

**Rozwiązanie zadania T1.**

Z zasady zachowania energii mamy  $mv^2/2 + mgy = \text{const}$ , gdzie  $v$  jest prędkością skoczka,  $m$  – jego masą. W trakcie zjazdu energia potencjalna jest zamieniana na energię kinetyczną i w chwili wybiecia pozioma składowa prędkości skoczka  $v_{0x}$  jest określona przez wysokość, z jakiej zjechał:  $mv_{0x}^2/2 = mgH$ . W trakcie wybiecia skoczek działa na podłoże pionową siłę, co powoduje wzrost jego energii kinetycznej i nadaje mu prędkość  $v_{0y}$  w górę. Ponieważ w stałym, jednorodnym polu grawitacyjnym poziome i pionowe ruchy są od siebie niezależne, prędkość  $v_{0y}$  określa wysokość, na jaką skoczek się wzniesie ponad punkt wybiecia – dla najlepszego skoczka mamy  $mv_{0y}^2/2 = mgh$ . Zatem w chwili wyskoku najlepszy zawodnik ma prędkość o składowych

$$v_{0x} = \sqrt{2gH}, \quad v_{0y} = \sqrt{2gh}. \quad (1)$$

Jego ruch w trakcie lotu jest zwykłym rzutem ukośnym (pominęliśmy opór powietrza) i jest opisany wzorami

$$x = v_{0x}t, \quad y = v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2, \quad (2)$$

czyli tor jest dany wzorem

$$y(x) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2. \quad (3)$$

Dla  $x = l$  zawodnik powinien być znowu na stoku, tzn.

$$\frac{v_{0y}}{v_{0x}}l - \frac{g}{2v_{0x}^2}l^2 = -Bl^2. \quad (4)$$

Rozwiązanie  $l = 0$  odpowiada punktowi wybiecia, zatem odległość skoku wynosi

$$\begin{aligned} l &= \frac{\frac{v_{0y}}{v_{0x}}}{\frac{g}{2v_{0x}^2} - B} = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} \frac{1}{1 - 2Bv_{0x}^2/g} \\ &= \frac{4\sqrt{Hh}}{1 - 4BH}. \end{aligned} \quad (5)$$

Zauważmy, że dla małych  $BH$  szukana długość jest równa  $4\sqrt{Hh}$ , co zgodnie z oczekiwaniami jest odległością skoku na poziomym gruncie. Dla  $4BH \rightarrow 1$  długość skoku (formalnie) dąży do nieskończoności – skoczek nigdy nie wylądzuje na rozważanej górze. Dla  $4BH > 1$  otrzymane  $l$  jest ujemne, jednak w rzeczywistości to również odpowiada nieskończonej odległości skoku.

**Punktacja zadania T1.**

Prędkość najlepszego skoczka w chwili podskoku (wzory (1)) – 2 pkt.

Wzory określające ruch skoczka w trakcie lotu (wzory (2)) – 1 pkt.

Tor lotu skoczka (wzór (3)) – 1 pkt.

Warunek określający odległość (wzór (4)) – 2 pkt.

Wynik końcowy (wzór (5)) – 2 pkt.

Dyskusja wyniku, w tym właściwa interpretacja przypadku  $4BH \geq 1$  – 2 pkt.

## Rozwiązanie zadania T2

Objęty obwodem strumień indukcji magnetycznej  $\Phi$  jest  $n$ -krotnie większy od strumienia przechodzącego przez przekrój zwojnicy, czyli równy

$$\Phi = LI = \mu_0 \pi r^2 n^2 \frac{I}{l}. \quad (6)$$

Ponieważ ten strumień jest stały, mamy  $\frac{I}{l} = \text{const} = \frac{I_1}{l_1}$ . Porównując to z danym wzorem na  $F_I$  stwierdzamy, że siła  $F_I$  jest stała w czasie ruchu ciężarka (podobnie jak siła ciężkości) i wynosi

$$F_I = \frac{\mu_0 \pi r^2}{2} \left( \frac{I_1 n}{l_1} \right)^2. \quad (7)$$

Całkowita siła działająca na ciężarek, gdy długość sprężyny wynosi  $l$  jest równa

$$F = mg - F_I - k(l - l_0). \quad (8)$$

Z warunku  $F = 0$  znajdujemy położenie równowagi

$$l_r = l_0 + \frac{1}{k}(mg - F_I). \quad (9)$$

Wprowadzając zmienną  $x = l - l_r$  odpowiadającą odchyleniu od tego położenia, otrzymamy że siła działająca na ciężarek jest równa

$$F = -kx. \quad (10)$$

Jest to siła harmoniczna, zatem ciężarek drga ruchem harmonicznym wokół przesuniętego położenia równowagi.

Początkowe (w dolnym położeniu) odchylenie od położenia równowagi wynosi  $x_1 = l_1 - l_r$ . Ponieważ ruch jest harmoniczny, odchylenie od położenia równowagi w górnym (najwyższym) położeniu jest co do wartości bezwzględnej takie samo, ale ma przeciwny znak. Zatem szukana długość sprężyny w górnym położeniu wynosi

$$l_2 = l_r - x_1 = \quad (11)$$

$$= 2l_0 + \frac{2}{k} \left[ mg - \frac{\mu_0 \pi r^2}{2} \left( \frac{I_1 n}{l_1} \right)^2 \right] - l_1, \quad (12)$$

a natężenie prądu

$$I_2 = I_1 \frac{l_2}{l_1}. \quad (13)$$

Podstawiając dane liczbowe otrzymamy

$$l_2 = 18,2 \text{ cm}, \quad I_2 = 121 \text{ A}. \quad (14)$$

## Punktacja zadania T2.

Strumień objęty rozważanym obwodem (wzór (6)) – 2 pkt.

Zauważenie, że siła  $F_I$  jest stała i wzór (7) – 2 pkt.

Położenie równowagi sprężyny (wzór (9) lub równoważny) i ustalenie, że ruch ciężarka jest harmoniczny – 1 pkt.

Długość sprężyny w górnym położeniu (wzór (12)) – 2 pkt.

Natężenie prądu w górnym położeniu (wzór (13)) – 2 pkt.

Wyniki liczbowe (wzory (14)) – 1 pkt.

### Rozwiązanie zadania T3

a) Rozważmy sytuację, w której wewnętrzne naczynie ma taką samą temperaturę jak zewnętrzne. Moc promieniowania wysyłanego przez ciało jest proporcjonalna do jego powierzchni, a ponieważ powierzchnia naczynia wewnętrznego jest  $S_w/S_z$  razy mniejsza niż powierzchnia naczynia zewnętrznego, zatem wewnętrzne naczynie wypromieniowuje moc  $PS_w/S_z$ .

Z drugiej zasady termodynamiki wynika, że gdy temperatury obu naczyń są równe, to moc promieniowania padającego na naczynie wewnętrzne musi być równa mocy promieniowania wysyłanego przez nie. W przeciwnym razie jego temperatura ulegałaby zmianie i mielibyśmy do czynienia z samoistnym różnicowaniem się temperatur ciał pozostających w kontakcie termicznym. Zatem moc promieniowania padającego na naczynie wewnętrzne wynosi  $PS_w/S_z$ .

b) Moc wypromieniowywana przez naczynie wewnętrzne o temperaturze  $T_w$  wynosi

$$P_{w1} = A \cdot S_w \cdot \sigma T_w^4.$$

Z podanego w treści zadania wzoru i z własności ciała doskonale szarego wynika, że moc pochłaniania przez naczynie wewnętrzne jest równa

$$P_{w2} = A \cdot \frac{S_w}{S_z} \cdot \sigma T_z^4 \quad S_z = A \cdot S_w \cdot \sigma T_z^4.$$

Czyli sumaryczna moc dopływająca do naczynia wewnętrznego wynosi

$$P_w = A \cdot S_w \cdot \sigma (T_z^4 - T_w^4). \quad (15)$$

Ta moc powoduje odparowywanie cieczy z szybkością  $P_w/c_p$ . Początkowo w naczyniu była masa cieczy  $m = 4\pi R_w^3 \rho / 3$ , zatem całkowity czas odparowywania wyniesie

$$t = \frac{mc_p}{P_w} = \quad (16)$$

$$= \frac{R_w \rho c_p}{3A\sigma (T_z^4 - T_w^4)}. \quad (17)$$

Podstawiając dane liczbowe i uwzględniając, że  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-11} \text{ kW}/(\text{m}^2\text{K}^4)$  otrzymamy

$$t \approx 23000 \text{ s}/A = 6,4 \text{ h}/A. \quad (18)$$

Wartość stałej  $A$  nie była podana w treści zadania. Dla  $A = 1$  (ciało doskonale czarne) otrzymalibyśmy po prostu  $t = 6,4 \text{ h}$ , ale np. dla wypolerowanego metalu o wartości  $A = 0,1$  szukany czas wzrasta do  $64 \text{ h}$ .

### Punktacja zadania T3.

- a) Uzasadnienie podanego wzoru – 3 pkt.  
b) Sumaryczna moc dopływająca do naczynia wewnętrznego (wzór (15)) wraz z wyprowadzeniem – 2 pkt.

Ogólny wzór na czas odparowania (wzór (16)) – 2 pkt.

Wynik końcowy (wzór (17)) – 2 pkt.

Wynik liczbowy (wzór (18)) – 1 pkt.

## Rozwiązanie zadania T4 (numerycznego)

### Równania ruchu

Ruch rozważanego ciała będzie się odbywał w płaszczyźnie  $xy$ , zgodnie z równaniami ruchu

$$a_x = \frac{x}{r} \frac{F(r)}{m}, \quad (19)$$

$$a_y = \frac{y}{r} \frac{F(r)}{m}, \quad (20)$$

gdzie  $a_x, a_y$  są przyspieszeniami w kierunkach odpowiednio  $x$  oraz  $y$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , natomiast  $F(r) = -kr - br^2$  – zgodnie z treścią zadania.

Wygodnie jest wprowadzić zmienne bezwymiarowe (wykorzystujemy to, że  $k$  i  $m$  są dodatnie, a  $x_0$  – niezerowe)

$$T = \sqrt{\frac{k}{m}} t, \quad X = \frac{x}{x_0}, \quad Y = \frac{y}{x_0}. \quad (21)$$

$$V_x = \frac{dX}{dT} = \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{1}{x_0} \frac{dx}{dt}, \quad V_y = \frac{dY}{dT} = \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{1}{x_0} \frac{dy}{dt}. \quad (22)$$

W nowych zmiennych równania ruchu przyjmą postać

$$\frac{dV_x}{dT} = -X - BX\sqrt{X^2 + Y^2}, \quad (23)$$

$$\frac{dX}{dT} = V_x, \quad (24)$$

$$\frac{dV_y}{dT} = -Y - BY\sqrt{X^2 + Y^2}, \quad (25)$$

$$\frac{dY}{dT} = V_y, \quad (26)$$

gdzie  $B = \frac{m}{k} b x_0$ . Widać, że zredukowaliśmy liczbę niezależnych parametrów z 3 do 1, co jest szczególnie ważne przy rozważaniu różnych możliwych sytuacji.

Do powyższych równań należy dodać warunek, że dla  $T = 0$  (czyli  $t = 0$ )

$$X = 1, \quad Y = 0, \quad (27)$$

$$V_x = 0, \quad V_y = V_{y0}, \quad (28)$$

gdzie  $V_{y0} = \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{1}{x_0} v_{y0}$ .

### Algorytm numeryczny

W celu rozwiązania numerycznego, zamieniamy  $\frac{dX}{dT} \rightarrow \frac{\Delta X}{\Delta T}$ ,  $\frac{dY}{dT} \rightarrow \frac{\Delta Y}{\Delta T}$ ,  $\frac{dV_x}{dT} \rightarrow \frac{\Delta V_x}{\Delta T}$ ,  $\frac{dV_y}{dT} \rightarrow \frac{\Delta V_y}{\Delta T}$ , gdzie  $\Delta$  odpowiada różnicy między wartością w chwili  $T_n$  oraz w chwili  $T_{n+1} = T_n + \Delta T$ , co prowadzi do układu równań różnicowych. Jest to bardzo wiele algorytmów, pozwalających na numeryczne rozwiązanie rozważanego zagadnienia. W niniejszym rozwiązaniu krok dzielimy na dwie części: najpierw wyznaczamy położenie w chwili  $T_n + \Delta T/2$ , w tym położeniu obliczamy siłę, na jej podstawie wyznaczmy prędkość w chwili  $T_n + \Delta T$ , a następnie położenie w chwili  $T_n + \Delta T$ . W efekcie dostajemy następujący układ równań rekurencyjnych, wiążący położenie ciała w chwili  $T_n$  z położeniem w chwili  $T_{n+1}$

$$X_{n+1/2} = X_n + V_{xn} \cdot \Delta T/2, \quad (29)$$

$$Y_{n+1/2} = Y_n + V_{yn} \cdot \Delta T/2, \quad (30)$$

$$R_{n+1/2} = \sqrt{X_{n+1/2}^2 + Y_{n+1/2}^2}, \quad (31)$$

$$V_{x\ n+1} = V_{x\ n} + (-X_{n+1/2} - BX R_{n+1/2}) \cdot \Delta T, \quad (32)$$

$$V_{y\ n+1} = V_{y\ n} + (-Y_{n+1/2} - BY R_{n+1/2}) \cdot \Delta T, \quad (33)$$

$$X_{n+1} = X_{n+1/2} + V_{x\ n+1} \cdot \Delta T/2, \quad (34)$$

$$Y_{n+1} = Y_{n+1/2} + V_{y\ n+1} \cdot \Delta T/2. \quad (35)$$

Algorytm odpowiadający powyższym równaniom jest znacznie efektywniejszy od algorytmu, w którym położenie i prędkość w chwili  $T_n + \Delta T$  wyznaczamy wprost na podstawie siły odpowiadającej położeniu w chwili  $T_n$ .

Do powyższego układu równań należy dodać warunek, że w chwili  $T = 0 = T_0$

$$X_0 = 1, \quad Y_0 = 0, \quad (36)$$

$$V_{x0} = 0, \quad V_{y0} = \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{1}{x_0} v_{y0}. \quad (37)$$

Powyższe równanie rekurencyjne można wykorzystać w arkuszu kalkulacyjnym. W arkuszu dostępnym na stronie [www.kgof.edu.pl](http://www.kgof.edu.pl) utworzono kolumny

n	Xn	Yn	Vx n	Vy n	Xn+1/2	Yn+1/2	Rn+1/2	Vx n+1	Vy n+1
xn	yn	t							

gdzie n jest numerem kroku (i jednocześnie numeruje wiersze), a wyrażenia w pozostałych kolumnach odpowiadają wyrażeniom pojawiającym się w rozważanych równaniach rekurencyjnych. Wartości  $X_n$   $Y_n$   $V_{x\ n}$   $V_{y\ n}$  dla n=1 są określone na podstawie wartości początkowych. Nie ma kolumn odpowiadających  $X_{n+1}$  oraz  $Y_{n+1}$ , gdyż  $X_{n+1}$  oraz  $Y_{n+1}$  to po prostu  $X_n$  oraz  $Y_n$  w następnym wierszu. Na podstawie wartości z kolumn xn oraz yn jest robiony wykres, przy czym brane są pod uwagę wiersze dla t od 0 do 100 (sekund).

Rozważane równania rekurencyjne bardzo łatwo jest również przekształcić na program komputerowy, który w pętli obliczamy następne wartości położenia i prędkości, zgodnie z następującym pseudokodem

$$X = X + Vx * dT/2$$

$$Y = Y + Vy * dT/2$$

$$R = \text{pierwiastek}(X * X + Y * Y)$$

$$Vx = Vx - (X + B * X * R) * dT$$

$$Vy = Vy - (Y + B * Y * R) * dT$$

$$X = X + Vx * dT/2$$

$$Y = Y + Vy * dT/2$$

Do powyższych poleceń wykonywanych w pętli, należy dodać przypisanie początkowych wartości zmiennym  $X$ ,  $Y$ ,  $Vx$  oraz  $Vy$ , zapisywanie wartości  $X$  i  $Y$  obliczonych w danym kroku (lub rysowanie) oraz warunek końca iteracji (chwila  $t = 100$  s, czyli  $T = \sqrt{\frac{k}{m}} 100$  s). Programy w C++ oraz w Logo działające zgodnie z powyższym algorytmem są dołączone do rozwiązania dostępnego na stronie KGOF.

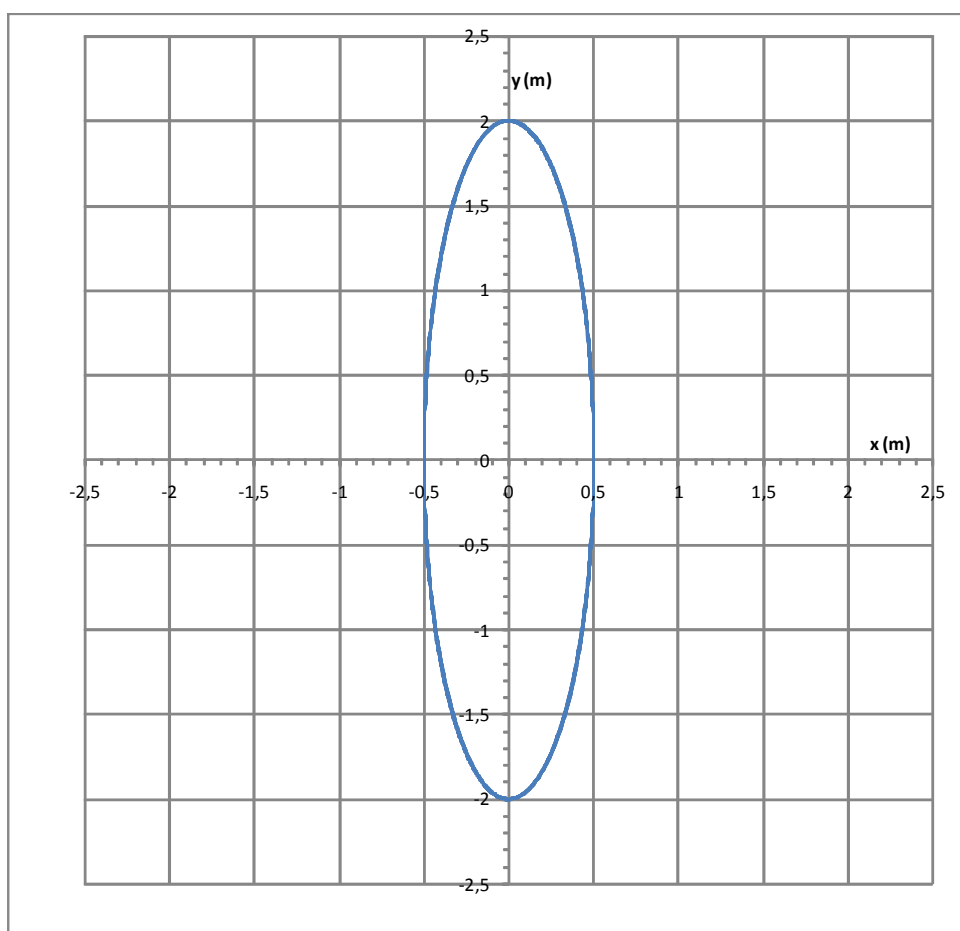
**Krok czasowy oraz sprawdzenie dokładności**

Dla każdej z podanych w treści zadania wartości parametru  $b$  wykonano wykresy dla  $dT = 0,05$  (2000 kroków) oraz  $dT = 0,025$  (4000 kroków) dla czasu  $t$  od 0 s do 100 s. Ponieważ dla danego  $b$  wykresy były wizualnie identyczne, a w szczególności końcowe położenie ciała było takie samo (w ramach dokładności odczytu położenia z wykresu) dla obu rozważanych wartości  $dT$ , uznano, że  $dT = 0,05$  gwarantuje wystarczającą dokładność.

Dodatkowo przeanalizowano przypadek  $b = 0$ . Jest to zwykły dwuwymiarowy oscylator harmoniczny, którego ruch można wyznaczyć ściśle. Wiadomo, że ciało w tym przypadku powinno poruszać się po elipsie, przy czym, biorąc pod uwagę warunki początkowe, maksymalne wychylenie w kierunku  $x$  powinno wynosić  $x_0$ , natomiast maksymalne wychylenie w kierunku  $y$ , zgodnie z zasadą zachowania energii, powinno wynosić  $\sqrt{\frac{m}{k}}v_{y0} = 2$  m. Otrzymany wykres jest w pełni zgodny z tymi wynikami teoretycznymi.

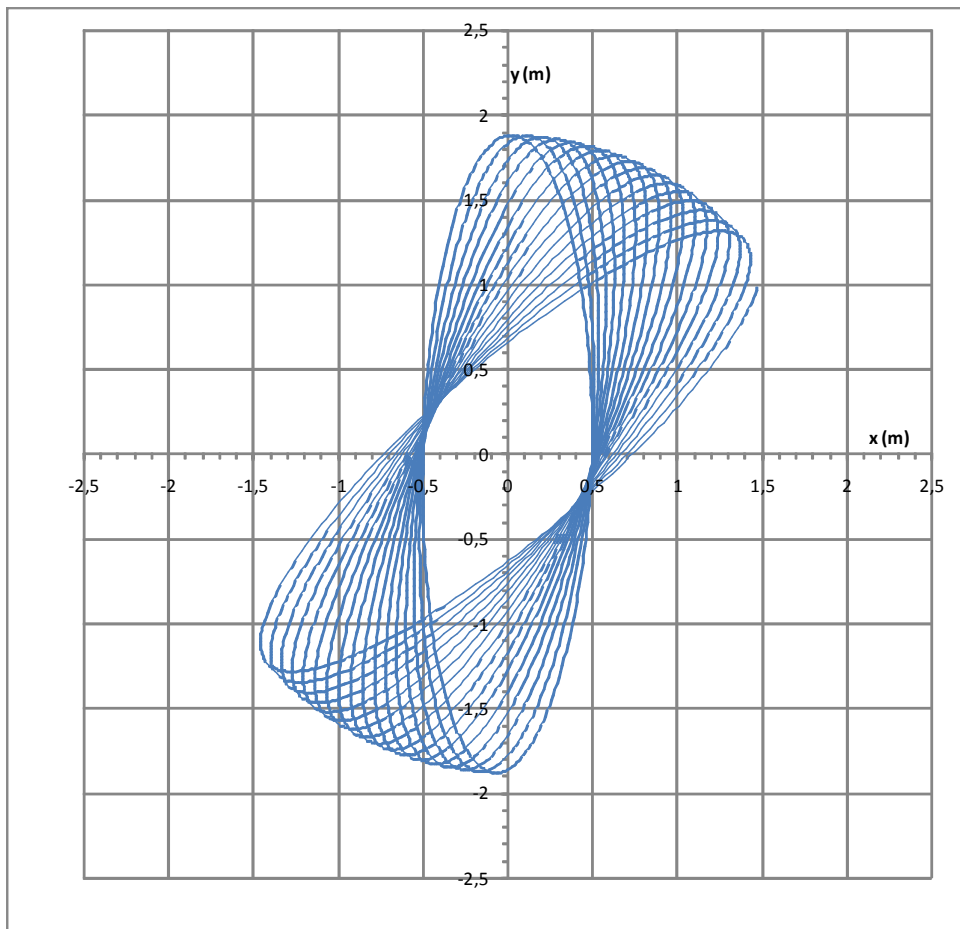
### Dyskusja otrzymanych wykresów

W przypadku  $b = 0$  zgodnie z oczekiwaniami ruch odbywa się po elipsie o krótszej półosi o długości 0,5 m i dłuższej o długości 2 m. Nie można tego ustalić na podstawie wykresu, jednak z warunków początkowych wynika, że ciało porusza się po tej elipsie przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara.



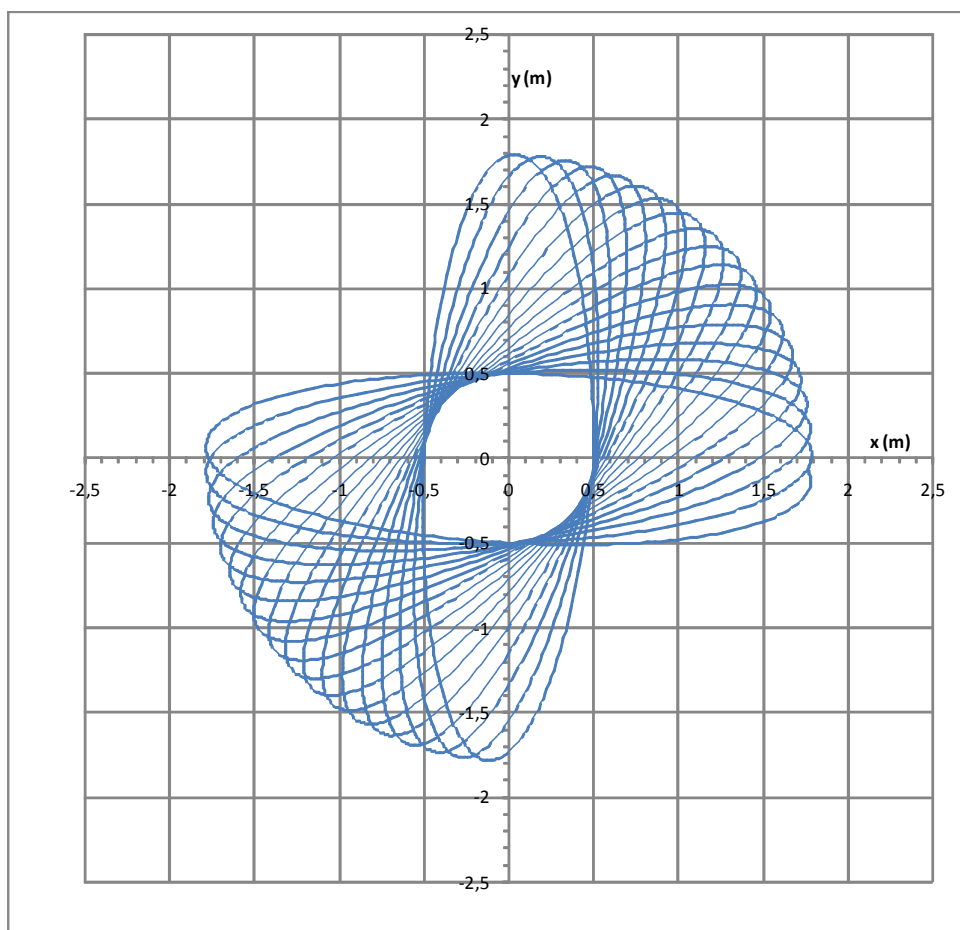
Rysunek 1. Tor ruchu ciała na sprężynce w przypadku  $b = 0$

W przypadku  $b = 0,1 \text{ N/m}^2$  maksymalne wychylenie ciała jest mniejsze niż w przypadku  $b = 0$ . Jest to oczekiwane gdyż ze wzrostem  $b$  rośnie (przy ustalonej odległości ciała od środka) siła przyciągająca ciało. Tor nie jest już krzywą zamkniętą - ruch można opisać jako złożenie ruchu po krzywej zamkniętej zbliżonej do elipsy i obrotu tej krzywej ze stałą prędkością, zwykle w takich przypadkach nazywaną prędkością precesji.



Rysunek 2. Tor ruchu ciała na sprężynce w przypadku  $b = 0,1 \text{ N/m}^2$

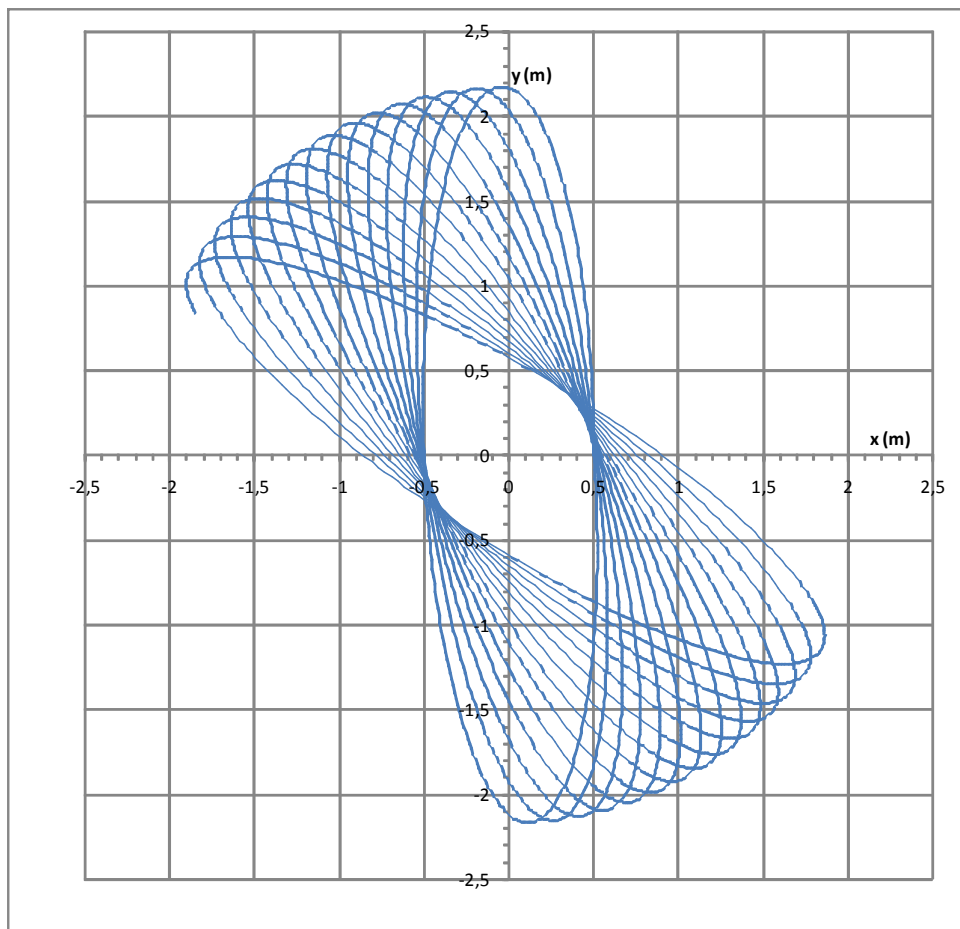
W przypadku  $b = 0,2 \text{ N/m}^2$  zgodnie z oczekiwaniami maksymalne wychylenie ciała jest mniejsze niż w przypadku  $b = 0,1 \text{ N/m}^2$ . Prędkość precesji jest w przybliżeniu dwukrotnie większa niż w poprzednim przypadku.



Rysunek 3. Tor ruchu ciała na sprężynie w przypadku  $b = 0,2 \text{ N/m}^2$

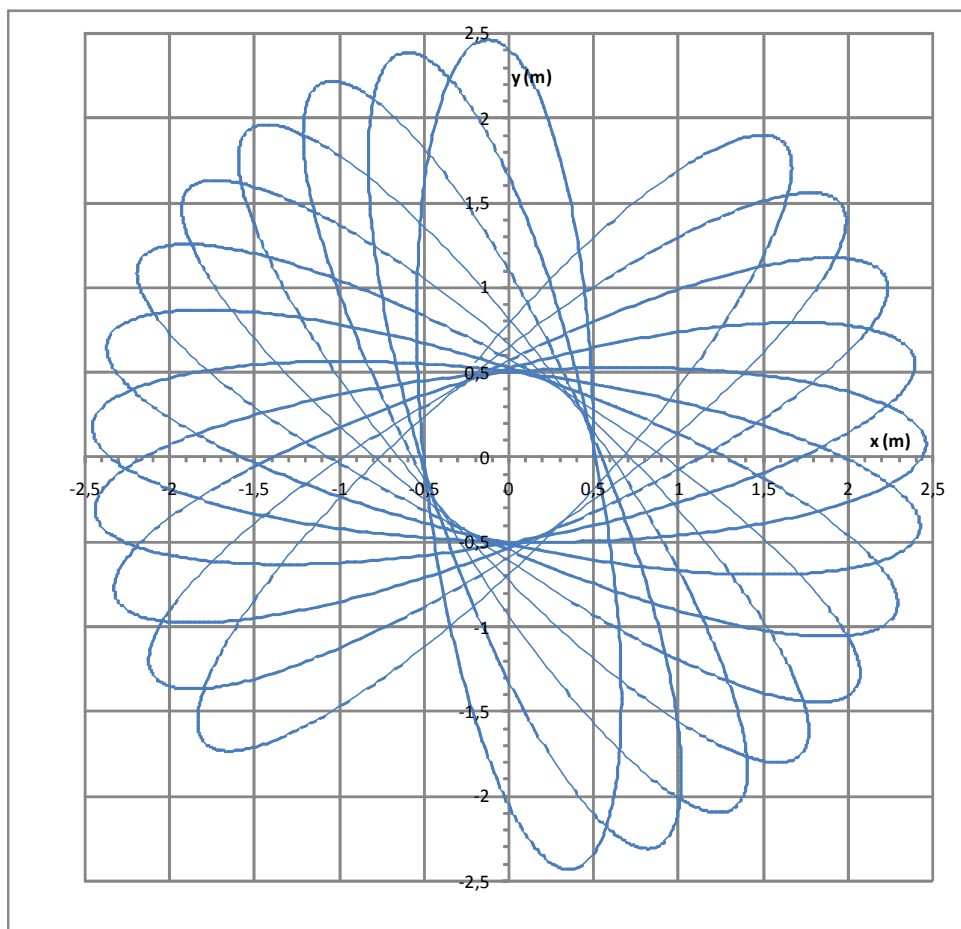


W przypadku  $b = -0,1 \text{ N/m}^2$  maksymalne wychylenie ciała jest większe niż w przypadku  $b = 0$  – przy tej samej odległości ciała od środka, siła przyciągająca ciało jest mniejsza. Precesja odbywa się w przeciwną stronę niż w przypadkach,  $b > 0$  a wartość bezwzględna jej prędkość jest zbliżona do prędkości precesji dla  $b = -0,1 \text{ N/m}^2$ .



Rysunek 4. Tor ruchu ciała na sprężynce w przypadku  $b = -0,1 \text{ N/m}^2$

W przypadku  $b = -0,2 \text{ N/m}^2$  zgodnie z oczekiwaniami maksymalne wychylenie ciała jest większe niż w przypadku  $b = -0,1$ , większa jest również wartość bezwzględna prędkości precesji. Ta wartość jest jednak znacząco większa niż w przypadku  $b = 0,2 \text{ N/m}^2$ .



Rysunek 5. Tor ruchu ciała na sprężynce w przypadku  $b = -0,2 \text{ N/m}^2$

#### Punktacja zadania T4 (numerycznego)

Równania ruchu klocka wraz z warunkami początkowymi – 1 pkt.

Układ równań różnicowych lub rekurencyjnych pozwalający na numeryczne wyznaczenie ruchu – 2 pkt.

Opis algorytmu oraz sposobu jego implementacji – 1 pkt.

Przedstawienie sposobu weryfikacji prawidłowości otrzymanych wykresów – 2 pkt.

Wykresy zgodne z przedstawionymi w rozwiązaniu wzorcowym – 3 pkt.

Dyskusja otrzymanych wyników - 1 pkt.

Uwaga: nie jest wymagane, aby rozwiązanie zawierało przejście do zmiennych bezwymiarowych.

Uwaga dla Komitetów Okręgowych:

Nie jest wymagane przedstawienie równań ruchu w postaci ((23)-(26)).