

Zgodnie z prawem Hooke'a idealnie sprężysty pręt o długości L i polu przekroju poprzecznego S pod wpływem przyłożonej wzdłuż jego osi siły F zmienia swoją długość o $\Delta L = L \cdot F / (S \cdot E)$, gdzie współczynnik E nazywa się modułem Younga. Mając do dyspozycji

- włos,
- 2 szklane płytki,
- soczewkę sferyczną,
- linijkę,
- 2 wkłady ołówkowe (każdy o średnicy $0,50 \pm 0,05$ mm),
- 6 monet jednozłotowych (każda o masie $5,00 \pm 0,05$ g),
- statyw,
- taśmę klejącą,
- papier milimetrowy,

wyznacz moduł Younga otrzymanego włosa. Przyjmij, że włos jest jednorodny i ma kołowy przekrój, a przyspieszenie ziemskie wynosi $g = 9.81$ m/s².

Rozwiązanie:

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch części. W części pierwszej należy wyznaczyć średnicę włosa poprzez porównanie jej ze znaną średnicą wkładu ołówkowego. Natomiast w części drugiej należy zbadać wydłużenie się włosa pod wpływem przyłożonej siły, której źródłem był ciężar dostępnych monet, oraz wyznaczyć moduł Younga włosa.

Część teoretyczna

1. Wyznaczenie średnicy włosa

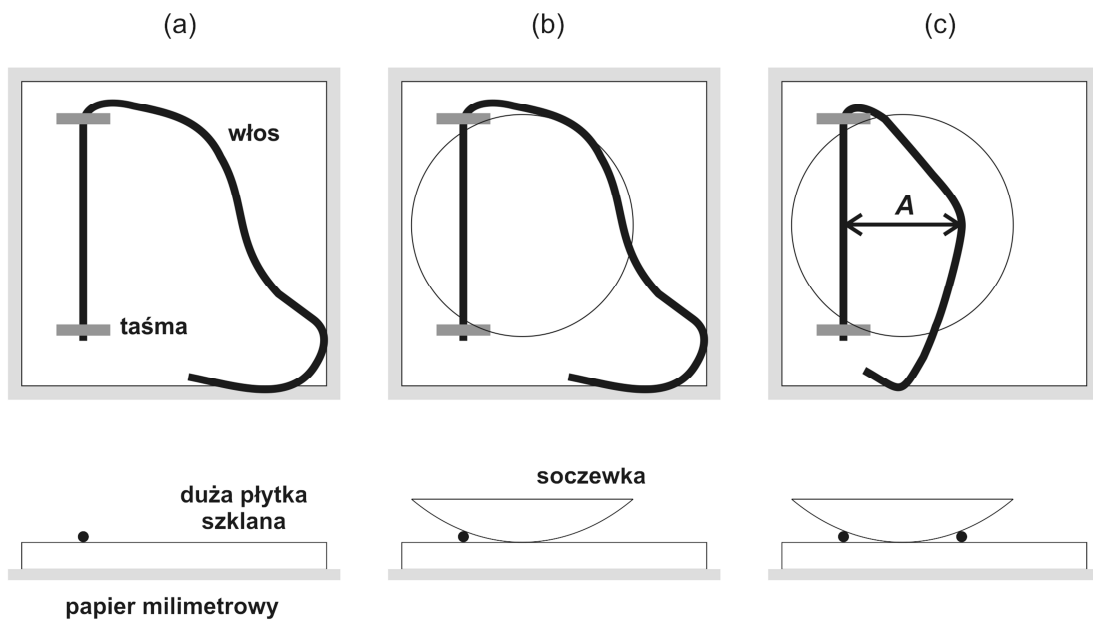
Na dużej płytce szklanej należy położyć soczewkę stroną wypukłą w dół, dosunąć do niej dwa odcinki włosa z przeciwnych stron, tak aby się z nią stykał (rys. 1c dolny) i zmierzyć odległość A między punktami styku (rys. 1c górny). Następnie należy zastąpić włos dwoma wkładami ołówkowymi i zmierzyć odległość B między ich środkami (rys. 2c górny). Zapiszmy twierdzenie Pitagorasa dla dwóch trójkątów prostokątnych przedstawionych na rys. 3

$$(P/2 + D/2)^2 = (P/2 - D/2)^2 + (A/2)^2$$

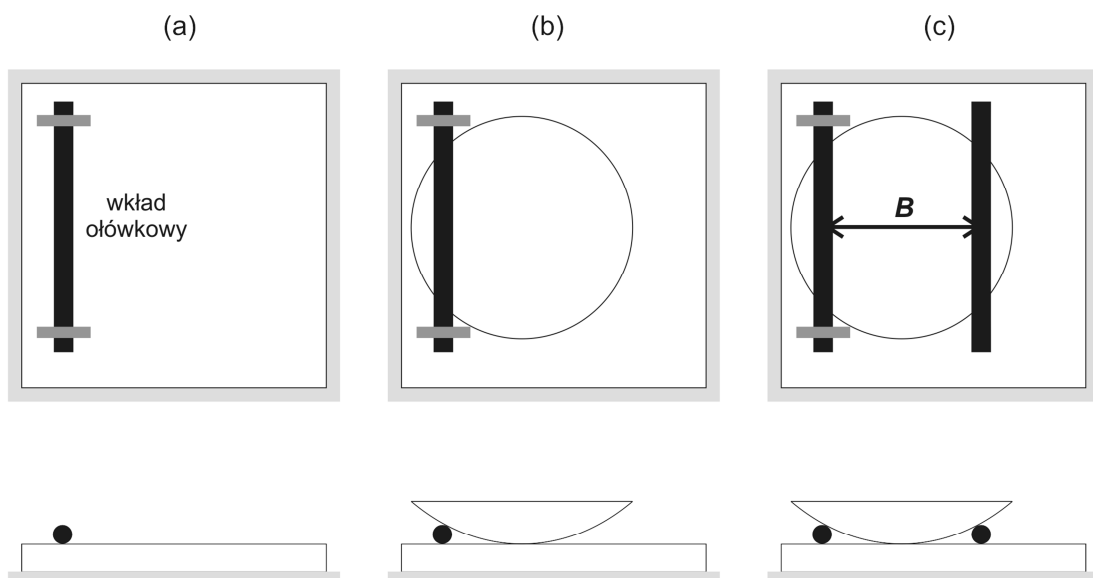
$$(P/2 + W/2)^2 = (P/2 - W/2)^2 + (B/2)^2$$

gdzie $P/2$ jest promieniem krzywizny wypukłej powierzchni soczewki, D – średnicą włosa, a W – średnicą wkładów ołówkowych. Na podstawie powyższych równań wyznaczamy:

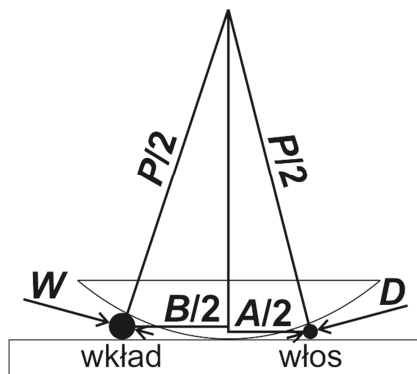
$$D = W \cdot (A/B)^2 \quad (1)$$



Rys. 1. Widok z góry i z boku układ zestawiony w celu wyznaczenia wielkości A niezbędnej do obliczenia średnicy włosa.



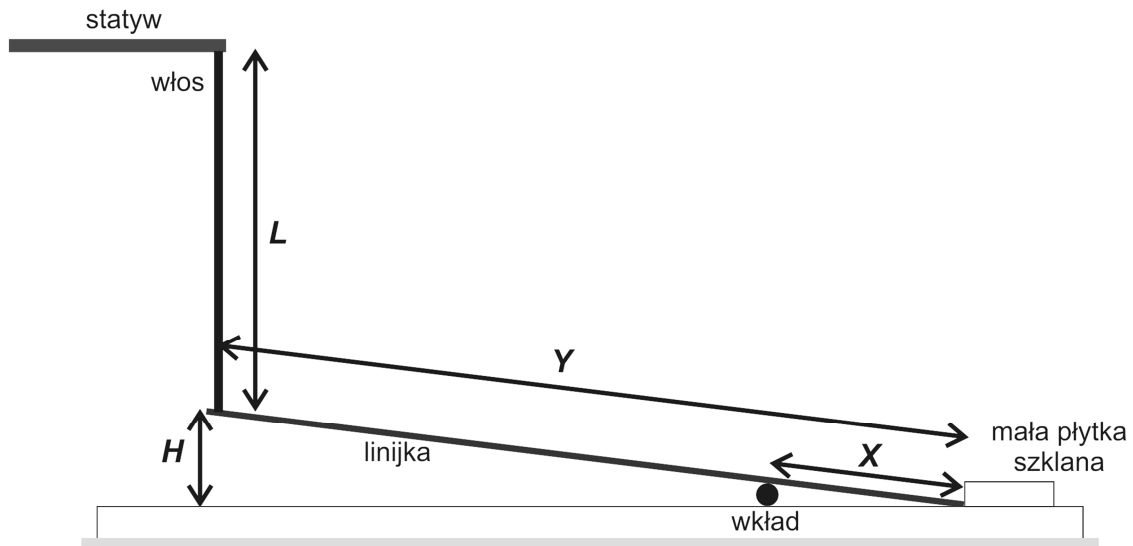
Rys. 2. Widok z góry i z boku układ zestawiony w celu wyznaczenia wielkości B niezbędnej do obliczenia średnicy włosa.



Rys. 3. Idea wyznaczenia średnicy włosa D na podstawie znanych wielkości A , B , i W .

2. Zbadanie wydłużania się włosa i wyznaczenie modułu Younga

Jeden koniec włosa należy zamocować na statywie, a drugi koniec przymocować do linijki będącej w pozycji nieznacznie nachylonej do poziomu. Należy zmierzyć długość włosa między punktami zamocowania L (rys. 4). Następnie obciąża się linijkę monetami jednozłotowymi. Aby zmierzyć wydłużenie włosa, między linijką a podłożem umieszcza się wkład ołówkowy i dosuwa go do linijki,



Rys. 4. Widok z boku układu zestawionego w celu wyznaczenia wydłużania się włosa pod wpływem przyłożonej siły.

a następnie mierzy odległość X (rys. 4). Pomiar ten wykonuje się najpierw przy linijce nieobciążonej, a następnie przy linijce obciążonej różną liczbą monet. Wysokość H końca linijki nad podłożem można wyznaczyć z proporcji

$$H = Y \cdot W / X \quad (2)$$

Oznaczmy przez H_0 tę wysokość dla linijki nieobciążonej. Wtedy różnica $H_0 - H$ jest wydłużeniem włosa ΔL , które podstawiamy do prawa Hooke'a

$$\Delta L = L \cdot F / (S \cdot E)$$

i znajdujemy moduł Younga E .

Część doświadczalna

1. Wyznaczenie średnicy włosa

Taśmą klejącą przymocowano włos do dużej płytki szklanej w sposób przedstawiony na rys. 1(a), uprzednio umieściwszy arkusz papieru milimetrowego pod szklaną płytką. Należy zadbać, aby włos był napięty pomiędzy dwoma kawałkami taśmy. Dosunięto soczewkę do włosa, a z drugiej strony przysunięto do soczewki pozostałą część włosa lekko ją napinając. Soczewka nie powinna przy tym zostać podniesiona do góry. Obserwując położenie obu kawałków włosa na tle papieru milimetrowego wyznaczono odległość A . Czynności przysuwania soczewki do włosa i napinania luźnego końca włosa powtarzano dziesięciokrotnie i ostatecznie uzyskano uśredniony wynik $A = 5,3 \pm 0,3$ mm. Następnie wykonano ten sam pomiar z dwoma wkładami ołówkowymi. Należy przy tym zadbać, aby wkłady były ułożone równolegle oraz aby soczewka nie była przechylona w stronę któregośkolwiek ze wkładów. Obserwując położenie wkładów na tle papieru milimetrowego wyznaczono uśrednioną z dziesięciu pomiarów odległość $B = 15,1 \pm 0,2$ mm. Podstawiając A i B do wzoru (1) otrzymano $D = 62 \pm 9$ μm .

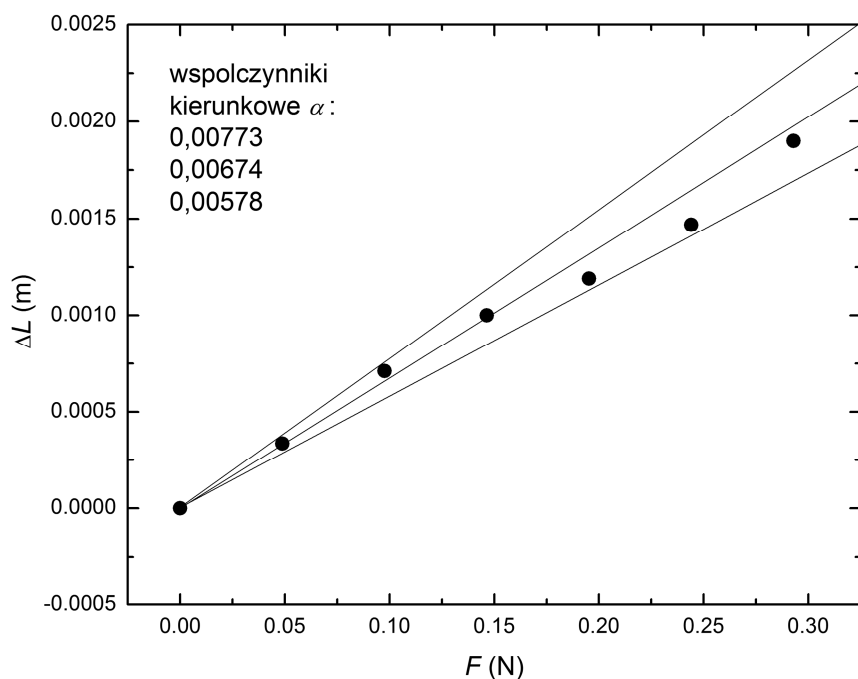
2. Zbadanie wydłużania się włosa i wyznaczenie modułu Younga

Włos przyklejono taśmą do statywu i jednego z końców linijki w taki sposób, aby długość włosa pomiędzy punktami przymocowania wynosiła około 10 cm. Następnie drugi koniec linijki oparto w narożniku utworzonym przez dużą i małą płytkę szklaną (Rys. 4), przy czym tę ostatnią przyklejono do dużej płytki taśmą. W celu uniknięcia odsuwania się linijki od narożnika, połączono linijkę z małą płytką za pomocą taśmy klejącej. Wysokość statywu dobrano tak, aby koniec linijki, do którego przyklejony jest włos, znajdował się kilka milimetrów nad dużą płytką. Gdy upewniono się, że włos zwisał pionowo, zmierzono (za pomocą papieru milimetrowego) długość włosa pomiędzy punktami przymocowania $L = 15,5 \pm 0,3$ cm. Niepewność tego pomiaru przyjęto za większą niż podziałka papieru milimetrowego ze względu na trudność w dokładnym przyłożeniu papieru do wiszącego włosa. Następnie pomiędzy linijkę i dużą płytkę szklaną włożono wkład ołówkowy i przesuwno go w stronę narożnika do punktu, w którym wypełnił odległość pomiędzy linijką a płytką. Przysuwając wkład do narożnika należy unikać unoszenia linijki. Odczytując położenie wkładu na podziałce linijki lub na tle papieru milimetrowego wyznaczono odległość X pomiędzy narożnikiem a wkładem, mierzoną wzdłuż linijki. Niepewność wielkości X oszacowano na 5 mm. Ze wzoru (2) otrzymano $H_0 = 3,3 \pm 0,5$ mm.

W kolejnych krokach w pobliżu punktu przymocowania włosa kładziono na linijkę monety jednoczłotowe i powtarzano pomiar odległości X (a więc wysokości H) dla różnej liczby monet. Następnie, przyjmując że przyspieszenie ziemskie wynosi $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, wykreślono zależność

$$\Delta L = H_0 - H$$

jako funkcji $F = m \cdot g$; patrz Rys. 5. Widać, że w badanym zakresie obciążeń wydłużenie włosa zmieniło się liniowo w funkcji przyłożonej siły, a więc zgodnie z prawem Hooke'a.



Rys. 5. Zależność wydłużenia włosa ΔL jako funkcji przyłożonej siły F . Proste dopasowano odręcznie i wyznaczono ich współczynniki kierunkowe.

Do danych przedstawionych na rys. 5 dopasowano odręcznie trzy proste przechodzące przez początek układu współrzędnych. Środkowa prosta ma na celu możliwie wiernie oddawać trend

zmienności ΔL jako funkcji F , podczas gdy skrajne proste mają określać zakres niepewności wyznaczonego trendu. Dla wszystkich trzech prostych wyznaczono współczynniki kierunkowe α , których wartości podano na Rys. 5. Wzór wyrażający prawo Hooke'a można przekształcić do następującej postaci

$$\Delta L = L \cdot F / (S \cdot E) = 4 \cdot L / (\pi \cdot D^2 \cdot E) \cdot F = \alpha \cdot F, \quad (3)$$

gdzie $S = \pi \cdot D^2 / 4$ i $\alpha = 4 \cdot L / (\pi \cdot D^2 \cdot E)$. Zatem trzem dopasowanym prostym można przypisać następujące wartości modułu Younga: 7,09 GPa; 8,13 GPa; 9,48 GPa. Ostatecznie pozwala to na podanie wyniku na moduł Younga $E = 8,1 \pm 1,4$ GPa.

Dyskusja:

Przeprowadzony eksperyment pokazał, że długość włosa pod wpływem przyłożonej wzdłużnie siły zmienia się liniowo, czyli zgodnie z prawem Hooke'a. Jednak wyznaczony moduł Younga obarczony jest stosunkowo dużym błędem $\sim 1,4$ GPa (błąd względny około 17%), który został oszacowany z rozrzutu punktów na Rys. 5. Masy monet – a tym samym wartości obciążeń F – znane są z bardzo dobrą dokładnością, zatem rozrzut punktów wynika przede wszystkim z niedokładności pomiaru wydłużenia ΔL , czyli położenia X wkładu grafitowego pod linijką (patrz rys. 4). Pomimo że przesuwając grafit w stronę narożnika dbano to, aby nie unosić linijki, to jednak trzeba podkreślić, że moment, w którym grafit wypełniał przestrzeń pomiędzy płytką szklaną a linijką był bardzo trudny do uchwycenia i łatwo było o zbyt głębokie lub zbyt płytkie wsunięcie grafitu.