gdzie  $i = 1, 2$  jest numerem dielektryka, z którym styka się okładka.

Ponieważ w pobliżu danego punktu na okładce możemy ją traktować jako nieskończoną płaszczyznę ( $d \ll a, b$ ), z symetrii i prawa Gaussa wynika, że pole elektryczne wytworzone przez okładkę ma w niewielkiej od niej odległości wartość

$$E_{oi} = \frac{\sigma_i}{2\epsilon_0} = \frac{\epsilon_i U}{2\epsilon_0 d}. \quad (3)$$

Jest ono prostopadłe do okładki i symetryczne względem niej.

Na zewnątrz kondensatora pole elektryczne jest równe zero. Oznacza to, że zewnętrzne (dla okładki) pole elektryczne  $E_{zi}$ , w którym się znajduje rozważany fragment okładki, musi spełniać warunek  $\vec{E}_{zi} + \vec{E}_{oi} = 0$ , a zatem jego wartość wynosi

$$E_{zi} = E_{oi} = \frac{\epsilon_i U}{2\epsilon_0 d}. \quad (4)$$

Stąd wynika, że na jednostkę powierzchni danej części okładki działa siła

$$f_i = \sigma_i E_{zi} = \frac{\epsilon_i^2}{2\epsilon_0} \left(\frac{U}{d}\right)^2. \quad (5)$$

Zatem na część okładki stykającą się dielektrykiem  $i$  działa siła

$$F_i = \frac{\epsilon_i^2}{2\epsilon_0} \left(\frac{U}{d}\right)^2 ab. \quad (6)$$

Ponieważ  $f_i$  jest stałe, możemy przyjąć, że siła ta jest przyłożona w środku danej części okładki.

Aby dolna okładka nie odpadła od reszty kondensatora całkowita siła działająca elektryczna działająca na nią nie może być mniejsza niż siła grawitacyjna, czyli

$$F_1 + F_2 \geq mg. \quad (7)$$

Jednak okładka może zacząć odrywać się od dielektryka tylko z jednej strony, co oznacza że momenty sił elektrycznych względem każdej z krawędzi  $b$  okładki muszą być większe od momentów siły ciężkości

$$F_1 \left( \frac{a}{2} + a \right) + F_2 \frac{a}{2} \geq mga, \quad (8a)$$

$$F_1 \frac{a}{2} + F_2 \left( \frac{a}{2} + a \right) \geq mga. \quad (8b)$$

Dodając powyższe nierówności do siebie i dzieląc przez  $2a$  dostajemy nierówność (7), zatem wystarczy brać pod uwagę jedynie nierówności (8a) i (8b). Podstawiając wyrażenia na  $F_1$  i  $F_2$  i dzieląc nierówności przez  $a$  otrzymamy

$$\left( \frac{\epsilon_1^2}{2\epsilon_0} \frac{3}{2} + \frac{\epsilon_2^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} \right) \left( \frac{U}{d} \right)^2 ab \geq mg, \quad (9a)$$

$$\left( \frac{\epsilon_1^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} + \frac{\epsilon_2^2}{2\epsilon_0} \frac{3}{2} \right) \left( \frac{U}{d} \right)^2 ab \geq mg. \quad (9b)$$

Zatem  $U$  musi spełniać warunki

$$U \geq d \sqrt{\frac{4mg\epsilon_0}{ab} / (3\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)}, \quad (10a)$$

$$U \geq d \sqrt{\frac{4mg\epsilon_0}{ab} / (\epsilon_1^2 + 3\epsilon_2^2)}. \quad (10b)$$

Warunek ten możemy przepisać postaci

$$U \geq U_{\min},$$

gdzie

$$U_{\min} = \begin{cases} d \sqrt{\frac{4mg\epsilon_0}{ab} / (3\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)} & \text{gdy } \epsilon_2 \geq \epsilon_1, \\ d \sqrt{\frac{4mg\epsilon_0}{ab} / (\epsilon_1^2 + 3\epsilon_2^2)} & \text{gdy } \epsilon_2 < \epsilon_1. \end{cases} \quad (11)$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymamy

$$U_{\min} \approx 401\text{V}. \quad (12)$$

<b>Punktacja</b>	
Gęstość ładunku na danym fragmencie okładki (wzór (2))	1 pkt.
Natężenie pola elektrycznego, w którym znajduje się dany fragment okładki (wzór (4))	2 pkt.
Siły działające na daną część okładki (wzór (6) lub równoważny)	3 pkt.
Warunki, które muszą być spełnione, żeby okładka się nie oderwała (nierówności (8) lub równoważne)	2 pkt.
UWAGA! Jeśli tylko warunek (7)	1 pkt.
Jawna postać warunków na $U$ , które muszą być spełnione, żeby okładka się nie oderwała (wzory (10a) i (10b) lub równoważne)	1 pkt.
Wartość liczbowa wartości granicznej $U$ (wzór (12))	1 pkt.

**Zadanie 2.**

Rozważmy warstwę o numerze  $k$  ( $k = 0, 1$ ) o współczynniku załamania  $n_k$  rozciągającą się od wysokości  $h_k$  do wysokości  $h_{k+1}$ . Niech  $\alpha_k$  ( $0 \leq \alpha_k \leq \pi/2$ ) będzie kątem, jaki tworzy z pionem promień światła biegnący w tej warstwie na jej spodzie, a  $\beta_k$  ( $0 \leq \beta_k \leq \pi/2$ ) – analogiczny kąt na górze tej warstwy. Z twierdzenia sinusów mamy

$$\frac{\sin(\alpha_k)}{R + h_{k+1}} = \frac{\sin(\beta_k)}{R + h_k}. \quad (13)$$

Stąd mierzona wzdłuż powierzchni oceanu odległość między początkiem i końcem promienia w rozważanej warstwie wynosi

$$\begin{aligned} d_k &= R[\pi - (\pi - \alpha_k) - \beta_k] = \\ &= R\left[\alpha_k - \arcsin\left(\frac{R + h_k}{R + h_{k+1}} \sin \alpha_k\right)\right] \\ &= R\left[\arccos\left(\frac{R + h_k}{R + h_{k+1}} \sin \alpha_k\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_k\right)\right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Gdybyśmy mieli tylko jedną warstwę (przyjmijmy, że o numerze 0), wtedy  $h_0 = 0$ ,  $h_1 = H$ . Maksymalny zasięg odpowiadałby  $\alpha_0 = \pi/2$ , zatem

$$d|_{\text{warstwa}} = R \arccos \frac{R}{R + H} = 19,6 \text{ km}.$$

Dla dwóch warstw, związek między  $\alpha_1$  i  $\beta_0$  jest dany prawem załamania, zatem

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha_1 &= \frac{n_0}{n_1} \sin \beta_0 \\
 &= \frac{n_0}{n_1} \frac{R + h_0}{R + h_1} \sin \alpha_0 \\
 &= \frac{n_0}{n_1} \frac{R}{R + H/2} \sin \alpha_0,
 \end{aligned} \tag{15}$$

gdzie  $n_k$  jest współczynnikiem załamania w  $k$ -tej warstwie.

Na podstawie równania stanu gazu doskonałego i danych z treści zadania gęstość powietrza w zależności od jego temperatury  $T = 273K + t$  jest dana wzorem

$$\rho = \rho_0 \frac{T_0}{T}, \tag{16}$$

gdzie  $T_0 = 293K$ .

Uwzględniając podany wzór na współczynnik załamania, pod podstawieniu wartości liczbowych dostaniemy:

$$n_0 = 1,0002760, \quad n_1 = 1,0002731. \tag{17}$$

W najprostszym przypadku maksymalną odległość latarni otrzymalibyśmy dla  $\alpha_0 = \pi/2$ , czyli gdy  $\sin \alpha_0 = 1$ . Jednak w naszym przypadku prowadziłyby to wartości  $\sin \alpha_1 = \frac{n_0}{n_1} \frac{R}{R+H} \sin \alpha_0 = 1,00000047 > 1$ . Oznacza to, że największa dopuszczalna wartość  $\alpha_0$ , odpowiadająca jednocześnie największej odległości latarni, spełnia warunek

$$\frac{n_0}{n_1} \frac{R}{R + H/2} \sin \alpha_0 = 1, \text{ jeśli } \frac{n_0}{n_1} \frac{R}{R + H/2} > 1, \tag{18a}$$

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2}, \text{ jeśli } \frac{n_0}{n_1} \frac{R}{R + H/2} \leq 1. \tag{18b}$$

Czyli w naszym przypadku

$$\frac{\pi}{2} - \alpha_0 = \arccos \left( \frac{n_1}{n_0} \frac{R + H/2}{R} \right). \tag{19}$$

Stąd i z poprzednich wzorów

$$\begin{aligned}
 d &= d_0 + d_1 \\
 &= R \left[ \arccos \left( \frac{n_1}{n_0} \right) - \arccos \left( \frac{n_1}{n_0} \frac{R + H/2}{R} \right) + \arccos \left( \frac{R + H/2}{R + H} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{20a}$$

$$= 22,8 \text{ km.} \tag{20b}$$

Wartości liczbowe występujące w rozważanym problemie pozwalają na przybliżenia w powyższych wzorach. Mamy

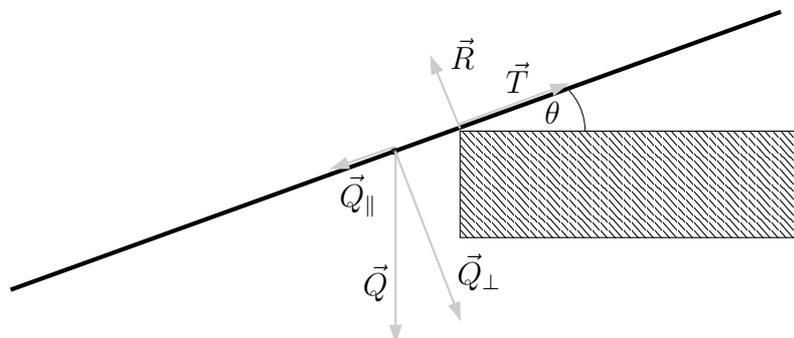
$$\begin{aligned} n_1 - n_0 &\approx b\rho_0 \left( \frac{T_1 - T_0}{T_0} \right), \\ \frac{n_1}{n_0} &\approx 1 + (n_1 - n_0), \\ \frac{n_1 R + H/2}{n_0 R} &\approx 1 + \left[ (n_1 - n_0) + \frac{H}{2R} \right] \\ \frac{R + H/2}{R + H} &\approx 1 - \frac{H}{2R}. \end{aligned}$$

Ze wzoru  $\cos(x) \approx 1 - x^2/2$  otrzymujemy  $\arccos y = \sqrt{2(1-y)}$ , zatem

$$d \approx R \left[ \sqrt{2(n_0 - n_1)} - \sqrt{2(n_0 - n_1) - \frac{H}{R}} + \sqrt{\frac{H}{R}} \right]. \quad (21)$$

Punktacja	
Wzór na zależność gęstości powietrza od temperatury (wzór (16)) i wykorzystanie go do obliczenia współczynników załamania (wzory (17))	2pkt.
Odległość przebyta przez promień w każdej z warstw (wzór (14) lub wzory równoważne)	2pkt.
Związek między kątami w warstwach (wzór (15))	2pkt.
Warunek na kąt $\alpha_0$ (wzory (18) lub równoważne, albo tylko wzór (18a) – jeśli jest on uzasadniony wynikami liczbowymi)	1 pkt.
Wynik końcowy (wzór (20a) lub równoważny)	2 pkt.
Wynik liczbowy (wzór (20b))	1 pkt.

### Zadanie 3.



W chwili, w której linijka jest odchylona o kąt  $\theta$  od poziomu, działają na nią następujące siły:

- prostopadle do linijki
  - składowa siły ciężkości  $Q_{\perp} = mg \cos \theta$  przyłożona w środku masy linijki,
  - siła reakcji stołu  $R$  przyłożona w punkcie styku linijki i stołu.
- wzdłuż linijki
  - składowa siły ciężkości  $Q_{\parallel} = mg \sin \theta$  przyłożona w środku masy linijki,
  - siła tarcia  $T$  przyłożona w punkcie styku linijki i stołu, której największa wartość wynosi  $T_{max} = \mu R$ .

Równoległa do dłuższych krawędzi linijki składowa przyspieszenia środka masy linijki  $a_{\parallel}$  spełnia równanie

$$Ma_{\parallel} = T - Q_{\parallel}. \quad (22)$$

Jeśli linijka się nie ślizga,  $a_{\parallel}$  jest równe przyspieszeniu dośrodkowemu środka masy linijki w ruchu po okręgu wokół krawędzi stołu, zatem

$$Mx\dot{\theta}^2 = T - Q_{\parallel}. \quad (23)$$

gdzie  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ .

(Powyższe równanie można również otrzymać z rozważań w układzie nieinercyjnym, z warunku równowagi sił: odśrodkowej, tarcia oraz równoległej do linijki składowej siły ciężkości.) Z równania (23), uwzględniając warunek  $T \leq \mu R$  oraz równanie na  $Q_{\parallel}$ , otrzymujemy,

$$Mx\dot{\theta}^2 \leq \mu R - Mg \sin \theta. \quad (24)$$

Linijka zacznie się ześlizgiwać od momentu, w którym przestanie być spełniony powyższy warunek.

Teraz wyznaczmy siłę reakcji  $R$  stołu działającą na linijkę. Dla ruchu obrotowego względem krawędzi stołu mamy

$$I\ddot{\theta} = Mxg \cos \theta, \quad (25)$$

gdzie  $\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ , a  $I$  jest momentem bezwładności wokół osi obrotu, tzn.

$$I = \frac{ML^2}{12} + Mx^2. \quad (26)$$

Dla ruchu postępowego środka masy linijki w kierunku prostopadłym do niej mamy

$$Mx\ddot{\theta} = Mg \cos \theta - R. \quad (27)$$

Z równań (25) i (27) otrzymujemy

$$R = Mg \cos \theta \left( 1 - \frac{Mx^2}{I} \right). \quad (28)$$

Chwilową prędkość kątową  $\dot{\theta}$  można wyznaczyć wykorzystując zasadę zachowania energii. Zmiana energii potencjalnej środka masy jest równa zmianie energii kinetycznej ruchu obrotowego względem punktu podparcia

$$\frac{I}{2}\dot{\theta}^2 = Mgx \sin \theta. \quad (29)$$

Stąd

$$Mx\dot{\theta}^2 = \frac{2gM^2x^2}{I} \sin \theta. \quad (30)$$

Po wstawieniu wzorów (28) i (30) do warunku (24) otrzymujemy

$$\left[1 + \frac{2Mx^2}{I}\right] \sin \theta \leq \mu \left[1 - \frac{Mx^2}{I}\right] \cos \theta. \quad (31)$$

To oznacza, że tangens kąta granicznego  $\theta_g$ , przy którym linijka zacznie się ślizgać, spełnia równanie

$$\operatorname{tg} \theta_g = \mu \frac{I - Mx^2}{I + 2Mx^2} = \frac{\mu}{1 + 36 \left(\frac{x}{L}\right)^2} \quad (32)$$

Podstawiając dane liczbowe otrzymamy

$$\theta_g \approx \operatorname{arctg}(0,15) \approx 0,15. \quad (33)$$

<b>Punktacja</b>	
Warunek braku poślizgu (nierówność (24) lub równoważna)	2 pkt.
Równania pozwalające wyznaczyć siłę reakcji stołu (równania (25) oraz (27))	2 pkt.
Wyznaczenie siły reakcji stołu (równanie (28) lub równoważne)	1 pkt.
Wykorzystanie zasady zachowania energii (równanie (29)) do wyznaczenia prędkości kątowej	1 pkt.
Jawna postać warunku braku poślizgu (wzór (31) lub równoważny)	2 pkt.
Wynik końcowy (wzór (32))	1 pkt.
Wynik liczbowy (wzór (33))	1 pkt.