LXV OLIMPIADA FIZYCZNA

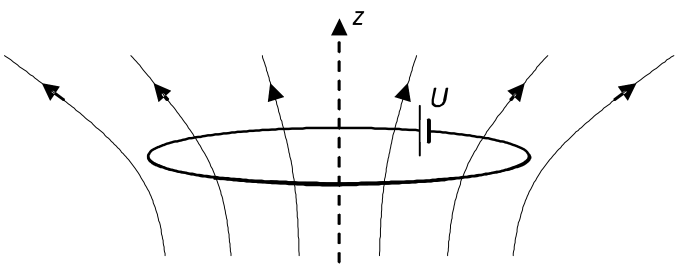
ZAWODY II STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

Zadanie 1.

Pętla z przewodnika tworząca okrąg o promieniu r leży w płaszczyźnie $z = 0$, a jej środek znajduje się w punkcie $x = 0$, $y = 0$. W pewnym miejscu pętli znajduje się bateria o sile elektromotorycznej U – patrz rysunek. Opór pętli oraz ogniwa wynosi w sumie R. Układ znajduje się w niezależnym od czasu polu magnetycznym o symetrii obrotowej wokół osi z.



Rys. 1. Pętla z przewodnika w polu magnetycznym

Gdy pętla jest nieruchoma, trzeba na nią działać siłą zewnętrzną (niezwiązaną z polem magnetycznym) $\vec{F_0} = (0,\ 0,\ F_0)$, aby ją utrzymać w podanej pozycji.

Jaka siła zewnętrzna działa na pętlę w chwili, gdy jej środek znajduje się w punkcie $(0,\ 0,\ 0)$, jeśli w tej chwili porusza się ona bez przyspieszenia z prędkością $\vec{v} = (0,\ 0,\ v)$?

Podaj wartość liczbową szukanej siły dla $F_0 = 0{,}1\,\mathrm{N}$, $U = 1\,\mathrm{V}$, $R = 1\,\Omega$, $v = 10\,\mathrm{m/s}$, $r = 0{,}1\,\mathrm{m}$.

Pomiń pole magnetyczne wytwarzane przez prąd płynący w pętli.

Zadanie 2.

W roku 4444 część ludzkości zamieszkała na specjalnie przygotowanej planetoidzie w kształcie bardzo długiego walca o promieniu R, stałej gęstości ρ i obracającego się wokół swojej osi z prędkością kątową Ω. Jednym ze sposobów podróżowania na tej planetoidzie są kapsuły poruszające się w prostoliniowych tunelach łączących dwa punkty na powierzchni, leżące w tej samej płaszczyźnie prostopadłej do osi walca. Takie kapsuły są nienapędzane, poruszają się w tunelu bez tarcia, a ich prędkość początkowa jest równa zero.

Podaj warunek, jaki muszą spełniać parametry R, ρ, Ω, aby taki sposób podróżowania był możliwy.

Przy założeniu, że powyższy warunek jest spełniony, wyznacz czas, w jakim taka kapsuła przemieści się miedzy punktami na powierzchni, których odległość mierzona wzdłuż tej powierzchni wynosi l ($l \leq \pi R$).

Podaj wartość liczbową tego czasu dla $R = 500\,\mathrm{km}$, $l = 400\,\mathrm{km}$, $\rho = 5000\,\mathrm{kg/m^3}$, $\Omega = 0{,}001\,\mathrm{s^{-1}}$. Przyjmij, że rozważane punkty znajdują się z dala od podstaw walca.

Zadanie 3.

Na 10 jednorodnych kulach o łącznej masie M i promieniu R każda, znajdujących się na poziomym stole położono płytę o masie m, a na tę płytę postawiono kolejnych 10 kul, identycznych jak poprzednie. Między kulami a płytą oraz między kulami a stołem nie występuje poślizg. Płytę zaczęto ciągnąć z siłą F skierowaną poziomo, powodując jej ruch postępowy.

Wyznacz przyspieszenie płyty.

Pomiń straty energii.

Informacje, które mogą być przydatne

Dla pola elektrycznego $\vec{E}$, pola (przyspieszenia) grawitacyjnego $\vec{\gamma}$ oraz pola magnetycznego $\vec{B}$ całkowity strumień $\Phi_{\text{całk}}$ danego pola przez powierzchnię zamkniętą jest równy

$$\Phi_{\text{całk}} = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_0} Q & \text{dla pola elektrycznego,} \\ -4\pi G \cdot M & \text{dla pola grawitacyjnego,} \\ 0 & \text{dla pola magnetycznego.} \end{cases}$$

gdzie Q jest całkowitym ładunkiem elektrycznym zawartym wewnątrz rozważanej powierzchni, M – całkowitą masą zawartą wewnątrz rozważanej powierzchni, ε_0 – przenikalnością elektryczną próżni, G – uniwersalną stałą grawitacyjną.

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N{\cdot}m^2/kg^2}$.

Moment bezwładności jednorodnej kuli o masie M i promieniu R względem osi przechodzącej przez jej środek jest równy $\frac{2}{5} M R^2$.

Rozwiązanie zadania 1.

Niech B_r będzie składową pola magnetycznego prostopadłą do przewodnika i do osi z. Gdy pętla jest nieruchoma, płynie przez nią prąd $I_0 = \frac{U}{R}$. Zatem na pętlę działa skierowana wzdłuż osi z siła elektrodynamiczna równa

$$F_{\mathrm{ED}} = -2\pi r B_r I_0. \tag{1}$$

Ta siła jest równoważona przez siłę $\vec{F_0}$, zatem B_r jest dane wzorem

$$B_r = \frac{F_0 R}{2\pi r U}. \tag{2}$$

Rozważmy walec o promieniu r oraz o małej wysokości $\mathrm{d}z$, którego oś pokrywa się z osią z natomiast dolna podstawa leży w płaszczyźnie xy. Strumień pola magnetycznego przez powierzchnię tego walca jest równy

$$\Phi_{\text{całk}} = 2\pi r B_r \mathrm{d}z + \mathrm{d}\Phi_{\mathrm{z}}, \tag{3}$$

gdzie $\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{z}}$ jest różnicą między strumieniem przechodzącym przez górną podstawę walca („wieczko") oraz strumieniem przechodzącym przez jego dolną podstawę. W powyższym wzorze, ze względu na małość $\mathrm{d}z$, przyjęliśmy, że B_r jest stałe na całej powierzchni bocznej rozważanego walca. Ponieważ całkowity strumień pola magnetycznego przechodzący przez zamkniętą powierzchnię jest równy zero (nie istnieją ładunki magnetyczne), z wzorów na B_r oraz $\Phi_{\text{całk}}$ otrzymujemy

$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{z}} = -2\pi r B_r \mathrm{d}z = -\frac{F_0 R}{U}\mathrm{d}z. \tag{4}$$

Rozważmy teraz przypadek, gdy pętla się porusza wzdłuż osi z. W tym przypadku, zgodnie z prawem Faradaya, jest indukowana dodatkowa siła elektromotoryczna

$$\mathcal{E}_{\mathrm{ind}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{z}}}{\mathrm{d}t} \tag{5}$$

$$= -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{z}}}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{z}}}{\mathrm{d}z}v. \tag{6}$$

Zatem w tym przypadku w pętli będzie płynął prąd

$$I = \frac{U + \mathcal{E}_{\mathrm{ind}}}{R} = \frac{U - \frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{z}}}{\mathrm{d}z}v}{R}. \tag{7}$$

Oznacza to, że na pętlę będzie działała siła elektrodynamiczna

$$F_{\mathrm{ED}} = -2\pi r B_r I = -2\pi r B_r \frac{U - \frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{z}}}{\mathrm{d}z}v}{R}. \tag{8}$$

Podstawiając otrzymane poprzednio wzory na B i $\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{z}}$ otrzymamy, że szukana siła jest dana wzorem

$$F = F_0\left(1 + \frac{F_0 v}{U^2}R\right). \tag{9}$$

Z powyższego widać, że jeśli $\vec{v}$ ma zwrot zgodny z $\vec{F_0}$, to siła z jaką należy działać na pętlę wzrasta, w przeciwnym przypadku – maleje.

Dla podanych wartości liczbowych otrzymujemy

$$F = 0{,}2\,\mathrm{N}. \tag{10}$$

Punktacja zadania 1.

Wyznaczenie B_r na podstawie parametrów podanych w treści zadania (wzór (2) lub równoważny) – 2 pkt.

Wykorzystanie prawa Faradaya (wzór (5) lub równoważny) – 1 pkt.

Ogólny związek siły elektromotorycznej indukcji z v (wzór (6) lub równoważny) – 2 pkt.

Związek zmiany strumienia $\mathrm{d}\Phi_z$ z prędkością (wzór (4) lub równoważny) – 2 pkt.

Ogólny wzór na szukaną siłę lub siłę elektrodynamiczną w przypadku, gdy pętla się porusza (wzór (8) lub równoważny) – 1 pkt.

Wynik końcowy (wzór (9)) – 1 pkt.

Wynik liczbowy (wzór (10)) – 1 pkt.

Rozwiązanie zadania 2.

Rozważmy walec o promieniu r ($r \leq R$) oraz długości l, współosiowy z planetoidą (przyjmujemy, że jest ona nieskończona). Z symetrii wynika, że pole (przyspieszenie) grawitacyjne g jest skierowane radialnie, prostopadle do osi planetoidy. Całkowity strumień pola grawitacyjnego przez rozważaną powierzchnię walca jest równy

$$\Phi_{\text{całk}} = \Phi_{\text{pow. boczna}} + \Phi_{\text{podstawy}}, \tag{11}$$

gdzie $\Phi_{\text{pow. boczna}}$ jest strumieniem pola grawitacyjnego przez powierzchnię boczną walca, natomiast Φ_{podstawy} jest strumieniem pola grawitacyjnego przez podstawy walca. Ponieważ pole grawitacyjne jest radialne, otrzymujemy

$$\Phi_{\text{podstawy}} = 0, \tag{12}$$

$$\Phi_{\text{pow. boczna}} = 2\pi r l g, \tag{13}$$

gdzie przyjęliśmy, że dodatni znak g oznacza pole skierowane *od* osi walca.

Ponieważ całkowita masa wewnątrz walca wynosi $\pi r^2 l \rho$, z podanego prawa otrzymujemy

$$2\pi r l g = -4\pi G \pi r^2 l \rho. \tag{14}$$

Stąd przyspieszenie grawitacyjne wewnątrz planetoidy w odległości r od jej osi, jest dane wzorem

$$g = -2\pi G \rho r. \tag{15}$$

Uwzględniając (w układzie współobracającym się z planetoidą) przyspieszenie odśrodkowe $\Omega^2 r$, stwierdzamy, że efektywne przyspieszenie grawitacyjne jest równe

$$g_{\text{ef}} = -\left(2\pi G\rho - \Omega^2\right) \cdot r. \tag{16}$$

Podróżowanie opisanym sposobem jest możliwe, jeśli powyższa wartość jest ujemna (przyciąganie grawitacyjne jest większe niż siła odśrodkowa), tzn. gdy

$$2\pi G\rho > \Omega^2. \tag{17}$$

Niech x oznacza położenie w tunelu, przy czym $x = 0$ odpowiada środkowi tunelu. Składowa przyspieszenia efektywnego wzdłuż tunelu wynosi

$$g_{\text{ef}x} = g_{\text{ef}} \cdot \frac{x}{r} = -\left(2\pi G\rho - \Omega^2\right) \cdot x. \tag{18}$$

Oznacza to, że efektywna siła działająca na kapsułę o masie m jest równa $-m\left(2\pi G\rho - \Omega^2\right) \cdot x$, więc kapsuła porusza się ruchem harmonicznym. Czas, w jakim ona pokonuje tunel, jest połową okresu drgań, zatem jest dany wzorem

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{(2\pi G\rho - \Omega^2)}}. \tag{19}$$

Ten czas nie zależy ani od odległości l, ani od R.

Podstawiając wartości liczbowe otrzymujemy

$$t \approx 3000\ \mathrm{s} = 50\ \mathrm{minut}. \tag{20}$$

Punktacja zadania 2.

Zauważenie, że pole grawitacyjne jest skierowne radialnie – 1 pkt.

Strumienie pola grawitacyjnego przez podstawy oraz przez powierzchnię boczną walca o promieniu r (wzory (12)-(13)) – 2 pkt.

Pole grawitacyjne w odległości r od osi planetoidy (wzór (15)) – 1 pkt.

Efektywne pole grawitacyjne uwzględniające przyspieszenie odśrodkowe (wzór (16)) – 1 pkt.

Warunek, przy spełnieniu którego opisany sposób podróżowania jest możliwy (wzór (17)) – 1 pkt.

Składowa przyspieszenia efektywnego wzdłuż tunelu (wzór (18)) – 1 pkt.

Szukany czas (wzór (19)) – 2 pkt.

Wartość liczbowa szukanego czasu (wzór (20)) – 1 pkt.

Rozwiązanie zadania 3.

Niech łączna pozioma siła, z jaką płyta działa na dolne kule wynosi F_d, a pozioma siła z jaką działa na górne – F_g.

Przyspieszenie kątowe dolnych kul wynosi

$$\varepsilon_\mathrm{d} = \frac{F_\mathrm{d} \cdot 2R}{\left(1+\frac{2}{5}\right) MR^2}, \tag{21}$$

gdzie $\left(1+\frac{2}{5}\right)\frac{M}{10}R^2$ jest momentem bezwładności pojedynczej kuli względem chwilowej osi obrotu.

Przyspieszenie liniowe górnych kul wynosi

$$a_\mathrm{g} = \frac{F_\mathrm{g}}{M}, \tag{22}$$

natomiast ich przyspieszenie kątowe

$$\varepsilon_\mathrm{g} = \frac{F_\mathrm{g} \cdot R}{\frac{2}{5}MR^2}. \tag{23}$$

Przyspieszenie płyty wynosi

$$a = \frac{F - F_\mathrm{d} - F_\mathrm{g}}{m}. \tag{24}$$

Ponieważ nie ma poślizgu, mamy

$$a = 2R\varepsilon_\mathrm{d}, \tag{25}$$

$$a = a_\mathrm{g} + \varepsilon_\mathrm{g} R. \tag{26}$$

Rozwiązując otrzymany układ równań dostajemy

$$a = \frac{F}{m + \frac{89}{140}M}. \tag{27}$$

Punktacja zadania 3.

Przyspieszenie kątowe dolnych kul (wzór (21)) – 2 pkt.

Przyspieszenie liniowe górnych kul (wzór (22)) – 1 pkt.

Przyspieszenie kątowe górnych kul (wzór (23)) – 2 pkt.

Ogólny wzór na przyspieszenie płyty (wzór (24)) – 1 pkt.

Związki między przy przyspieszeniami (wzory (25) - (26)) – 2 pkt.

Wynik końcowy (wzór (27)) – 2 pkt.