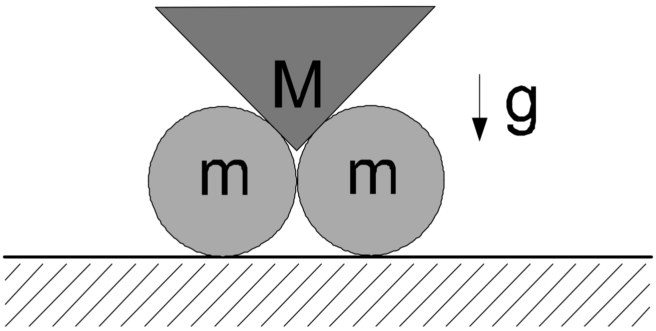
LXII OLIMPIADA FIZYCZNA

ZAWODY III STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

Zadanie 1.



Dwa identyczne walce o masie m i promieniu r każdy spoczywają na poziomej, płaskiej podłodze stykając się ze sobą. Na walcach symetrycznie położono klocek o przekroju w kształcie równoramiennego trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej o długości $4r$ i masie M. Współczynnik tarcia między klockiem a walcem wynosi f. Walce ślizgają się po stole bez tarcia. Moment bezwładności walca względem jego osi jest równy $mr^2/2$, przyspieszenie ziemskie wynosi g.

Wyznacz prędkość walców w momencie uderzenia klocka w podłogę.

Zadanie 2.

Rozważmy balon o wiotkiej i sprężystej powłoce, której energia sprężystości jest dana wzorem:

$$E_S = \frac{\kappa}{2}\left(\sqrt{S} - \sqrt{4\pi r_0^2}\right)^2,$$

gdzie κ jest stałą, S – aktualną powierzchnią powłoki balonu, $4\pi r_0^2$ – powierzchnią nienaprężonej powłoki.

Gdy ciśnienie wewnątrz balonu jest większe od ciśnienia zewnętrznego, to ma on kształt sferyczny.

Powoli pompując balon stwierdzono, że ulega on rozerwaniu, gdy nadciśnienie w jego wnętrzu przekroczy wartość $\Delta p_{\max}$.

1. Wyznacz maksymalny możliwy promień balonu $r_{\max}$.

2. Temperatura oraz ciśnienie atmosfery na wysokości h nad powierzchnią Ziemi są dane wzorami

$$T(h) = T_0 - \alpha h,$$
$$p(h) = p_0\left(1 - \frac{\alpha}{T_0}h\right)^{\frac{\mu g}{R\alpha}},$$

gdzie μ jest średnią masą molową powietrza (w przybliżeniu stałą), R – uniwersalną stałą gazową, g – przyspieszeniem ziemskim, natomiast α i T_0 – stałymi.

Napełniamy balon taką ilością helu, aby w chwili zaprzestania wznoszenia się promień balonu był równy $r_{\max}$ z punktu 1. Przy założeniu, że temperatura helu jest równa temperaturze powietrza zewnętrznego, wyznacz maksymalną osiągniętą przez balon wysokość $h_{\max}$ jako funkcję jego całkowitej masy m, promienia $r_{\max}$ oraz parametrów występujących we wzorach na $T(h)$ i $p(h)$.

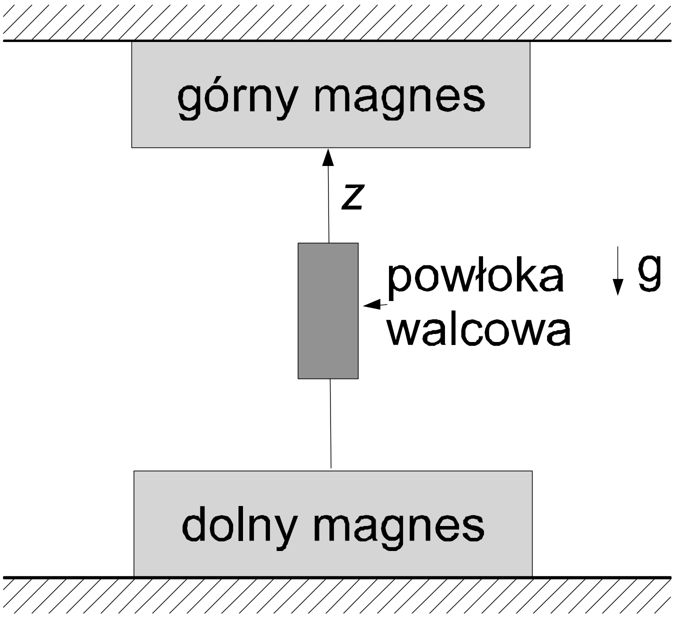
W dalszej części zadania przyjmij masę balonu $m = 0{,}5$ kg oraz $T_0 = 300$ K, $\alpha = 6{,}0\cdot 10^{-3}$ K/m, $g = 9{,}8$ m/s^2, $R = 8{,}3$ J/(mol·K) $\mu = 29\cdot 10^{-3}$ kg/mol, $p_0 = 1{,}0\cdot 10^5$ Pa, $r_0 = 0{,}5$ m, $\kappa = 2{,}0\cdot 10^4$ N/m, $\Delta p_{\max} = 8888$ Pa.

3. Wyznacz liczbową wartość $h_{\max}$ z punktu 2.

4. Czy dla podanych wartości liczbowych prawdziwe jest stwierdzenie, że maksymalna wysokość, na jaką może wznieść się balon, odpowiada jego maksymalnemu możliwemu promieniowi? A może zmniejszając ilość helu i tym samym zmniejszając całkowitą masę balonu, spowodujemy, że wzniesie się on jeszcze wyżej? Masa molowa helu wynosi $4\cdot 10^{-3}$ kg/mol. Przyjmij, że temperatura helu jest równa temperaturze powietrza zewnętrznego.

Zadanie 3 na następnej stronie.

Zadanie 3.



Dwa magnesy są umieszczone jeden nad drugim w odległości d. W punkcie odległym od dolnego magnesu o $z + d/2$ pionowa składowa indukcji pola magnetycznego magnesów jest pomiędzy nimi dana wzorem

$$B_z = B_0 \left[1 + k\left(z^2 - \rho^2/2\right)\right],$$

gdzie B_0, k są dodatnimi stałymi , ρ – odległością od osi symetrii a oś z jest skierowana do góry.

Między magnesami umieszczono pionowo powłokę walcową (rurę o cienkiej ściance) o masie m, wysokości l (gdzie $l < d$) i promieniu r. Powłoka jest naładowana jednorodnie ładunkiem $Q > 0$. Początkowo powłoka obraca się wokół swojej osi z prędkością kątową $\omega_0 > 0$ – patrząc z góry zgodnie z ruchem wskazówek zegara, a jej środek masy spoczywa w połowie odległości między magnesami.

Układ ma symetrię obrotową wokół osi z, przyspieszenie ziemskie wynosi g.

Przyjmując, że prędkość kątowa obracania się powłoki jest stała, wyznacz ruch powłoki w pionie do chwili ewentualnego uderzenia w dolny magnes.

Rozwiązanie zadania 1

Niech siła z jaką klocek naciska walec wynosi N, a siła tarcia z jaką klocek działa na walec – T. W takiej sytuacji składowe pozioma i pionowa siły, z jaką klocek działa na walec wynoszą

$$F_x = \frac{N-T}{\sqrt{2}}, \quad F_y = \frac{N+T}{\sqrt{2}}. \tag{1}$$

Zatem (poziome) przyspieszenie walca wynosi

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{N-T}{\sqrt{2}m}. \tag{2}$$

Całkowita (pionowa) siła działająca na klocek wynosi

$$F_K = Mg - 2F_y = Mg - \sqrt{2}\,(N-T)\,. \tag{3}$$

Zatem klocek porusza się w dół z przyspieszeniem

$$a_y = \frac{Mg - \sqrt{2}\,(N-T)}{M}. \tag{4}$$

Gdy klocek styka się z walcem zachodzi

$$a_x = a_y. \tag{5}$$

Przypadek występowania poślizgu walca względem klocka.

Jeśli powierzchnie walca i klocka ślizgają się względem siebie, to zachodzi

$$T = fN. \tag{6}$$

W tym przypadku możemy z równań (2), (4), (5) i (6) wyznaczyć a_x. Dostajemy

$$a_x = a_y = \frac{g}{1 + \frac{2m}{M}\frac{1+f}{1-f}} \tag{7}$$

$$N = \frac{mg\sqrt{2}}{1 - f + \frac{2m}{M}\,(1+f)}, \quad T = \frac{mgf\sqrt{2}}{1 - f + \frac{2m}{M}\,(1+f)}. \tag{8}$$

Przyspieszenie kątowe walca wynosi

$$\varepsilon = \frac{Tr}{I}, \tag{9}$$

gdzie $I = \frac{1}{2}mr^2$.

Przyspieszenie powierzchni klocka względem punktu styczności z walcem wynosi

$$a_s = \sqrt{2}a_y = \sqrt{2}a_x. \tag{10}$$

Jeśli $a_s > \varepsilon r$, to rzeczywiście mamy do czynienia z poślizgiem, co daje warunek

$$\frac{1-f}{1 - f + \frac{2m}{M}\,(1+f)} > \frac{2f}{1 - f + \frac{2m}{M}\,(1+f)}.$$

Ponieważ mianownik jest dodatni (gdyby był ujemny, siła nacisku N też byłaby ujemna), powyższe wyrażenie oznacza że poślizg występuje gdy

$$\frac{1}{3} > f. \tag{11}$$

Przypadek braku poślizgu walca o klocek.

Gdy nie ma poślizgu, to T jest wyznaczone z warunku

$$a_s = \varepsilon r, \tag{12}$$

czyli mamy do rozwiązania układ równań (2), (4), (5) oraz

$$\sqrt{2}a_x = \frac{Tr^2}{I} = 2\frac{T}{m}. \tag{13}$$

Otrzymamy

$$N = \frac{3}{2}\sqrt{2}\frac{1}{\frac{1}{m}+\frac{4}{M}}g, \quad T = \frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{1}{\frac{1}{m}+\frac{4}{M}}g \tag{14}$$

$$a_x = \frac{1}{1+\frac{4m}{M}}g = a_y \tag{15}$$

Ponieważ $\frac{T}{N} = \frac{1}{3}$, a warunkiem na brak poślizgu jest $\frac{T}{N} \leq f$, poślizg nie będzie zachodził gdy

$$\frac{1}{3} \leq f. \tag{16}$$

Droga , jaką przebędzie walec wynosi

$$h = r\left[1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \sqrt{2}r. \tag{17}$$

Taka samą drogę przebędzie w trakcie przyspieszania walec. Zatem prędkość końcowa każdego z walców będzie wynosić $v = \sqrt{2ha_x}$, czyli

$$v = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\sqrt{2}rg}{1+\frac{4m}{M}}} & \text{gdy} \quad \frac{1}{3} \leq f, \\ \sqrt{\frac{2\sqrt{2}rg}{1+\frac{2m}{M}\frac{1+f}{1-f}}} & \text{gdy} \quad \frac{1}{3} > f. \end{cases} \tag{18}$$

W przypadku braku poślizgu prędkość można też wyznaczyć z zasady zachowania energii.

Gdy nie ma poślizgu walca o klocek, prędkość kątowa walca ω spełnia warunek

$$\omega r = \sqrt{2}v_x = \sqrt{2}v_y, \tag{19}$$

gdzie v_x jest prędkością walca, a v_y – prędkością klocka.
Energia kinetyczna układu wynosi

$$E_k = 2\frac{m}{2}(v_x)^2 + 2\frac{I}{2}\omega^2 + \frac{M}{2}(v_y)^2 \tag{20}$$

$$= \left(2m+\frac{M}{2}\right)(v_x)^2. \tag{21}$$

Zmiana energii potencjalnej klocka to

$$E_p = \sqrt{2}rMg.$$

Z zasady zachowania energii

$$\left(2m+\frac{M}{2}\right)v^2 = \sqrt{2}rMg, \tag{22}$$

stąd ponownie otrzymujemy wzór

$$v = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}rMg}{4m+M}}. \tag{23}$$

Rozwiązanie zadania 2

1. Gdy zwiększamy promień balonu od r do $r + dr$, praca, jaką wykona nadciśnienie wynosi $4\pi r^2 \Delta p dr$, natomiast energia sprężysta powłoki wzrośnie o $\frac{dE_s}{dr}dr$. W stanie równowagi mamy

$$4\pi r^2 \Delta p dr = \frac{dE_s}{dr}dr, \tag{24}$$

Stąd w naszym przypadku

$$\Delta p = \kappa \frac{r - r_0}{r^2}. \tag{25}$$

Podstawiając $\Delta p = \Delta p_{\max}$, $r = r_{\max}$ i rozwiązując równanie kwadratowe otrzymamy

$$r_{\max} = \frac{\kappa - \sqrt{\kappa^2 - 4\kappa r_0 \Delta p_{\max}}}{2\Delta p_{\max}}, \tag{26}$$

gdzie wybraliśmy mniejszy pierwiastek, ponieważ w przypadku większego pierwiastka dalszy wzrost promienia powoduje spadek ciśnienia, a zatem nie jest to sytuacja opisana w treści zadania odpowiadająca rozerwaniu.

2.

Jeśli gęstość atmosfery w miejscu odpowiadającym maksymalnej wysokości wynosi ρ, to z prawa Archimedesa musi być spełniony związek

$$\frac{4\pi}{3} r_{\max}^3 \rho = m. \tag{27}$$

Ponieważ z równania stanu gazu doskonałego wynika, że $\rho = \frac{p\mu}{RT}$, to na podstawie powyższego wzoru otrzymujemy:

$$\frac{p\mu}{RT} = \frac{m}{\frac{4\pi}{3} r_{\max}^3}. \tag{28}$$

Uwzględniając wzory na $p(h)$ oraz $T(h)$ dostaniemy

$$\left(1 - \frac{\alpha}{T_0} h_{\max}\right)^{\frac{\mu g}{R\alpha} - 1} \frac{p_0 \mu}{T_0 R} = \frac{m}{\frac{4\pi}{3} r_{\max}^3}. \tag{29}$$

Stąd

$$h_{\max} = \left[1 - \left(\frac{mT_0 R}{\frac{4\pi}{3} r_{\max}^3 p_0 \mu}\right)^{\frac{1}{\frac{\mu g}{R\alpha} - 1}}\right] \frac{T_0}{\alpha} \tag{30}$$

3. Dla podanych wartości liczbowych dostajemy

$$h_{\max} = 13,0 \text{ km}, \tag{31}$$

4. Na danej wysokości (a zatem przy stałym ciśnieniu zewnętrznym p) zmiana masy wypartego powietrza przy zmianie $r \to r + dr$ (dr jest tu ujemne – wypuszczamy hel) wynosi

$$dm_{pow} = 4\pi r^2 \frac{p}{RT} \mu dr,$$

natomiast zmiana masy helu (a tym samym balonu)

$$
\begin{aligned}
dm_{He} &= d\left(\mu_{He}\frac{p+\Delta p}{RT}\frac{4}{3}\pi r^3\right) = 4\pi r^2\frac{p+\Delta p}{RT}\mu_{He}dr + \mu_{He}\frac{1}{RT}\frac{4}{3}\pi r^3 d\left(\Delta p\right) \\
&= 4\pi r^2\frac{1}{RT}\mu_{He}\left(p+\Delta p+\frac{r}{3}\frac{d\left(\Delta p\right)}{dr}\right)dr.
\end{aligned}
$$

Hel opłaca się wypuścić z balonu tylko, jeśli związany z tym spadek siły wyporu jest mniejszy, niż spadek ciężaru helu, czyli gdy $dm_{He}/dm_{pow} > 1$. Zgodnie z powyższymi wzorami mamy

$$
\begin{aligned}
\frac{dm_{He}}{dm_{pow}} &= \frac{\mu_{He}}{\mu}\left(1+\frac{\Delta p}{p}+\frac{r}{3p}\frac{d\left(\Delta p\right)}{dr}\right) \\
&= \frac{\mu_{He}}{\mu}\left(1+\kappa\frac{\frac{2}{r}-\frac{r_0}{r^2}}{3p}\right),
\end{aligned}
$$

gdzie uwzględniliśmy wzór (25).

Ponieważ na wysokości 13 km ciśnienie wynosi ok $2\cdot10^4$ Pa, a $\frac{dm_{He}}{dm_{pow}} = \frac{\mu_{He}}{\mu}\left(1+\kappa\frac{\frac{2}{r}-\frac{r_0}{r^2}}{3p}\right) \approx 0,2 < 1$ więc maksymalna wysokość na jaką wzniesie się balon odpowiada promieniowi balonu równemu $r_{\max}$, czyli stwierdzenie jest prawdziwe.

Rozwiązanie zadania 3

Rozważmy walec o promieniu ρ, którego dolna podstawa jest w odległości $d/2+z$ od dolnego magnesu, a górna – w odległości $d/2+z+dz$ od dolnego magnesu (dz jest infinitezymalnie małe), Całkowity strumień indukcji pola magnetycznego wchodzący z walca jest sumą strumieni przechodzących przez dolną podstawę, górną podstawę oraz przez powierzchnię boczną

$$
\begin{aligned}
\Phi = &-\left[\pi\rho^2 B_0 k z^2 + B_0 F\left(\rho\right)\right] + \\
&+\left[\pi\rho^2 B_0 k\left(z+dz\right)^2 + B_0 F\left(\rho\right)\right] + \\
&+ 2\pi\rho dz B_\rho(\rho,z),
\end{aligned}
\tag{32}
$$

gdzie $F\left(\rho\right)$ jest pewną funkcją zależną tylko od ρ (wynikającą ze składników $B_0\left[1-k\rho^2/2\right]$ we wzorze na B_z, natomiast $B_\rho(\rho,z)$ jest szukaną, prostopadłą do powierzchni bocznej walca, składową $\vec{B}$.

Indukcja pola magnetycznego jest polem bezźródłowym (magnetyczne prawo Gaussa – nie istnieją monopole magnetyczne), czyli $\Phi = 0$.

Zatem otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
2\pi\rho dz B_\rho(\rho,z) &= -\pi\rho^2 k B_o\left[\left(z+dz\right)^2 - z^2\right] \\
&= -\pi\rho^2 k B_0\left[2zdz + dz^2\right]
\end{aligned}
$$

Uwzględniając, że dz może być dowolnie małe dostajemy

$$
B_\rho(\rho,z) = -B_0 k z\rho. \tag{33}
$$

Pole magnetyczne prostopadłe do rozważanej powłoki o promieniu r wynosi $B_\rho(r,z) = -B_0 kzr$ Zatem siła Lorentza, działająca na jej fragment zawarty między z a $z+dz$ wynosi

$$Q\frac{dz}{l}\omega_0 r B_\rho(r,z) = -Q\frac{dz}{l}\omega_0 r^2 B_0 k z, \tag{34}$$

gdzie $Q\frac{dz}{l}$ jest ładunkiem rozważanego fragmentu, $\omega_0 r$ – poziomą prędkością przesuwania się jego powierzchni. Siła ta ma zwrot do dołu jeśli $Q\omega_0 B_0 k z > 0$.

Gdy pododajemy przyczynki od wszystkich dz dostaniemy, że całkowita siła działająca na powierzchnię walcową wynosi

$$F = -Q\omega_0 r^2 B_0 k z_s, \tag{35}$$

gdzie z_s jest odległością środka powłoki walcowej od płaszczyzny $z = 0$.

Zatem równanie ruchu (pionowego) walca przyjmie postać

$$m a_z = -mg - Q\omega_0 r^2 B_0 k z_s. \tag{36}$$

Dla $Q\omega_0 r^2 B_0 k > 0$ jest to równanie oscylatora harmonicznego o częstości drgań $\Omega = \sqrt{Q\omega_0 r^2 B_0 k/m}$ wokół punktu $z_{s0} = -\frac{mg}{Q\omega_0 r^2 B_0 k}$. Ponieważ w początkowym położeniu $z_s(t=0) = 0$ środek powłoki walcowej nie porusza się, otrzymamy

$$z_s = \frac{mg}{Q\omega_0 r^2 B_0 k}\cos\sqrt{\frac{Q\omega_0 r^2 B_0 k}{m}}t - \frac{mg}{Q\omega_0 r^2 B_0 k}. \tag{37}$$

Zauważmy, że jeśli $\frac{mg}{Q\omega_0 r^2 B_0 k} > \frac{d}{4}$, to nastąpi uderzenie w dolny magnes.