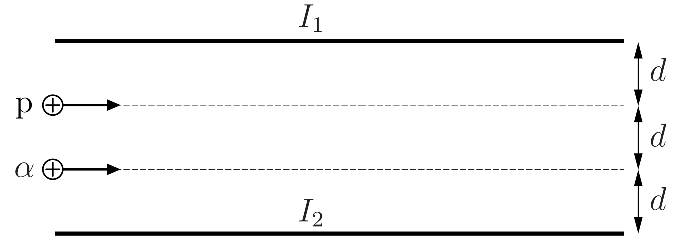
LXVII OLIMPIADA FIZYCZNA

ZAWODY II STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

Zadanie 1.



Proton p i cząstka α poruszają się w próżni z jednakową prędkością v po prostych równoległych, do których równoległe są także dwa przewodniki prostoliniowe (patrz rysunek powyżej). Obie cząstki oraz przewodniki leżą w jednej płaszczyźnie. Żadna z cząstek nie wyprzedza drugiej (jak wskazuje rysunek), a podana na rysunku odległość d jest dana.

Wyznacz natężenia prądów I_1 i I_2 płynących w przewodnikach i podaj zwroty tych prądów. Pomiń pole magnetyczne wywołane poruszaniem się protonu oraz cząstki α. Pomiń grawitację.

Podaj liczbową wartość tych prądów dla $d = 1\,\mathrm{m}$, $v = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Oznaczenia i wartości stałych liczbowych:

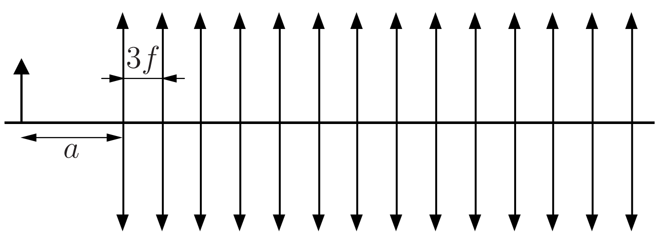
ładunek elementarny $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$,

prędkość światła $c = 3{,}00 \cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$,

przenikalność elektryczna próżni $\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$,

przenikalność magnetyczna próżni $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{A \cdot m}}$.

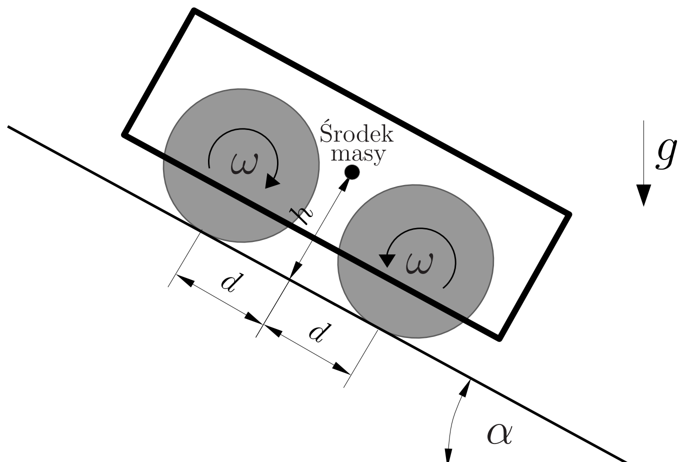
Zadanie 2.



Czternaście jednakowych cienkich soczewek skupiających o ogniskowej f ustawiono jedna za drugą w jednakowych odległościach równych $3f$. W odległości a od pierwszej soczewki znajduje się przedmiot. Gdzie znajduje się obraz i jakie jest jego powiększenie? Dla jakich wartości a jest rzeczywisty, a dla jakich – pozorny? Dla jakich wartości a jest prosty, a dla jakich – odwrócony?

Zadanie 3.

Froterka o masie m zawiera dwie walcowe szczotki o promieniu R umieszczone symetrycznie względem środka masy froterki, znajdującego się w odległości h od podłoża (zarówno m jak i położenie środka masy uwzględnia masę szczotek). Szczotki obracają się w przeciwne strony z prędkością kątową ω, o zwrotach przedstawionych na rysunku, a ich osie są równoległe i odległe od siebie o $2d$. Froterkę postawiono na nieruchomej równi pochyłej o kącie nachylenia względem poziomu α, tak że osie szczotek są poziome. Współczynnik tarcia o równię szczotki znajdującej się niżej wynosi μ_1, a szczotki znajdującej się wyżej – μ_2.



Układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym g.

W następujących przypadkach:

a) $\mu_1 = 0{,}75$; $\mu_2 = 0{,}25$; $h = d$; $\alpha = \pi/6$;

b) $\mu_1 = 0{,}25$; $\mu_2 = 0{,}75$; $h = d$; $\alpha = \pi/6$;

c) $\mu_1 = 0{,}9$; $\mu_2 = 0{,}1$; $h = d$; $\alpha = \pi/6$;

wyznacz prędkość froterki w zależności od czasu t, jaki upłynął od postawienia jej na równi.

Rozwiązanie zadania 1.

Zgodnie z prawem Ampère'a indukcja magnetyczna wzdłuż torów protonu i cząstki α wynosi odpowiednio

$$B_{\mathrm{p}} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I_1}{d} - \frac{I_2}{2d}\right), \quad B_\alpha = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I_1}{2d} - \frac{I_2}{d}\right), \tag{1}$$

gdzie dodatnia wartość natężeń prądów oznacza zwrot w lewo, a dodatnia wartość B – zwrot przed płaszczyznę rysunku.

Ponieważ ładunek protonu jest równy e, ładunek cząstki α to $2e$, a wektory prędkości cząstek są prostopadłe do pola magnetycznego, więc siła Lorentza działająca na proton i cząstkę α jest równa odpowiednio

$$F_{\mathrm{pL}} = evB_{\mathrm{p}} = ev\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I_1}{d} - \frac{I_2}{2d}\right), \tag{2}$$

$$F_{\alpha\mathrm{L}} = 2evB_\alpha = 2ev\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I_1}{2d} - \frac{I_2}{d}\right). \tag{3}$$

Zgodnie z regułą korkociągu siły te są skierowane „pionowo”, a przy dodatnich wartościach powyższych wyrażeń ich zwrot jest „w dół”.

Prócz siły Lorentza na każdą z cząstek działa pochodząca od oddziaływania elektrostatycznego z sąsiednią cząstką siła Coulomba o wartości

$$F_{\mathrm{El}} = \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}. \tag{4}$$

W przypadku protonu siła ta jest skierowana „w górę”, a w przypadku cząstki α – „w dół”.

Ponieważ obie cząstki poruszają się ruchem jednostajnym, więc siły działające na każdą z nich się równoważą. W przypadku protonu to oznacza, że

$$\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} - ev\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I_1}{d} - \frac{I_2}{2d}\right) = 0, \tag{5}$$

natomiast w przypadku cząstki α analogiczny związek ma postać

$$-\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} - 2ev\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I_1}{2d} - \frac{I_2}{d}\right) = 0. \tag{6}$$

Rozwiązując ten układ równań, otrzymujemy

$$I_1 = \frac{5e}{3v\mu_0\varepsilon_0 d} = \frac{5ec^2}{3vd}, \tag{7}$$

$$I_2 = \frac{4e}{3v\mu_0\varepsilon_0 d} = \frac{4ec^2}{3vd}. \tag{8}$$

Podstawiając wartości liczbowe, mamy

$$I_1 = 0{,}024\,\mathrm{A},\ I_2 = 0{,}019\,\mathrm{A}. \tag{9}$$

Punktacja zadania T1

Indukcja pola magnetycznego na prostych, po których poruszają się cząstki (wzory (1) wraz z określeniem kierunku i zwrotu – lub wzory równoważne) – 1 pkt.

Siła Lorentza działająca na cząstki (wzory (2), (3) wraz z określeniem kierunku i zwrotu – lub wzory równoważne) – 2 pkt.

Siła Coulomba działająca na cząstki (wzór (4) wraz z określeniem kierunku i zwrotu w każdym przypadku – lub wzory równoważne) – 2 pkt.

Warunki równoważenia się sił (wzory (5), (6) lub wzory równoważne) – 2 pkt.

Szukane natężenia prądów (wzory (7) i (8) wraz z określeniem zwrotu) – 2 pkt.

Wartości liczbowe natężeń prądów (wzory (9)) – 1 pkt.

Rozwiązanie zadania 2.

W niniejszym rozwiązaniu – zgodnie ze standardową notacją dla soczewek – przez x_i, y_i oznaczamy odpowiednio odległość przedmiotu lub obrazu od i-tej soczewki, a przez p_i – jej powiększenie.

Pierwsza soczewka: obraz leży w odległości y_1 od soczewki (jeśli $y_1 > 0$, to po jej prawej stronie),

$$\frac{1}{y_1} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a}, \tag{10}$$

$$y_1 = \frac{af}{a-f}. \tag{11}$$

Powiększenie wynosi

$$p_1 = \frac{y_1}{a} = \frac{f}{a-f}. \tag{12}$$

Druga soczewka: przedmiot leży w odległości

$$x_2 = 3f - y_1 = \frac{f\,(2a-3f)}{a-f}.$$

Zauważmy, że jeśli $f < a < \frac{3}{2}f$, to $x_2 < 0$, co oznacza, że wiązka padająca na drugą soczewkę jest zbieżna („przedmiot pozorny”). Nie przeszkadza to stosować wzór soczewkowy jak zwykle, czyli

$$\frac{1}{y_2} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x_2} = \frac{a-2f}{f\,(2a-3f)}, \tag{13}$$

$$y_2 = \frac{f\,(2a-3f)}{a-2f}. \tag{14}$$

Powiększenie drugiej soczewki wynosi

$$p_2 = \frac{y_2}{x_2} = \frac{a-f}{a-2f}. \tag{15}$$

Trzecia soczewka:

$$x_3 = 3f - y_2 = \frac{f\,(a-3f)}{a-2f}, \quad \frac{1}{y_3} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x_3} = -\frac{1}{a-3f}, \tag{16}$$

$$y_3 = -(a-3f), \tag{17}$$

$$p_3 = \frac{y_3}{x_3} = -\frac{a-2f}{f}. \tag{18}$$

Zauważmy, że powiększenie układu trzech soczewek jest równe -1: $p_1p_2p_3 = -1$. Ponadto dla każdej soczewki dodatnia wartość powiększenia odpowiada dodatnim x i y, czyli odwróceniu obrazu (wygląda to na sprzeczność, ale taka jest zwyczajowa interpretacja znaków w równaniu soczewkowym). Widzimy, że zespół trzech soczewek nie odwraca obrazu ani nie zmienia jego wielkości.

Czwarta soczewka:

$$x_4 = 3f - y_3 = a, \tag{19}$$

tak jak dla pierwszej soczewki. Dalej przekształcenia powtarzają się cyklicznie z okresem 3, tzn. 14 soczewek daje taki sam obraz, jak 2 soczewki. Odległość obrazu od ostatniej soczewki jest równa

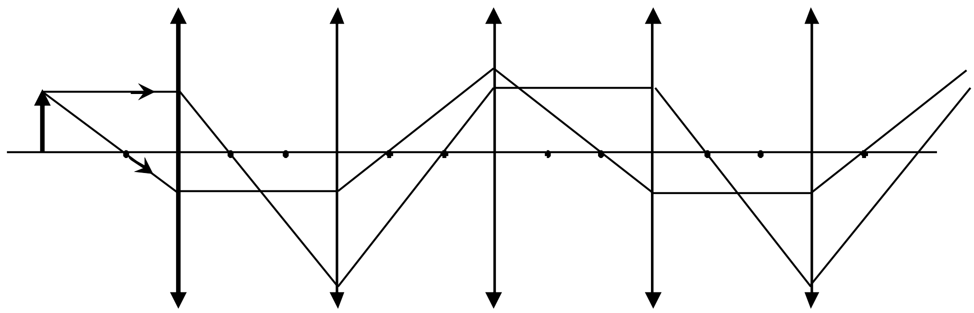
$$y_{14} = y_2 = \frac{f\,(2a-3f)}{a-2f}, \tag{20}$$

zatem obraz jest pozorny ($y_2 < 0$) wtedy, gdy spełniony jest warunek $\frac{3}{2}f < a < 2f$ i rzeczywisty w przeciwnym wypadku. Powiększenie zestawu jest równe

$$p_1p_2 = \frac{f}{a-2f}, \tag{21}$$

obraz jest więc odwrócony dla $a < 2f$ i prosty dla $a > 2f$.

Rozpatrując bieg promieni „konstrukcyjnych” można część powyższych wniosków uzasadnić graficznie – zobacz rysunek poniżej. Kropkami oznaczono ogniska soczewek.



Punktacja zadania T2

Odległość 1. obrazu od 1. soczewki (wzór (11) lub równoważny) – 1 pkt.

Powiększenie 1. soczewki (wzór (12) lub równoważny) – 1 pkt.

Odległość 2. obrazu od 2. soczewki (wzór (14) lub równoważny) – 1 pkt.

Powiększenie 2. soczewki (wzór (15) lub równoważny) – 1 pkt.

Wyznaczenie, że odległość 4. przedmiotu od 4. soczewki wynosi a – 1 pkt.

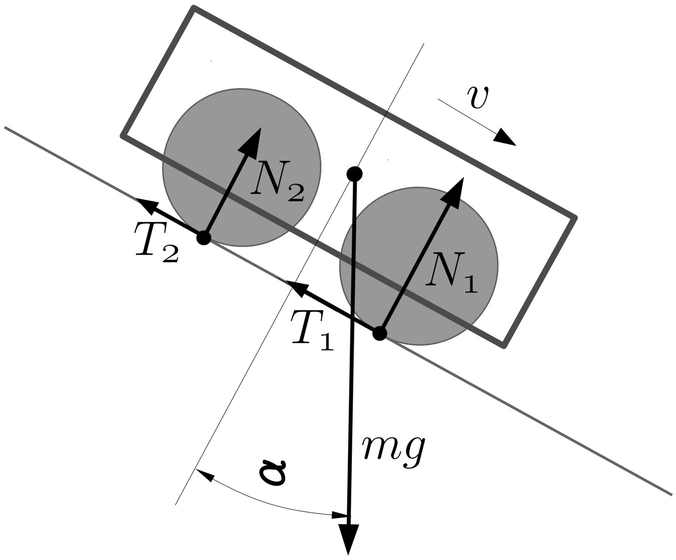
Wyznaczenie, że układ trzech soczewek nie zmienia wielkości obrazu ani go nie odwraca – 1 pkt.

Zauważenie, że działanie układu trzech kolejnych soczewek jest równoważne przesunięciu przedmiotu tak, by znajdował się w odległości a od czwartej soczewki (lub równoważna obserwacja) – 2 pkt.

Odległość obrazu od ostatniej soczewki (wzór (20) lub równoważny) oraz zauważenie, że obraz jest pozorny wtedy, gdy spełniony jest warunek $\frac{3}{2}f < a < 2f$ i rzeczywisty w przeciwnym wypadku – 1 pkt.

Powiększenie zestawu (wzór (21) lub równoważny) wraz ze stwierdzeniem, że dla $a < 2f$ obraz jest odwrócony, a prosty dla $a > 2f$ – 1 pkt.

Rozwiązanie zadania 3.



Niech N_1 oznacza siłę reakcji równi działającą na niżej położoną szczotkę, a N_2 – siłę reakcji równi działającą na szczotkę położoną wyżej. Obie siły są prostopadłe do równi. Prócz tego na układ działa siła grawitacji o wartości mg oraz styczne do równi siły tarcia: na szczotkę położoną niżej – siła T_1, a na położoną wyżej – siła T_2 (przyjmujemy, że wartości dodatnie tych sił oznaczają zwrot w górę równi). Układ się nie obraca, zatem suma momentów sił względem osi przechodzącej przez środek masy froterki jest równa zero

$$N_2 d - N_1 d + (T_1 + T_2)\, h = 0. \tag{22}$$

Ponieważ siły reakcji równi równoważą prostopadłą do niej składową siły ciężkości, tzn.

$$N_1 + N_2 = mg\cos\alpha, \tag{23}$$

wypadkowa siła działająca na froterkę wynosi

$$F = mg\sin\alpha - T_1 - T_2, \tag{24}$$

i jest skierowana wzdłuż równi (dodatnie F oznacza zwrot w dół równi, ujemne – w górę).

Niech v oznacza prędkość froterki – dodatnią, jeśli porusza się ona w dół równi, a ujemną, jeśli porusza się w górę. Przeanalizujemy, co się dzieje w zależności od wartości tej prędkości.

A: $-\omega R < v < \omega R$.

W tej sytuacji mamy

$$T_1 = \mu_1 N_1, \quad T_2 = -\mu_2 N_2 \tag{25}$$

Z równań (22), (23) i (25) otrzymujemy

$$N_1 = \frac{d - \mu_2 h}{2d - (\mu_1 + \mu_2)\, h} mg\cos\alpha, \tag{26}$$

$$N_2 = \frac{d - \mu_1 h}{2d - (\mu_1 + \mu_2)\, h} mg\cos\alpha. \tag{27}$$

Zauważmy, że dla wartości parametrów z treści zadania ($h = d$, $\mu_1 < 1$, $\mu_2 < 1$) wynika, że $N_1 > 0$, $N_2 > 0$, czyli, że obie szczotki naciskają na równię – nie odrywają się od niej.

Uwzględniając równania (24) oraz (25) otrzymujemy, że gdy $-\omega R < v < \omega R$, przyspieszenie froterki wynosi

$$a_{\mathrm{A}} = g\sin\alpha - \frac{(\mu_1 - \mu_2)\, d}{2d - (\mu_1 + \mu_2)\, h} g\cos\alpha. \tag{28}$$

W przypadkach rozważanych w treści zadania otrzymujemy:

w przypadku a): $a_{\mathrm{A}} = g\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \approx 0{,}067g$;

w przypadku b): $a_{\mathrm{A}} = g\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \approx 0{,}93g$;

w przypadku c): $a_{\mathrm{A}} = g\left(\frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{5}\right) \approx -0{,}19g$.

B1: $v > \omega R$.

Zgodnie z powyższymi wzorami na a_{A}, taka sytuacja możliwa jest tylko w przypadkach a) i b). W rozważanej sytuacji zamiast (25) mamy

$$T_1 = \mu_1 N_1, \quad T_2 = \mu_2 N_2, \tag{29}$$

i w konsekwencji

$$N_1 = \frac{d + \mu_2 h}{2d - (\mu_1 - \mu_2)\, h} mg \cos\alpha, \tag{30}$$

$$N_2 = \frac{d - \mu_1 h}{2d - (\mu_1 - \mu_2)\, h} mg \cos\alpha. \tag{31}$$

Również w tej sytuacji dla rozważanych wartości parametrów $N_1 > 0$, $N_2 > 0$.

Dla $v > \omega R$ przyspieszenie froterki wynosi

$$a_{\mathrm{B1}} = g \sin\alpha - \frac{(\mu_1 + \mu_2)\, d}{2d - (\mu_1 - \mu_2)\, h} g \cos\alpha. \tag{32}$$

Otrzymujemy

w przypadku a): $a_{\mathrm{B1}} = g\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx -0{,}077g$;

w przypadku b): $a_{\mathrm{B1}} = g\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{5}\right) \approx 0{,}15g$;

B2: $v < -\omega R$ (taka sytuacja możliwa jest tylko jeśli $a_{\mathrm{A}} < 0$, czyli w przypadku c)).

Zamiast (29) mamy

$$T_1 = -\mu_1 N_1, \quad T_2 = -\mu_2 N_2, \tag{33}$$

z czego wynika, że przyspieszenie froterki wynosi

$$a_{\mathrm{B2}} = g \sin\alpha + \frac{(\mu_1 + \mu_2)\, d}{2d + (\mu_1 - \mu_2)\, h} g \cos\alpha. \tag{34}$$

W przypadku c) otrzymujemy

$$a_{\mathrm{B2}} = g\left(\frac{1}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{28}\right) \approx 0{,}81g > 0.$$

Powyżej nie rozważaliśmy sytuacji, gdy $|v| = |\omega|\, R$. Jak się przekonamy, do celów naszej analizy wystarczy zauważyć, że wtedy przyspieszenie może przyjmować wartości od a_{A} do $a_{\mathrm{B1.}}$ (dla $a_{\mathrm{A}} > 0$), lub od a_{A} do a_{B2} (dla $a_A < 0$).

Ruch froterki jest następujący:

do osiągnięcia prędkości $|v| = |\omega|\, R$ porusza się ona z przyspieszeniem a_A, co zajmuje jej czas

$$t_{\mathrm{A}} = \frac{\omega R}{|a_{\mathrm{A}}|}. \tag{35}$$

Co dzieje się dalej, zależy od znaków a_{A} oraz a_{B1}.

Przypadek $a_\mathrm{A} > 0$ (czyli przypadki a) oraz b))

W tym przypadku prędkość froterki w chwili t_A jest równa $+\omega R$ (froterka zsuwa się w dół).

Jeśli $a_{B1} > 0$ (przypadek b)) to przyspieszenie froterki w chwili t_A jest dodatnie; prędkość nadal wzrasta i dla $t > t_A$ froterka porusza się z przyspieszeniem a_{B1}.

Jeśli $a_{B1} < 0$ (przypadek a)) to gdyby dla $t > t_A$ froterka się poruszała z prędkością $v > \omega R$, to jej przyspieszenie (równe a_{B1}) byłoby ujemne, a zatem po chwili poruszałaby się z prędkością $v = \omega R$. To oznacza, że w takim przypadku dla $t \geqslant t_A$ froterka porusza się ze stałą prędkością $v = \omega R$.

Przypadek $a_\mathrm{A} < 0$ ((czyli przypadek c)).

Jeśli $a_\mathrm{A} < 0$, to prędkość froterki w chwili t_A jest równa $-\omega R$ (froterka wjeżdża pod górę).

Gdyby dla $t > t_A$ froterka poruszała się z prędkością $v < -\omega R$, to poruszałaby się z dodatnim przyspieszeniem (równym a_{B2}), a zatem po chwili poruszałaby się z prędkością $v = -\omega R$. To oznacza, że w rozważanym przypadku dla $t \geqslant t_A$ froterka porusza się ze stałą prędkością $v = -\omega R$.

Zatem w poszczególnych przypadkach, zależność prędkości od czasu jest następująca

a)

$$v(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) gt \quad \text{dla } t \leqslant \frac{\omega R}{g\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}, \tag{36}$$

$$v(t) = \omega R \quad \text{dla } t > \frac{\omega R}{g\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}. \tag{37}$$

b)

$$v(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) gt \quad \text{dla } t \leqslant \frac{\omega R}{g\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}, \tag{38}$$

$$v(t) = \omega R + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{5}\right) g \left(t - \frac{\omega R}{g\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}\right) \quad \text{dla } t > \frac{\omega R}{g\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}. \tag{39}$$

c)

$$v(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{5}\right) gt \quad \text{dla } t \leqslant \frac{\omega R}{g\left(\frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{1}{2}\right)}, \tag{40}$$

$$v(t) = -\omega R \quad \text{dla } t > \frac{\omega R}{g\left(\frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{1}{2}\right)}. \tag{41}$$

Punktacja zadania T3

Warunek równowagi momentów sił działających na froterkę (wzór (22) lub równoważny) – 2 pkt.

Warunek równowagi sił prostopadłych do równi (wzór (23) lub równoważny) oraz siła wypadkowa (wzór (24) lub równoważny) – 1 pkt.

Wzory na siły tarcia w zależności od prędkości (wzory (25), (29) oraz (33) lub równoważne) – 1 pkt.

Przyspieszenie froterki w przypadku $-\omega R < v < \omega R$ (wzór (28) lub równoważny) – 2 pkt.

Przyspieszenie froterki w przypadkach $v > \omega R$ (wzór (32) lub równoważny) oraz $v < -\omega R$ (wzór (34) lub równoważny; nie jest potrzebne jawne podawanie tego wzoru jeśli zostanie uzasadnione, że w tym przypadku $a > 0$) – 1 pkt.

Jawne wzory (lub zawierające odniesienia do jawnych wartości przyspieszeń) na zależność prędkości od czasu (wzory (36)–(41) lub równoważne – dopuszczalne jest podanie przybliżonych wartości współczynników liczbowych) – 3 pkt (po 1 pkt za każdy z przypadków a), b), c)).