LXI OLIMPIADA FIZYCZNA

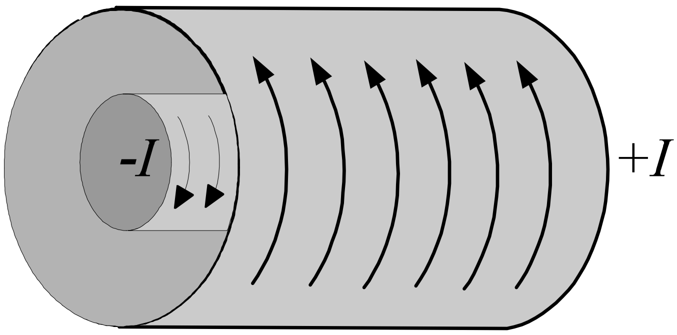
ZAWODY II STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

Zadanie 1.

W celu ochrony planowanej stacji kosmicznej przed promieniowaniem kosmicznym postanowiono wytwarzać wokół niej pole magnetyczne przy pomocy dwóch współśrodkowych, cienkich rur o promieniach R_1 i R_2 (gdzie $R_1 < R_2$) i długości L ($L \gg R_2 - R_1$) przez które płyną, prostopadle do tworzących walców, jednorodne prądy o całkowitym natężeniu odpowiednio $+I$ oraz $-I$ (kierunki prądów są przedstawione na rysunku). Stacja znajduje się wewnątrz rury o promieniu R_1.



Ile powinna wynosić minimalna wartość I oraz odpowiadająca jej indukcja pola magnetycznego B, aby ten układ chronił stację przed równoległą wiązką protonów o energii kinetycznej E_k? Wiązka pada pod kątem α do osi rur. Rozważ dwa przypadki (poniżej m_pc^2 jest energią spoczynkową protonu):

a) nierelatywistyczny ($E_k \ll m_pc^2$),

b) ultrarelatywistyczny ($E_k \gg m_pc^2$).

Przyjmij, że materiał, z którego są wykonane rury, nie spowalnia protonów.

Podaj wyniki liczbowe dla $R_1 = 5\,\mathrm{m}$, $R_2 = 15\,\mathrm{m}$, $L = 100\,\mathrm{m}$, $\alpha = \pi/4$ oraz w przypadku a) $E_k = 10^8$ eV, a w przypadku b) $E_k = 0{,}9 \cdot 10^{10}$ eV. Stałe wynoszą: przenikalność magnetyczna próżni $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{A \cdot m}}$, prędkość światła $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, ładunek protonu $q = 1\,e$, ładunek elementarny $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, energia spoczynkowa protonu $m_pc^2 = 0{,}94 \cdot 10^9$ eV.

Uwaga: w przypadku relatywistycznym całkowita energia (kinetyczna + spoczynkowa) E cząstki o masie (spoczynkowej) m, poruszającej się z prędkością v wynosi

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

oraz obowiązują równania ruchu

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

gdzie $\vec{F}$ jest siłą, a pęd $\vec{p}$ wyraża się wzorem

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

W przypadku sił prostopadłych do prędkości, równania ruchu sprowadzają się do

$$\vec{F} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \vec{a},$$

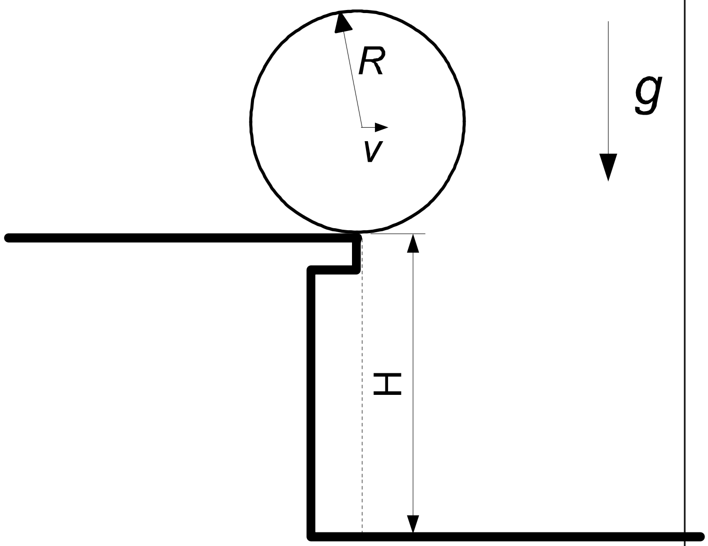
gdzie $\vec{a}$ jest przyspieszeniem.

Zadania 1 i 2 na stronie 2.

Zadanie 2.

Jednorodna rura o cienkiej ściance, promieniu R i masie m leży na krawędzi stołu, znajdującej się na wysokości H (gdzie $H \geq R$) nad podłogą. Oś rury jest stale równoległa do krawędzi stołu. Rurze nadano bardzo małą prędkość, w wyniku czego zaczęła się przechylać i spadła ze stołu.

W jakiej odległości od pionowego rzutu krawędzi na podłogę rura uderzy w podłogę?



Pomiń opór powietrza i opór toczenia. Rura nie ślizga się względem stołu.

Przyspieszenie ziemskie jest równe g.

Zadanie 3.

Wewnątrz zatkanej szczelnym korkiem probówki znajduje się n moli H_2O, w tym $n/2$ moli cieczy oraz $n/2$ moli pary (w probówce nie ma powietrza). Probówka jest umocowana w pozycji pionowej na statywie. Początkowa temperatura wody oraz pary wynosiła T_0, a ciśnienie w probówce było równe ciśnieniu zewnętrznemu p_0. Zawartość kolby podgrzano do temperatury T_1, przy czym cała ciecz zamieniła się w parę, a korek był przytrzymywany w położeniu początkowym. Następnie korek puszczono, w wyniku czego wyskoczył on z probówki pionowo w górę.

a) Na jaką wysokość względem swojego początkowego położenia wzniósł się korek?

b) Ile wynosi sprawność η zdefiniowana jako stosunek energii mechanicznej przekazanej korkowi przez parę do ciepła dostarczonego zawartości probówki?

Masa korka wynosi m, a powierzchnia jego przekroju jest równa S. Od początkowego położenia do opuszczenia kolby korek przebył drogę l. Różnica molowych gęstości energii wewnętrznych (czyli energii wewnętrznych na mol) pary o temperaturze T_0 oraz wody o temperaturze T_0 wynosi q_0. Różnica molowych gęstości energii wewnętrznych pary o temperaturze T_1 oraz wody o temperaturze T_1 jest różna od q_0 i wynosi q_1.

Przyjmij następujące założenia:

- para jest gazem doskonałym o molowym cieple właściwym przy stałej objętości C_V,

- w trakcie rozprężania para pozostawała w stanie równowagi termodynamicznej i nie pobierała (ani nie oddawała) ciepła,

- w trakcie rozprężania do momentu, gdy korek wyskoczył z kolby, nie zachodziła kondensacja pary.

Uwzględnij, że gęstość cieczy jest znacznie większa od gęstości pary oraz pomiń tarcie korka o probówkę, opór powietrza spowodowany ruchem korka oraz masę H_2O w porównaniu z masą korka.

Podaj wyniki liczbowe dla $T_0 = 373\,\mathrm{K}$, $p_0 = 10^5\,\mathrm{N/m^2}$, $T_1 = 473\,\mathrm{K}$, $S = 3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$, $l = 0{,}1\,\mathrm{m}$, $m = 0{,}02\,\mathrm{kg}$, $n = 2 \cdot 10^{-3}$ mola, $q_0 = 38000\,\mathrm{J/mol}$, $q_1 = 31000\,\mathrm{J/mol}$, $C_V = 28\,\mathrm{J/(mol \cdot K)}$, uniwersalna stała gazowa $R = 8{,}3\,\mathrm{J/(mol \cdot K)}$, $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

Rozwiązanie zadania 1.

Rury tworzą współosiowe solenoidy – pole magnetyczne między nimi jest jednorodne i i skierowane wzdłuż osi walców, a jego indukcja jest równa

$$B = \mu_0 \frac{I}{L}. \tag{1}$$

Cząstka naładowana porusza się w stałym polu magnetycznym po linii śrubowej o promieniu

$$r = \frac{v_\perp E/c^2}{qB}, \tag{2}$$

gdzie $v_\perp = v \sin\alpha$ jest prostopadłą do $\vec{B}$ składową prędkości.

Z analizy różnych możliwych torów protonu wynika, że aby proton nie wpadł do wewnętrznej rury, musi być

$$2r \leq R_2 - R_1, \tag{3}$$

przy czym najostrzejsze ograniczenie r od góry jest konieczne, gdy protony padają na zewnętrzną rurę stycznie i ze zwrotem przeciwnym do prądu. Stąd

$$B = \frac{2v_\perp E/c^2}{q\left(R_2 - R_1\right)}, \tag{4}$$

$$I = \frac{2v_\perp E/c^2}{q\left(R_2 - R_1\right)} \frac{L}{\mu_0}. \tag{5}$$

Dla cząstek nierelatywistycznych $v = \sqrt{2E_k/m}$, $E \approx mc^2$, a w naszym przypadku $m = m_p$ a więc

$$B = \frac{2\sqrt{2E_k m_p}\sin\alpha}{q\left(R_2 - R_1\right)}, \tag{6}$$

$$I = \frac{2\sqrt{2E_k m_p}\sin\alpha}{q\left(R_2 - R_1\right)} \frac{L}{\mu_0}. \tag{7}$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy

$$I = 1{,}6 \cdot 10^7 \text{ A}, B = 0{,}20 \text{ T}. \tag{8}$$

Dla cząstek ultrarelatywistycznych $v \approx c$, stąd

$$B = \frac{2E\sin\alpha}{cq\left(R_2 - R_1\right)}, \tag{9}$$

$$I = \frac{2E\sin\alpha}{cq\left(R_2 - R_1\right)} \frac{L}{\mu_0}, \tag{10}$$

przy czym $E = E_k + m_p c^2$ $(\approx E_k)$. Zatem

$$I = 3{,}6 \cdot 10^8 \text{ A}, \quad B = 4{,}7 \text{ T}. \tag{11}$$

Punktacja zadania 1.

Związek pola magnetycznego z natężeniem prądu (wzór (1) lub równoważny) – 1pkt.

Promień linii śrubowej, po której porusza się cząstka (wzór (2) lub równoważny) – 1pkt.

Warunek na promień linii śrubowej, po której porusza się cząstka, (wzór (3) lub równoważny) – 2 pkt.

Pole magnetyczne i natężenie prądu w przypadku nierelatywistycznym (wzory (6) oraz (7) lub równoważne) – 2 pkt.

Pole magnetyczne i natężenie prądu w przypadku relatywistycznym (wzory (9) oraz (10) lub równoważne) – 2 pkt.

Wartości liczbowe w przypadku nierelatywistycznym (wzory (8)) – 1pkt.

Wartości liczbowe w przypadku relatywistycznym (wzory (11) – dopuszczalny błąd rzędu 10%) – 1pkt.

Rozwiązanie zadania 2.

Rura obraca się wokół krawędzi, potem odrywa od niej i spada swobodnie.

Niech β oznacza kąt, jaki w chwili oderwania tworzy płaszczyzna przechodząca przez krawędź i oś rury z pionem. Z zasady zachowania energii wynika, że prędkość kątowa ω rury w chwili oderwania spełnia związek

$$mgR\,(1-\cos\beta)=\frac{1}{2}I\omega^2, \tag{12}$$

gdzie $I=I_0+mR^2$, a I_0 dla obręczy wynosi mR^2, czyli $I=2mR^2$.

W momencie oderwania całe przyspieszenie dośrodkowe w ruchu rury wokół krawędzi pochodzi od siły grawitacji, zatem

$$\omega^2R=g\cos\beta. \tag{13}$$

Z powyższych dwóch równań możemy wyznaczyć $\cos\beta$ i ω^2

$$\cos\beta=\frac{R}{R+\frac{I}{2mR}}=\frac{1}{2}, \tag{14}$$

$$\omega^2=g\frac{1}{R+\frac{I}{2mR}}=\frac{g}{2R}. \tag{15}$$

Otrzymana wartość $\cos\beta$ oznacza, że oderwanie rury nastąpi, gdy jej środek masy obniży się o $R/2$, czyli – zgodnie z warunkiem $H\geq R$ – przed uderzeniem o podłogę.

Prędkość środka masy rury w chwili oderwania wynosi

$$v_0=R\omega=\sqrt{\frac{gR}{2}}, \tag{16}$$

a jej kierunek tworzy z poziomem kąt β. Pozioma odległość, jaką rura przebędzie w rzucie ukośnym jest równa

$$d_1=v_{0x}\frac{\sqrt{v_{0y}^2+2gh}-v_{0y}}{g}, \tag{17}$$

gdzie $v_{0x}=v_0\cos\beta=v_0/2$, $v_{0y}=v_0\sin\beta=v_0\sqrt{3}/2$, $h=H+R\,(\cos\beta-1)=H-R/2$. Zatem rura uderzy w podłoże w odległości od rzutu krawędzi równej

$$\begin{aligned}
d&=v_0\cos\beta\frac{\sqrt{v_0^2\sin^2\beta+2g\,[H+R\,(\cos\beta-1)]}-v_0\sin\beta}{g}+R\sin\beta\\
&=v_0\frac{\sqrt{3v_0^2/4+2g\,(H-R/2)}-v_0\sqrt{3}/2}{2g}+R\sqrt{3}/2\\
&=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{H}{R}-\frac{5}{16}}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)R.
\end{aligned} \tag{18}$$

Punktacja zadania 2.

Zasada zachowania energii w momencie oderwania (wzór (12)) lub związek równoważny – 1 pkt.

Warunek oderwania (wzór (13) lub równoważny) – 2 pkt.

Kąt oderwania w rozpatrywanym przypadku (wzór (14) lub równoważny) – 1 pkt.

Prędkość początkowa w rzucie ukośnym (wzór (16) lub równoważny) – 1 pkt.

Przebyta odległość w rzucie ukośnym (wzór (17) lub równoważny) – 2 pkt.

Wynik końcowy (wzór (18) lub równoważny) – 3 pkt.

Rozwiązanie zadania 3.

a) Początkowa objętość pary wraz z cieczą wynosi

$$V_0 = \frac{n}{2}v_w + \frac{nRT_0}{2p_0} \approx \frac{nRT_0}{2p_0} \tag{19}$$

i taka sama jest objętość pary o temperaturze T_1. Rozprężanie pary zachodzi adiabatycznie, co oznacza, że zachodzi związek

$$T_1 V_0^{R/C_V} = T_2 V_2^{R/C_V}, \tag{20}$$

gdzie $V_2 = V_0 + Sl$, a T_2 jest temperaturą pary tuż przed opuszczeniem probówki przez korek.

W trakcie rozprężania para wykonuje pracę, która zgodnie z I zasadą termodynamiki jest równa

$$W = nC_V\left(T_1 - T_2\right). \tag{21}$$

Część tej pracy, równa Slp_0, jest zużywana na pokonanie ciśnienia powietrza, a pozostała część nadaje korkowi prędkość. Zatem

$$mgh = nC_V\left(T_1 - T_2\right) - Slp_0, \tag{22}$$

gdzie h jest szukaną wysokością. Stąd

$$h = \frac{nC_VT_1\left[1 - \left(\frac{V_0}{V_0+Sl}\right)^{R/C_V}\right] - Slp_0}{mg} \tag{23}$$

$$= \frac{nC_VT_1\left[1 - \left(1 + \frac{2p_0Sl}{nRT_0}\right)^{-R/C_V}\right] - Slp_0}{mg}. \tag{24}$$

b) Ciepło dostarczone do zawartości kolby jest równe zmianie energii wewnętrznej tej zawartości. Ta zmiana energii wewnętrznej jest równa sumie zmiany energii wewnętrznej H_2O przy odparowaniu w stałej temperaturze T_0 oraz różnicy energii pary w temperaturze T_1 i T_0:

$$Q = nq_0/2 + nC_V\left(T_1 - T_0\right). \tag{25}$$

Zauważmy, że podana wielkość q_0 nie jest ciepłem parowania wody w temperaturze T_0, gdyż ponieważ parowanie w ustalonej temperaturze musi zachodzić przy stałym ciśnieniu, ciepło parowania uwzględnia jeszcze pracę niezbędną do "rozepchnięcia" otoczenia.

Zatem szukana sprawność wynosi

$$\eta = \frac{mgh}{Q} = \frac{nC_VT_1\left[1 - \left(1 + \frac{2p_0Sl}{nRT_0}\right)^{-R/C_V}\right] - Slp_0}{nq_0/2 + nC_V\left(T_1 - T_0\right)}. \tag{26}$$

Wartości liczbowe wynoszą

$$h \approx 9 \text{ m}, \; \eta \approx 0{,}04. \tag{27}$$

Punktacja zadania 3.

Objętość wnętrza zatkanej kolby (wzór (19) lub równoważny) – 1 pkt.

Związek między T_1, V_0 a T_2, V_2 (wzór (20) lub równoważny) – 1 pkt.

Praca wykonana przez parę (wzór (21) lub równoważny) – 1 pkt.

Warunek pozwalający wyznaczyć wysokość (wzór (22) lub równoważny) – 1 pkt.

Szukana wysokość (wzór (24) lub równoważny) – 2 pkt.

Ciepło dostarczone do kolby (wzór (25)) – 2 pkt.

Sprawność (wzór (26) lub równoważny) – 1 pkt.

Wartości liczbowe (wzory (27)) – 1 pkt.