

LXVIII OLIMPIADA FIZYCZNA

ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAWODÓW I STOPNIA

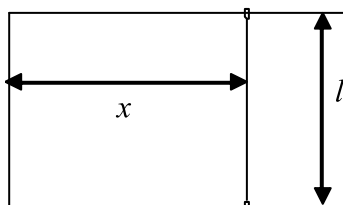
CZEŚĆ II

ZADANIA CZĘŚCI II (termin wysyłania rozwiązań — 16 listopada 2018 r.)

ZADANIA TEORETYCZNE

Należy przesłać rozwiązania trzech (i tylko trzech) dowolnie wybranych zadań teoretycznych. Za każde z trzech zadań można otrzymać maksimum 20 punktów.

Zadanie T1.



Rys. do zad. T1.

Ramka z ruchomą i poruszającą się bez tarcia poprzeczką znajduje się w prostokątnym do ramki jednorodnym polu magnetycznym, którego indukcja zależy od czasu zgodnie ze wzorem $B = B_0 \sin \omega t$. Masa poprzeczki wynosi m , jej długość l , opór elektryczny R . Opór elektryczny nieruchomej części ramki jest pomijalnie mały.

Oblicz amplitudę drgań poprzeczki wiedząc, że jej średnia odległość od lewego boku ramki jest równa x_0 .

Przyjmij, że szukana amplituda jest znacznie mniejsza od x_0 . Pomiń pole magnetyczne pochodzące od prądu płynącego w ramce. Pomiń zmiany powierzchni ograniczonej ramką i poprzeczką.

Zadanie T2.

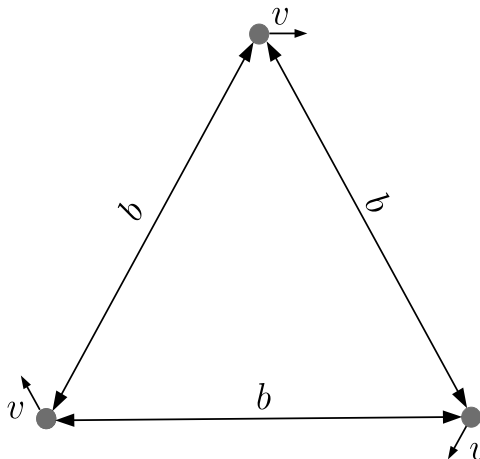
Grawitacja zmienia kierunek promieni świetlnych, co może dawać efekt podobny do skupiania promieni przez soczewkę. Dzięki soczewkowaniu grawitacyjnemu zaobserwowano gwiazdę odległą od Ziemi o $d = 9$ miliardów lat świetlnych, co odpowiada krańcom obserwowanego Wszechświata. Przyczyną tego soczewkowania jest gromada galaktyk MACS J1149+2223, która leży w przybliżeniu w połowie odległości od zaobserwowanej gwiazdy. Soczewkowanie zwiększa obserwowaną jasność około 1000 razy, a szacowany promień tej gwiazdy to $R = 1000$ promieni Słońca. Porównajmy soczewkowanie grawitacyjne do działania zwykłej soczewki szklanej.

Przyjmijmy, że w miejscu, gdzie znajduje się gromada galaktyk, znajduje się cienka soczewka optyczna. Ogniskowa tej soczewki jest taka, że obraz gwiazdy tworzy się między Ziemią a gromadą galaktyk w odległości od Ziemi znacznie większej od promienia gwiazdy, ale znacznie mniejszej od d . Wyznacz średnicę D tej soczewki.

Porównaj otrzymaną wartość D z typowymi rozmiarami galaktyk.

Zadanie T3.

Trzy małe ciała o masie m każde znajdują się w przestrzeni kosmicznej z dala od innych obiektów, początkowo w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku b . W chwili początkowej prędkość każdego ciała wynosi v i jest równoległa do boku przeciwnego do danego wierzchołka – patrz rysunek.



Rys. do zad. T3.

Wyznacz minimalną odległość, na jaką ciała zbliżą się do siebie.

Zadanie T4.

Agent J. B. ma za zadanie dostarczenie przesyłki z punktu A do odległego od niego o $a = 2$ km punktu B. Aby temu przeszkodzić, zły dr N. umieścił w punkcie C silne źródło promieniowania gamma. Odległość AC jest równa odległości BC i jest równa a . Źródło promieniuje izotropowo i między nim a agentem nie ma niczego, co pochłania to promieniowanie.

Wiedząc o tym, agent postanawia przedostać się z A do B po łuku okręgu omijającym punkt C. Wyznacz numerycznie z dokładnością do 50 m, jaki powinien być promień tego okręgu, aby agent J. B. otrzymał najmniejszą możliwą dawkę promieniowania.

Prędkość agenta jest stała i nie zależy od promienia okręgu. Dawka promieniowania, jaką agent pochłania w jednostce czasu, zależy tylko od jego odległości od źródła promieniowania.

Uwagi:

Zadanie można rozwiązać stosując zaawansowane metody matematyczne, jednak oczekujemy rozwiązania numerycznego zarówno jeśli chodzi o wyznaczenie dawki, jaką agent otrzyma przy założonym promieniu okręgu, jak i znalezienie optymalnego promienia okręgu.

Rozwiązanie powinno zawierać: wzory używane w rozwiązaniu (wraz z wyprowadzeniem lub uzasadnieniem), opis zastosowanego algorytmu, opis kodu programu (lub np. arkusza kalkulacyjnego) użytego do rozwiązania wraz ze sposobem zagwarantowania (lub sprawdzenia) właściwej dokładności wyniku.

Nie jest dopuszczalne użycie programów do obliczeń symbolicznych lub gotowych programów wyznaczających całki bądź minima numerycznie.

Dodatkowe wskazówki dotyczące rozwiązywania zadań numerycznych znajdziesz w treściach i rozwiązaniach zadań numerycznych z poprzednich olimpiad.

ZADANIA DOŚWIADCZALNE

Należy przesłać rozwiązania dwóch (i tylko dwóch) dowolnie wybranych zadań doświadczalnych. Za każde z zadań doświadczalnych można otrzymać maksymalnie 40 punktów.

Zadanie D1.

Mając do dyspozycji:

- naczynie z przezroczystymi ściankami wypełnione do $3/4$ wysokości wodą, na której znajduje się ok. 10 mm warstwa oleju rzepakowego,
- linijkę,
- paski papieru milimetrowego o szerokości ok. 5 mm,
- olej rzepakowy (taki sam, jak użyty do utworzenia początkowej warstwy oleju w szklance), który można dolewać do szklanki,
- wskaźnik laserowy o mocy ok. 1-5 mW, do wyboru czerwony lub zielony, przy czym należy jasno podkreślić, który został użyty,

wyznacz względny współczynnik załamania użytego światła laserowego na granicy olej-woda.

Zadanie D2.

Mając do dyspozycji:

- emaliowany drut miedziany o średnicy (0,1 – 0,15)mm,
- smartfon z czujnikiem typu magnetometr lub kompas, umożliwiającym pomiar wartości indukcji pola magnetycznego,
- nożyczki lub nożyk,
- taśmę mierniczą,
- taśmę klejącą,
- papier milimetrowy,
- baterię alkaliczną AA o napięciu nominalnym 1,5 V

wyznacz dla użytego drutu opór na jednostkę długości.

Do rozwiązania zadania dołącz 20-centymetrowy odcinek wykorzystanego drutu.

Uwagi:

1. Przyjmij, że siła elektromotoryczna baterii jest równa jej napięciu nominalnemu.
2. Aby przeciwdziałać zbyt szybkiemu rozładowaniu baterii nie zwieraj jej odcinkiem drutu krótszym niż 1 m.
3. Większość współczesnych smartfonów posiada odpowiedni czujnik, chociaż odczyt liczbowej wartości pola magnetycznego może wymagać zainstalowania odpowiedniej aplikacji. Przykładowe odnośniki znajdują się na stronie www.kgof.edu.pl/extra/magn.

4. Sensor pola magnetycznego ma niewielki rozmiar i w różnych modelach smartfonów jest zlokalizowany w różnych miejscach. Wyznaczenie jego położenia — o ile jest ono istotne dla danej metody rozwiązywania zadania — powinno być również elementem rozwiązania.

Zadanie D3.

Mając do dyspozycji:

- ludzki włos o długości 35–40 cm,
- papier milimetrowy,
- 15 spinaczy biurowych o znanej masie,
- dwa statywy lub inne elementy umożliwiające zamocowanie włosa,

wyznacz współczynnik sprężystości włosa $\lambda = k \cdot L_0$ taki, że siła naciągu włosa $F = k \cdot \Delta L$, zaś L_0 i ΔL oznaczają odpowiednio długość swobodną i wydłużenie włosa.

ROZWIĄZANIA

Rozwiązanie zadania T1

Zgodnie z rysunkiem z treści zadania zmienna odległość poprzeczki od lewego boku ramki jest równa x . Strumień indukcji magnetycznej przez ramkę wynosi

$$\Phi = S \cdot B = S \cdot B_0 \sin \omega t, \quad (1)$$

gdzie S jest powierzchnią ramki. Zgodnie z treścią zadania możemy przyjąć, że S jest stałe i równe $x_0 l$. Zatem w przybliżeniu otrzymujemy

$$\Phi \approx x_0 l B_0 \sin \omega t. \quad (2)$$

Zgodnie z prawem Faradaya

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (3)$$

siła elektromotoryczna indukcji wynosi

$$\mathcal{E} \approx -l B_0 x_0 \omega \cos \omega t. \quad (4)$$

Natężenie prądu w ramce jest opisane wzorem

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \approx \quad (5)$$

$$\approx -\frac{l B_0}{R} x_0 \omega \cos \omega t. \quad (6)$$

Ze wzoru na siłę elektrodynamiczną otrzymujemy, że siła działająca na poprzeczkę jest równa

$$F = IlB \approx \quad (7)$$

$$\approx -\frac{l^2 B_0^2}{R} (x_0 \omega \cos \omega t) \sin \omega t = -\frac{l^2 B_0^2}{2R} x_0 \omega \sin 2\omega t. \quad (8)$$

Siła ta jest prostopadła do poprzeczki i leży w płaszczyźnie ramki. Jej zwrot jest taki, że stara się przeciwstawić zmianie Φ – czyli $F < 0$ oznacza, że na rysunku z treści zadania siła działa w lewo. Zatem przyspieszenie poprzeczki wynosi

$$a = -\frac{l^2 B_0^2}{2mR} x_0 \omega \sin 2\omega t. \quad (9)$$

To przyspieszenie ma taką samą postać, jak przyspieszenie oscylatora harmonicznego o częstotliwości 2ω i amplitudzie drgań równej

$$\frac{1}{(2\omega)^2} \frac{l^2 B_0^2}{2mR} x_0 \omega.$$

Zatem amplituda drgań A jest równa

$$A = \frac{l^2 B_0^2}{8mR\omega} x_0. \quad (10)$$

Warunek, że amplituda drgań jest znacznie mniejsza od x_0 oznacza, że musi zachodzić

$$\frac{l^2 B_0^2}{8mR\omega} \ll 1. \quad (11)$$

Punktacja zadania T1.

Strumień pola B (wzór (1)) – 1 pkt.

Wykorzystanie prawa Faradaya (wzór (3)) – 1 pkt.

Siła elektromotoryczna (wzór (4) lub równoważny, również nieprzybliżona wersja) – 2 pkt.

Związek między siłą elektromotoryczną, a prądem płynącym w ramce (wzór (5) lub niejawnie wykorzystanie tego wzoru) – 1 pkt.

Wykorzystanie wzoru na siłę elektrodynamiczną (wzór (7) lub niejawnie wykorzystanie tego wzoru) – 1 pkt.

Przyspieszenie poprzeczki (wzór (9) lub równoważny) – 2 pkt.

Szukana amplituda drgań poprzeczki (wzór (10) lub równoważny) – 2 pkt.

Uwaga: przybliżenia mogą być zrobione na dowolnym etapie rozwiązania.

Rozwiązanie zadania T2

Przyjmijmy, że powierzchnia zewnętrznej soczewki instrumentu obserwacyjnego lub źrenica oka wynosi S , moc światła wysyłanego przez gwiazdę to I .

Wyznamy najpierw, ile światła pada na soczewkę instrumentu obserwacyjnego, jeśli pomiędzy nią a gwiazdą nie ma żadnych soczewek.

Przez sferę o promieniu d przechodzi całe promieniowanie wysłane przez gwiazdę, zatem na rozważaną soczewkę instrumentu obserwacyjnego pada światło o całkowitej mocy.

$$I_1 = \frac{S}{4\pi d^2} I. \quad (12)$$

Rozważmy teraz efekt działania soczewki znajdującej się między gwiazdą a obserwatorem.

Ponieważ ta soczewka znajduje się w odległości $d/2$ od gwiazdy, a jej średnica wynosi D , z analogicznych jak poprzednio rozważań wynika, że pada na nią światło o natężeniu

$$I_2 = \frac{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2}{4\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2} I = \frac{D^2}{4d^2} I. \quad (13)$$

Całe to światło tworzy obraz gwiazdy. Ponieważ odległości gwiazdy oraz jej obrazu od soczewki są w przybliżeniu równe, powiększenie wynosi 1, a zatem promień obrazu jest równy promieniowi gwiazdy R . Obraz gwiazdy tworzy się w odległości od Ziemi znacznie większej od promienia gwiazdy, ale znacznie mniejszej od odległości od soczewki i z punktu widzenia obserwatora promienie, które utworzyły obraz biegną w kierunku obserwatora równoległe do siebie. Zatem do naszego instrumentu obserwacyjnego wpada światło o mocy

$$I_3 = \frac{S}{\pi R^2} I_2 = \frac{S}{\pi R^2} \frac{D^2}{4d^2} I. \quad (14)$$

Zatem

$$\frac{I_3}{I_1} = \frac{D^2}{R^2}, \quad (15)$$

a więc

$$D = \sqrt{\frac{I_3}{I_1}} R. \quad (16)$$

Z treści zadania mamy, że $\frac{I_3}{I_1} = 1000$, stąd

$$D = \sqrt{1000} R \approx 3 \cdot 10^4 R_{\text{Słońca}}. \quad (17)$$

Rozmiary galaktyk to od kilku tysięcy do kilkuset tysięcy lat świetlnych. Promień Słońca to około $7 \cdot 10^8$ m, czyli ok. 2,3 sekundy świetlnej, zatem D jest znacznie mniejsze od rozmiarów galaktyk, a tym bardziej od rozmiarów gromad galaktyk.

Punktacja zadania T2.

Moc światła wpadającego do instrumentu obserwacyjnego przy braku soczewkowania (wzór (12) lub równoważny) – 2 pkt.

Moc światła padającego na wymyśloną soczewkę (wzór (13) lub równoważny) – 2 pkt.

Zauważenie, że obraz gwiazdy ma promień R – 1 pkt.

Zauważenie, że promienie po przejściu przez obraz są z punktu widzenia obserwatora równoległe – 1 pkt.

Moc światła wpadającego do instrumentu obserwacyjnego po przejściu przez wymyśloną soczewkę (wzór (14) lub równoważny) – 1 pkt.

Wzór na szukany promień soczewki (wzór (16)) – 1 pkt.

Wartość liczbowa promienia soczewki wyrażona w jednostkach $R_{\text{Słońca}}$ (wzór (17)) lub w innych jednostkach – 1 pkt.

Zauważenie, że znaleziony promień soczewki jest znacznie mniejszy od typowego rozmiaru galaktyki – 1 pkt.

Rozwiązanie zadania T3

Na układ nie działają żadne siły zewnętrzne, zatem zachowany jest jego całkowity moment pędu a położenie środka masy nie ulega zmianie. Również energia mechaniczna układu jest zachowana.

Z symetrii układu wynika, że w każdym momencie ciała będą się znajdowały w wierzchołkach trójkąta równobocznego o środku pokrywającym się ze środkiem początkowego trójkąta.

Początkowa energia grawitacyjna układu tych ciał wynosi

$$E_{g1} = -3 \frac{Gm^2}{b}, \quad (18)$$

a energia kinetyczna

$$E_{k1} = 3 \frac{mv^2}{2}. \quad (19)$$

Przyjmijmy, że najmniejsza odległość na jaką się zbliżą te ciała to b_2 , a prędkości w chwili największego zbliżenia to v_2 . Zauważmy, że w momencie największego zbliżenia, prędkości ciał są równoległe do odpowiednich boków trójkąta utworzonego przez ciała, a zatem są prostopadłe do odcinka łączącego środek masy układu z odpowiednim ciałem.

Moment pędu układu jest zachowany, co oznacza, że

$$3mv \frac{\sqrt{3}}{3} b = 3mv_2 \frac{\sqrt{3}}{3} b_2, \quad (20)$$

czyli

$$v_2 = v \frac{b}{b_2}. \quad (21)$$

Zachowana jest też energia mechaniczna

$$3 \frac{mv^2}{2} - 3 \frac{Gm^2}{b} = 3 \frac{mv_2^2}{2} - 3 \frac{Gm^2}{b_2}. \quad (22)$$

Uwzględniając wzór na v_2 , otrzymujemy

$$3 \frac{mv^2}{2} - 3 \frac{Gm^2}{b} = 3 \frac{mv^2 b^2}{2 b_2^2} - 3 \frac{Gm^2}{b_2}. \quad (23)$$

Jest to równanie kwadratowe na $\frac{1}{b_2}$, którego jednym rozwiązaniem jest $\frac{1}{b}$, a drugim

$$\frac{1}{b_2} = \frac{1}{b} \left(\frac{2Gm}{v^2 b} - 1 \right). \quad (24)$$

Zatem

$$b_2 = \frac{b}{\frac{2Gm}{v^2 b} - 1}. \quad (25)$$

Jeśli $\frac{2Gm}{v^2 b} - 1 > 1$, czyli $Gm > v^2 b$, to powyższe rozwiązanie (25) rzeczywiście odpowiada minimalnej odległości, na jaką te ciała się zbliżą do siebie. Jeśli $\frac{2Gm}{v^2 b} - 1 \leq 1$, czyli $Gm \leq v^2 b$, to minimalną odległością jest początkowa odległość.

Zauważmy, że jeśli energia całkowita jest nieujemna, czyli $\frac{mv^2}{2} \geq \frac{Gm^2}{b}$, $v^2 \geq 2Gm/b$, to ciała oddalają się od siebie na nieskończoną odległość – zgodnie ze wzorem (25) nie istnieje dodatnie b_2 .

Powyżej nie rozważyliśmy przypadku $v = 0$ – wtedy ciała po prostu spadną w kierunku środka masy układu i minimalna odległość jest równa 0 (z dokładnością do rozmiarów ciał), co wynika też ze wzoru (25) przy rozważeniu granicy $v \rightarrow 0$.

Podsumowując, jeśli $v^2 < 2Gm/b$ to minimalna odległość między ciałami jest równa

$$\frac{b}{\frac{2Gm}{v^2 b} - 1} \quad \text{jeśli } 0 < v^2 b < Gm, \\ b \quad \text{jeśli } v^2 b > Gm. \quad (26)$$

Jeśli natomiast $v^2 \geq 2Gm/b$ to ciała będą się od siebie stale oddalały (minimalna odległość b odpowiada tylko chwili początkowej), w przeciwnym przypadku minimalna odległość będzie osiągnięta cyklicznie.

Punktacja zadania T3.

Zasada zachowania momentu pędu wyrażona dla położenia początkowego i drugiej skrajnej odległości ciał (wzór (20) lub równoważny) – 2 pkt.

Zasada zachowania energii wyrażona dla położenia początkowego i drugiej skrajnej odległości ciał (wzór (22) lub równoważny) – 2 pkt.

Równanie wynikające z zasady zachowania momentu pędu i zasady zachowania energii pozwalające na wyznaczenie drugiej skrajnej odległości (wzór (23) lub równoważny) – 2 pkt.

Wyrażenie na drugą skrajną odległość ciał (wzór (25) lub równoważny) – 2 pkt.

Minimalna odległość w przypadku $v^2 < 2Gm/b$ (ujemna całkowita energia mechaniczna) w zależności od wartości parametrów (wzór (26) lub równoważny) – 1 pkt.

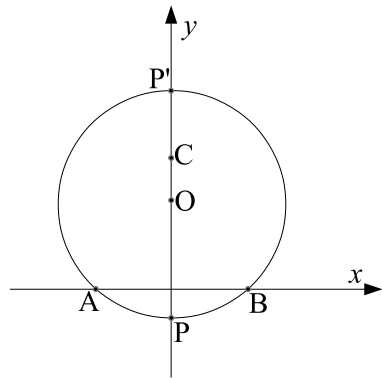
Zauważenie, że w przypadku $v^2 \geq 2Gm/b$ (nieujemna całkowita energia mechaniczna) ciała będą się od siebie stale oddalały – 1 pkt.

Rozwiązanie zadania T4 (numerycznego)

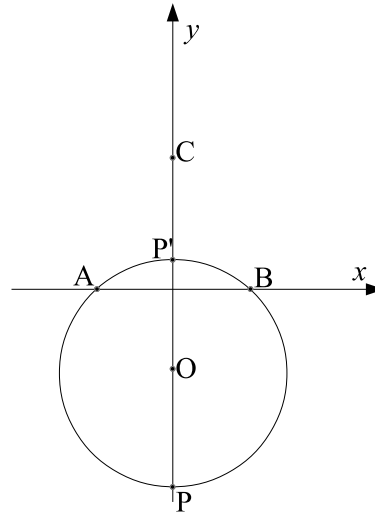
Zwykle dawka promieniowania jest definiowana jako pochłonięta energia promieniowania na jednostkę masy. Ponieważ jednak można przyjąć, że masa agenta jest stała, poniżej przez dawkę będziemy rozumieli całkowitą energię promieniowania pochłoniętą przez ciało agenta.

Rozwiązanie musi składać się z następujących elementów:

- Wyznaczenie dawki promieniowania jaką otrzyma agent dla zadanego toru
- Znalezienie toru, dla którego dawka promieniowania jest najmniejsza.



Rys. T4a



Rys. T4b

Oznaczmy przez O środek okręgu, po łuku którego ma poruszać się agent (patrz Rys. T4a), przez R – promień tego okręgu, przez α – miarę kąta AOC , przez J – punkt, w którym agent znajduje się w danej chwili w trakcie swojego ruchu, przez P – punkt na okręgu w połowie drogi agenta, przez ϕ – kąt JOC . Wprowadzimy układ współrzędnych xy o osi x przechodzącej przez punkty A oraz B i prostopadłej do niej osi y przechodzącej przez punkt C . Ponieważ trójkąt ABC jest trójkątem równobocznym, współrzędne punktu C są równe: $x_C = 0$, $y_C = \sqrt{3}a/2$.

Dla danego promienia R możliwe są cztery tory ruchu agenta: łuki APB , $AP'B$ z Rys. T4a, oraz łuki APB , $AP'B$ z Rys. T4b. Zauważmy, że długości łuków APB z Rys. T4a i $AP'B$ z Rys. T4b są takie same, a zatem czas podróży agenta w obu przypadkach jest taki sam. Jednak

na drodze APB z Rys. T4a agent znajduje się bliżej źródła promieniowania, niż w odpowiednich punktach na drodze AP'B z Rys. T4b. Zatem z tych dwóch dróg korzystniejsza jest ta pierwsza (agent otrzyma mniejszą dawkę promieniowania) i drugiej nie musimy już dalej rozważać. Podobnie z dróg APB z Rys. T4b i AP'B z Rys. T4a korzystniejsza jest ta pierwsza. Zatem dla danego R rozważać będziemy tylko tę drogę (ten łuk) z dwóch możliwych, gdzie punkt P jest dalej od punktu C . Jeśli weźmiemy to pod uwagę, to droga agenta będzie jednoznacznie określona przez położenie środka okręgu, czyli y_O , a wartość kąta ϕ mierzona w radianach jest zawarta w przedziale od α do π .

Gdy agent znajduje się w punkcie J , jego odległość od źródła promieniowania (czyli punktu C) wynosi

$$d = \sqrt{(x_J)^2 + (y_C - y_J)^2}.$$

Z rozważań geometrycznych mamy

$$y_O = -R \cos \alpha, \quad (27)$$

$$y_J = y_O - R \cos \phi, \quad (28)$$

co daje

$$d = \sqrt{(R \sin \phi)^2 + (y_C + R \cos \alpha - \cos \phi)^2}. \quad (29)$$

Zatem moc promieniowania, jakie agent otrzymuje, gdy znajduje się w punkcie J , jest równa

$$P = \frac{I_0}{d^2} = \frac{I_0}{(R \sin \phi)^2 + (y_C + R \cos \alpha - \cos \phi)^2}. \quad (30)$$

Powyżej wykorzystaliśmy fakt, że przy izotropowym promieniowaniu jego natężenie zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości od źródła. I_0 jest stałą niezależną od tego, jak agent się porusza. Konkretna wartość I_0 nie ma w naszym zagadnieniu znaczenia (choć ma znaczenie dla agenta).

Zauważmy, że zachodzi związek

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha}, \quad (31)$$

zatem α można potraktować jako niezależny parametr, pozwalający jednoznacznie określić tor.

Całkowita droga, jaką agent ma do przebycia, wynosi $2R(\pi - \alpha)$. Podzielmy tę drogę na $2n$ odcinków, każdy o długości odpowiednio

$$\delta l = \frac{R(\pi - \alpha)}{n}, \quad (32)$$

Każdy z tych odcinków agent przebywa w czasie

$$\delta t = \frac{\delta l}{v}, \quad (33)$$

gdzie v jest jego prędkością.

Przyjmijmy, że średnia moc promieniowania na danym odcinku jest równa mocy promieniowania w połowie odcinka. Wtedy całkowita dawka promieniowania, jaką agent otrzyma, jest równa w przybliżeniu

$$D = 2I_0 \frac{\delta l}{v} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(R \sin \phi_k)^2 + (y_C + R \cos \alpha - \cos \phi_k)^2} = \quad (34)$$

$$= 2 \frac{I_0 R (\pi - \alpha)}{v n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(R \sin \phi_k)^2 + (y_C + R \cos \alpha - \cos \phi_k)^2}, \quad (35)$$

gdzie ϕ_k jest kątem odpowiadającym połowie k -tego odcinka, czyli

$$\phi_k = \alpha + \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{(\pi - \alpha)}{n}. \quad (36)$$

Zatem rozwiązanie zadania może wyglądać następująco:

1. Dla danego α wyznaczamy (przybliżone) D .

2. Znajdujemy takie α (teoretycznie z przedziału $[0, \pi]$), żeby D było najmniejsze.

Wartość $2\frac{L_0}{v}$ jest bez znaczenia i możemy przyjąć, że (w odpowiednich jednostkach) jest równa 1.

Zamiast traktować α jako zmienną niezależną, można przyjąć, że jest nią y_0 . Mamy wtedy

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + y_0^2}, \quad (37)$$

$$\alpha = \pi - \arccos \frac{y_0}{R}. \quad (38)$$

Na stronie KGOF znajdują się programy w VBA (zawarty w arkuszu kalkulacyjnym *T4_2018.xlsm*) oraz w C++ (plik *T4_2018.cpp*) odpowiadające powyższemu opisowi. Plik *T4_2018najlepsze.txt* zawiera wyniki działania programu *T4_2018.cpp*.

Algorytm wykorzystany z w tych programach jest następujący:

- dla danego y_0 (oraz pozostałych parametrów) są wyznaczone wartości α , R a następnie zgodnie z (35) wartość dawki D poprzez sumowanie w pętli wkładów odpowiadających kolejnym fragmentom toru
- y_0 jest zmieniane od y_{\min} do y_{\max} z krokiem Δy . Obliczona dawka $D(y_0)$ jest porównywana z najmniejszą dawką otrzymaną w poprzednich krokach D_{\min} . Jeśli $D(y_0) < D_{\min}$, to przyjmujemy $D_{\min} = D(y_0)$ i zapamiętujemy wartości y_0 oraz R jako odpowiednio $y_{0\min}$ oraz R_{\min} . Po wykonaniu wszystkich kroków D_{\min} jest minimalną dawką dla y_0 z przedziału od y_{\min} do y_{\max} , natomiast $y_{0\min}$ oraz R_{\min} odpowiadającymi tej dawce wartościami parametrów.

Początkowo przyjęto $y_{\min} = -a$, $y_{\max} = a$, $\Delta y = 0,01 \frac{a}{2}$, liczbę przedziałów $n = 1000$. Otrzymano, że minimalna dawka równa $0,250 \cdot 2\frac{L_0}{v}$ odpowiada R równemu $(1,155 \pm 0,005)\frac{a}{2}$. Następnie zwiększono n do 2000, co w granicach podanej dokładności wyniku nie zmieniło go. W przypadkach $y_{\min} = -a$, $y_{\max} = a$, $\Delta y = 0,002 \frac{a}{2}$, $n = 1000$; $y_{\min} = -10 \cdot a$, $y_{\max} = 10 \cdot a$, $\Delta y = 0,01 \frac{a}{2}$, $n = 5000$ oraz $y_{\min} = -10 \cdot a$, $y_{\max} = 10 \cdot a$, $\Delta y = 0,004 \frac{a}{2}$, $n = 5000$ również otrzymano (w granicach podanej dokładności) ten sam wynik. Najmniejsza wartość nie znajduje się na końcu przedziału, zatem niewielkie rozszerzenie tego przedziału nie zmieniłoby wartości minimum. Sprawdzono, że dla y_0 z przedziałów $[-25 \cdot a, -10 \cdot a]$ oraz $[10 \cdot a, 25 \cdot a]$ wartość dawki nadal rośnie, choć wolno, ze wzrostem R . Przy dużych dodatnich wartościach y_0 tor zbliża się do odcinka i nie oczekujemy znacznych zmian dawki przy dalszym wzroście y_0 . Przy dużych ujemnych wartościach y_0 główny wpływ na dawkę mają fragmenty toru w niezbyt dużych odległościach od punktów A lub B i nie oczekujemy znacznych zmian dawki przy dalszym wzroście y_0 . Zgodnie z tym przyjęto, że nie ma potrzeby badania przypadków jeszcze większych $|y_0|$.

Zatem poszukiwany promień ma długość $(1,155 \pm 0,005)$ km.

Na końcu rozwiązania przedstawiono wykresy zależności D od R oraz D od y_0 .

Uwaga: rozwiązując to zagadnienie analitycznie, można pokazać, że szukana droga jest łukiem okręgu przechodzącego przez punkty ABC (ściśle wynik to $R_{\min} = \sqrt{3}a/3$).

Punktacja zadania T4.

Uwzględnienie w rozwiązaniu wszystkich możliwych czterech łuków odpowiadających danemu promieniowi R – 1 pkt.

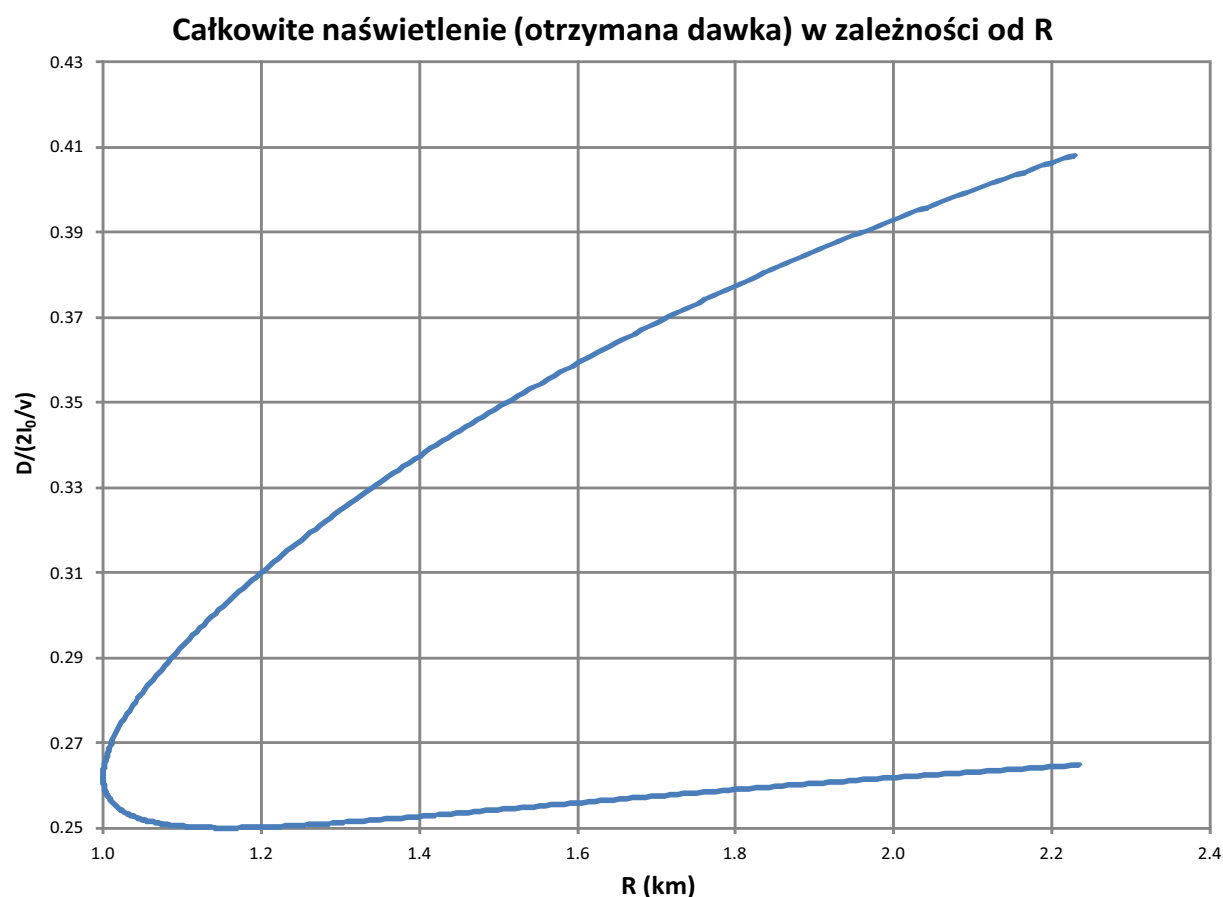
Wzór na moc promieniowania, jaką agent otrzymuje w danym punkcie na okręgu (wzór (30) lub równoważny) – 1 pkt.

Wzór (ściśle lub przybliżony) na całkowitą dawkę promieniowania, jaką agent otrzyma dla danej drogi (łuku okręgu) (np. wzór (35) wraz z (36) lub wzór równoważny) – 2 pkt.

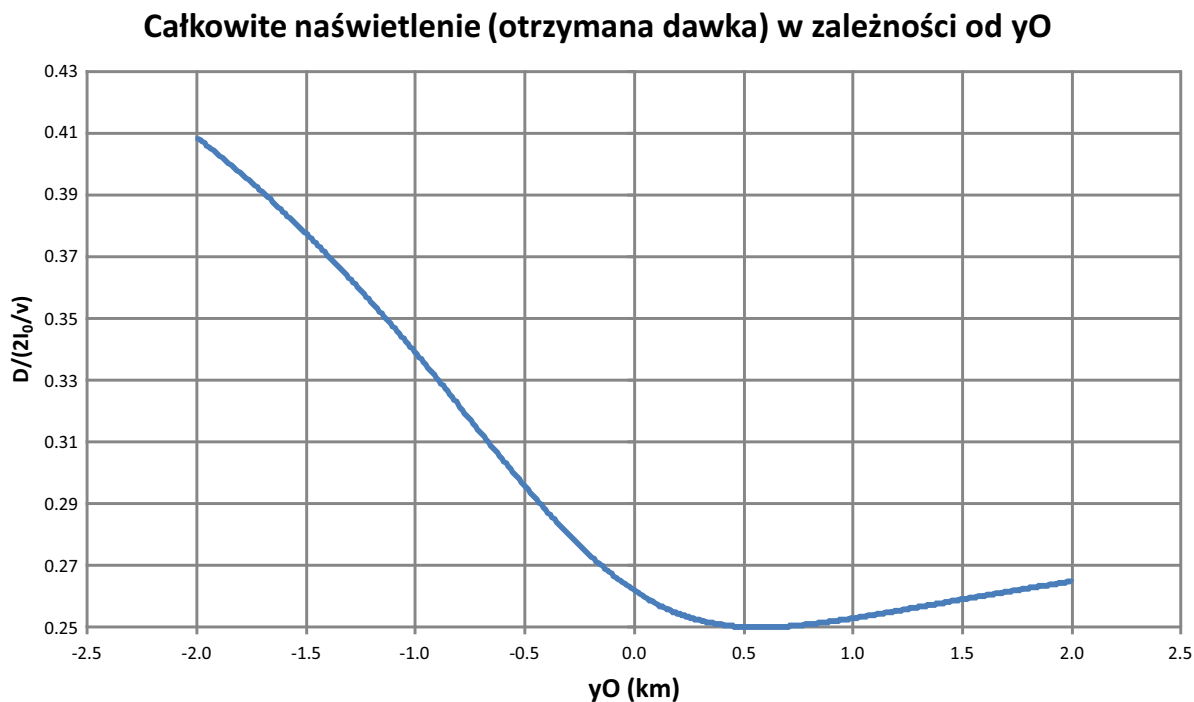
Przedstawienie algorytmu, pozwalającego na wyznaczenie szukanego promienia – 2 pkt.

Wynik R w przedziale $[1,10, 1,21]$ km – 2 pkt.

Przedstawienie sposobu upewnienia się, że otrzymany wynik jest poprawny (np. zwiększanie liczby kroków i liczby przedziałów na które jest podzielona droga i zauważenie że – w granicach przyjętej niepewności wyniku – nie ma zmian) – 2 pkt.



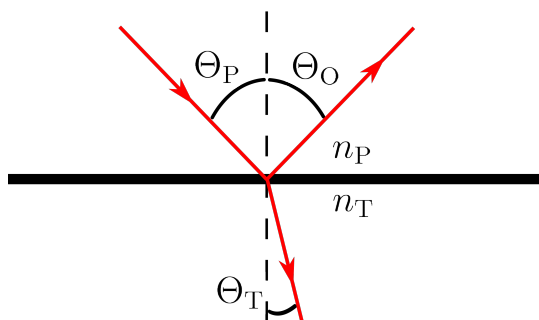
Rys. T4c



Rys. T4d

Rozwiązanie zadania D1.Część teoretyczna

Rozważmy promień światła padający na granicę dwóch ośrodków pod kątem Θ_P jak na rysunku 1. Promień przechodzi z ośrodka o współczynniku załamania n_P do ośrodka o współczynniku



Rysunek 1: Kąty istotne dla wyprowadzenia prawa Snella. Pozioma linia stanowi granicę ośrodków.

załamania n_T . Współczynniki załamania ośrodków oraz kąty padania i załamania, odpowiednio Θ_P i Θ_T , powiązane są ze sobą prawem Snella:

$$n_P \sin \Theta_P = n_T \sin \Theta_T, \quad (39)$$

a kąt odbicia Θ_O równy jest kątowi padania Θ_P .

Gdy zachodzi $n_P > n_T$, to istnieje kąt graniczny Θ_G , dla którego $\Theta_T = 90^\circ$. W konsekwencji, jeśli kąt padania spełnia nierówność $\Theta_P > \Theta_G$, to światło nie wchodzi do ośrodka o współczynniku załamania n_T – efekt ten nazywany jest całkowitym wewnętrznym odbiciem.

Pomysł rozwiązania zadania opiera się na wykorzystaniu zjawiska całkowitego wewnętrznego odbicia w warstwie oleju na powierzchni wody. Przyjmijmy, że warstwa oleju ma grubość d , a współczynnik załamania oleju wynosi n_o . Współczynniki załamania powietrza i wody oznaczmy, odpowiednio, przez n_p oraz n_w , jak na rysunku (2), przy czym $n_o > n_w > n_p$. Zaznaczony na tym rysunku promień światła po wejściu do ośrodka o współczynniku załamania n_o pozostaje w tym ośrodku z powodu całkowitego wewnętrznego odbicia na granicy ośrodków olej-powietrze oraz olej-woda. Możemy tak dobrać kąt, pod którym wiązka początkowo wchodzi do ośrodka n_o , aby odbicie od granicy olej-woda było odbiciem przy granicznym kącie padania. Kąt Θ_G zgodnie z prawem Snella można powiązać ze współczynnikami załamania n_o i n_w zależnością $\sin \Theta_G = n_w/n_o$. Niezależnie, rozpatrując bieg promieni widoczny na rysunku 2, można otrzymać zależność $\sin \Theta_G = L/\sqrt{L^2 + d^2}$, gdzie L jest odległością punktu całkowitego wewnętrznego odbicia na granicy ośrodków olej-powietrze od punktu całkowitego wewnętrznego odbicia na granicy ośrodków olek-woda.

Łącząc oba powyższe wzory, możemy wyrazić L jako funkcję stosunku współczynników załamania n_o/n_w oraz grubości d :

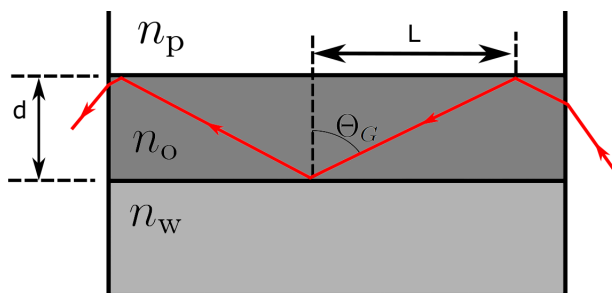
$$L = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n_o}{n_w}\right)^2 - 1}} \cdot d. \quad (40)$$

W związku z tym, mierząc odległość L dla różnych grubości d , powinniśmy otrzymać zależność liniową postaci $L = a \cdot d$, której współczynnik proporcjonalności a wynosi

$$a = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n_o}{n_w}\right)^2 - 1}}. \quad (41)$$

Znając wartość tego współczynnika, możemy wyznaczyć szukany stosunek n_o/n_w z zależności:

$$n_o/n_w = \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a} \quad (42)$$



Rysunek 2: Propagacja wiązki lasera w warstwie oleju gdy zachodzi całkowite wewnętrzne odbicie. Widoczne trzy ośrodki występujące w zadaniu: powietrze (n_p), olej (n_o) oraz woda (n_w).

Część doświadczalna

Wykorzystano zlewkę szklaną z przezroczystego szkła, o średnicy wewnętrznej 11,2 cm i wysokości 6 cm. Zlewkę wypełniono wodą i na jej powierzchnię nalano taką ilość oleju rzepakowego, by utworzyć warstwę zgodną z wymogami zadania.

Następnie na powierzchnię oleju wlewano dodatkowe ilości oleju rzepakowego tak, aby na wodzie powstawały warstwy o coraz większej grubości. Wyznaczono odległości L dla kilku łatwo

Grubość warstwy oleju d (mm)	Odległość pomiędzy punktami odbicia L (mm)
11	22
12	24
14	28
18	35
20	40

Tabela 1: Wyniki pomiarów odległości L pomiędzy punktami całkowitego wewnętrznego odbicia na styku olej-powietrze oraz olej-woda od grubości d warstwy oleju.

mierzalnych grubości warstwy oleju d . Olej wlewano wystarczająco wolno, aby nie uwięzić w oleju pęcherzyków powietrza, co mogłoby wprowadzić dodatkowe centra rozpraszające i potencjalnie zmienić współczynnik załamania oleju. W efekcie otrzymano układ analogiczny do pokazanego na rysunku 2.

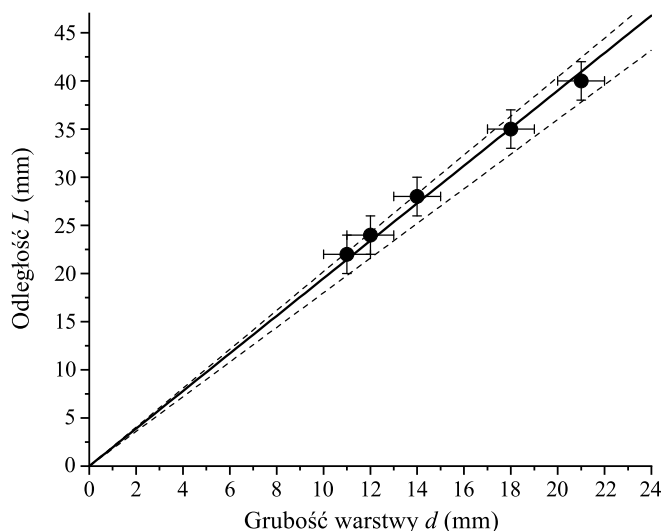
W doświadczeniu wykorzystano wskaźnik laserowy emitujący światło o długości fali (650 ± 10) nm, mocy wyjściowej nieprzekraczającej 5 mW (dane producenta) i średnicy wiązki 3 mm. Wiązkę wpuszczano do warstwy oleju tak, by odbijała się ona od granicy olej-powietrze. Manipulowano kątem padania wiązki do momentu otrzymania całkowitego wewnętrznego odbicia na granicy olej-woda. Gdy kąt padania na granicę olej-woda stał się równy kątowi granicznemu to wiązka odbita od tej granicy stawała się jaśniejsza, zanikała zaś wiązka przechodząca do wody – zgodnie z oczekiwaniami. Po ustaleniu szukanego kąta zmierzono odległość L (patrz część teoretyczna) i grubość warstwy oleju d . Tę ostatnią zmierzono, zanurzając pasek papieru w oleju, aż zaczął on dotykać powierzchni wody. Po wyciągnięciu paska, zmierzono linijką długość zatłuszczonego kawałka papieru. Wykorzystanie do pomiaru d typowej linijki plastikowej prowadzi do błędnych odczytów ze względu na napięcie powierzchniowe na granicy olej-materiał linijki, co prowadzi do zwilżania linijki i pozornego zwiększenia grubości warstwy oleju. Zjawisko to występuje w dużo mniejszym stopniu w przypadku papieru milimetrowego, tym samym wynik pomiaru jest dokładniejszy.

Pomiary wykonano dla pięciu różnych grubości d warstwy oleju i odpowiadających im odległości L . Otrzymane wyniki zebrano w tabeli 1 oraz naniesiono na wykres $L(d)$ pokazany na rysunku 6. Zaznaczone na wykresie niepewności odpowiadają niepewności wyznaczenia grubości warstwy oleju równej 1 mm oraz niepewności wyznaczenia odległości L równej 2 mm. W przypadku niepewności odczytu d wynika ona z braku możliwości dokładniejszego stwierdzenia, gdzie znajduje się granica pomiędzy zatłuszczonym odcinkiem papieru a papierem suchym. W przypadku odległości L mierzymy odległość pomiędzy plamkami o średnicy rzędu 3 mm, co sprządza się do wyznaczenia odległości pomiędzy środkami plamek. Wykonujący zadanie ocenił, że pomiar możliwy był z dokładnością ok. 2 mm.

Przy dopasowywaniu prostej przyjęto, że powinna ona przechodzić przez $(L, d) = (0, 0)$. Do danych dopasowano prostą o współczynniku $a = 2,0 \pm 0,2$, którego niepewność oszacowano prowadząc skrajne proste przechodzące przez punkty pomiarowe z uwzględnieniem ich niepewności. Współczynniki nachylenia tych prostych to $a_1 = 2,02$ oraz $a_2 = 1,8$ i jako niepewność wyznaczenia a przyjęto wartość absolutną największej różnicy pomiędzy współczynnikami nachylenia prostych skrajnych a prostą najlepszego dopasowania.

Na podstawie równania (42) wyznaczamy szukane $n_o/n_w = 1,12 \pm 0,01$. Niepewność tego wyniku (obliczona przez podstawienie skrajnych wartości a) wynika z niepewności w wyznaczaniu długości L i d .

Punktacja zadania D1.



Rysunek 3: Zależność odległości L pomiędzy punktami całkowitego wewnętrznego odbicia na styku olej-powietrze oraz olej-woda od grubości d warstwy oleju.

Część teoretyczna

Pomysł układu pomiarowego użytego do wyznaczenia względnego współczynnika załamania – 3 pkt.

Opis sposobu przeprowadzenia doświadczenia – 2 pkt.

Poprawne użycie prawa Snella – 2 pkt.

Wyprowadzenie zależności umożliwiającej wyznaczenie względnego współczynnika załamania, np. równanie (40) – 3 pkt.

Część doświadczalna

Zestawienie i opis układu umożliwiającego poprawne wykonanie doświadczenia – 2 pkt

Wykonanie pomiarów umożliwiających wyznaczenie n_o/n_w co najmniej czterokrotnie – 4 pkt.

Dopasowanie prostej lub wyznaczenie analogiczną metodą n_o/n_w – 2 pkt.

Wynik liczbowy wraz z oszacowaniem jego niepewności – 2 pkt.

Metody

Rozwiązania mogą być różne i w przypadku alternatywnych rozwiązań należy sprawdzić je doświadczalnie i punktować w zależności od możliwości do uzyskania w danej metodzie dokładności.

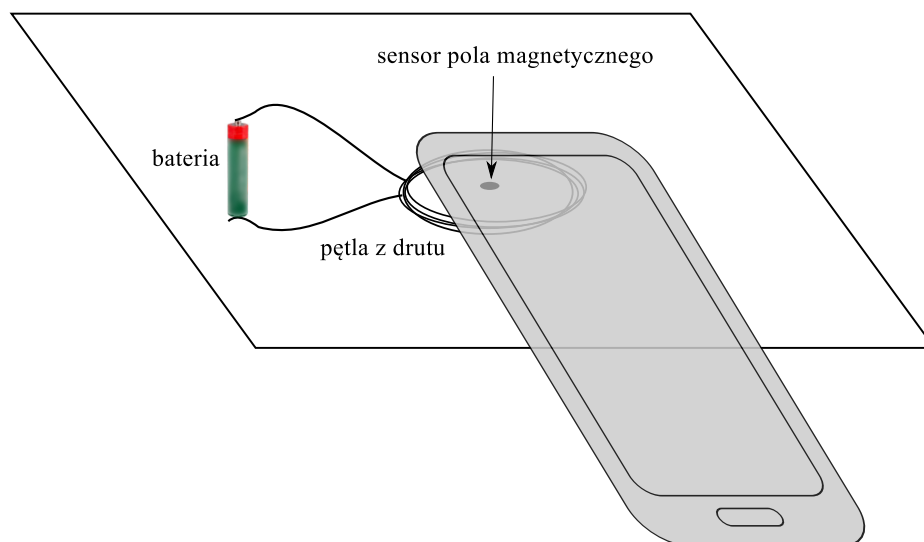
Rozwiązanie zadania D2.

Część teoretyczna

Opór można wyznaczyć na podstawie prawa Ohma przez pomiar natężenia prądu płynącego przy zadanym napięciu. Wśród dostępnych przyrządów nie ma amperomierza, jednak natężenie prądu możemy wyznaczyć pośrednio na podstawie wartości indukcji pola magnetycznego wytwarzanego przez pętlę z prądem.

Rozważmy układ doświadczalny jak na rysunku 4. Głównym elementem układu jest odcinek drutu o długości L , z którego uformowana została pętla o n zwojach i promieniu r . Pętla podłączona jest do baterii o napięciu U , wskutek czego przez drut przepływa prąd o natężeniu I . Przepływ prądu indukuje w środku pętli pole magnetyczne o indukcji B , dane wzorem

$$B = n \frac{\mu_0 I}{2r}, \quad (43)$$



Rysunek 4: Schemat układu pomiarowego wykorzystanego w rozwiązaniu

gdzie μ_0 jest przenikalnością magnetyczną próżni. Indukcję tę można wyznaczyć wykorzystując czujnik pola magnetycznego smartfona. Należy jednak zwrócić uwagę, że pole odczytane przez ten czujnik $B_1 = B + B_0$ będzie pochodziło zarówno od pola cewki B jak i od pola B_0 „tła” (tzn. pola magnetycznego Ziemi lub pochodzącego od namagnesowanych przedmiotów w otoczeniu). Aby wyznaczyć pole cewki B należy więc przeprowadzić pomiary przy włączonym i wyłączonym prądzie w cewce. Różnica $B_1 - B_0$ wskazań sensora w obu tych przypadkach będzie odpowiadać szukanej indukcji B . Na tej podstawie, korzystając ze wzoru (45), można otrzymać natężenie prądu w cewce:

$$I = \frac{2rB}{n\mu_0}. \quad (44)$$

Tak wyznaczone natężenie prądu można wykorzystać do wyznaczenia oporu obwodu:

$$R_{\text{obw}} = \frac{U}{I} = \frac{n\mu_0 U}{2rB}. \quad (45)$$

Uwzględniając opór wewnętrzny baterii R_w :

$$R_{\text{obw}} = R_w + L\lambda, \quad (46)$$

gdzie λ jest oporem na jednostkę długości. Jak widać, szukany opór drutu na jednostkę długości λ jest współczynnikiem kierunkowym zależności $R_{\text{obw}}(L)$.

Część doświadczalna

Przed przystąpieniem do właściwej części doświadczenia należało wyznaczyć położenie czujnika pola magnetycznego. W tym celu nawinięto z odcinka drutu cewkę o małym promieniu. Mały promień cewki służy dwóm celom: zwiększa indukcję pola magnetycznego oraz, co ważniejsze, zmniejsza obszar, w którym „skoncentrowane” jest pole magnetyczne. Przesuwając nad smartfonem cewkę podłączoną do baterii, znaleziono punkt, w którym mierzona wartość pola jest maksymalna.

Następnie zbudowano układ doświadczalny zgodny z rysunkiem w części teoretycznej. Przy doborze średnicy zwoju należy uwzględnić kwestię niezerowej grubości smartfona. We wzorze (43) założono, że mierzona jest indukcja pola magnetycznego w płaszczyźnie pętli. W praktyce czujnik pola magnetycznego będzie oddalony od płaszczyzny pętli o ok. $d/2$, gdzie d jest grubością

smartfona (ok. 10 mm). Aby przybliżenie to było spełnione, należy dobrać promień pętli znacząco większy od $d/2$. W prezentowanym rozwiązaniu pętla miała promień $r = (18 \pm 1)$ mm. W celu ustalenia kształtu pętli wygodnie jest przykleić ją po uformowaniu do kartki papieru za pomocą taśmy klejącej.

W prezentowanym rozwiązaniu przygotowano trzy pętle:

1. $n = 8$ zwojów z odcinka o długości $L = 1$ m,
2. $n = 17$ zwojów z odcinka o długości $L = 2$ m,
3. $n = 35$ zwojów z odcinka o długości $L = 4$ m.

Z obu końców zwojów pozostawiono kilka centymetrów drutu w celu umożliwienia podłączenia baterii. W rozwiązaniu wykorzystana została bateria AA o napięciu nominalnym $U = 1,5$ V, które zgodnie z sugestią w treści zadania utożsamiono z siłą elektromotoryczną.

Próba zmierzenia indukcji pola magnetycznego przygotowanej pętli pokazuje, że wielkość sygnału „tła” (pola magnetycznego Ziemi lub wynikającego z namagnesowania przedmiotów w otoczeniu) nie jest zaniedbywalna w stosunku do sygnału od pętli. W celu wyeliminowania tego problemu, jak również w celu uśrednienia błędów przypadkowych wynikających np. z niedokładności umieszczenia czujnika w środku pętli, podczas pomiaru kilkakrotnie powtarzano następującą sekwencję:

- Umieszczano smartfon na pętli, starając się umieścić czujnik w środku pętli.
- Odczytano bazową wartość pionowej składowej indukcji pola magnetycznego B_0 (wynikającą z ziemskiego pola magnetycznego oraz ewentualnie pola magnetycznego otaczających przedmiotów).
- Podłączano baterię, dociskając końce obwodu palcami. Odczytano aktualną nową wartość pionowej składowej pola magnetycznego B_1 .
- Podłączano baterię w przeciwną stronę, ponownie dociskając końce obwodu palcami. Odczytano aktualną nową wartość pionowej składowej pola magnetycznego B_2 .

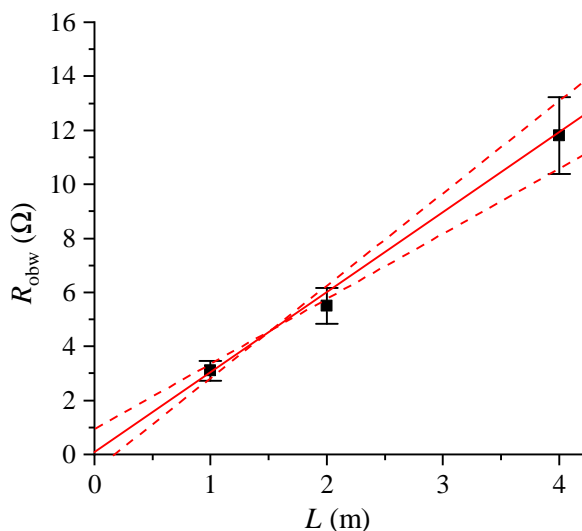
Wyniki pomiarów zostały zebrane w poniższej tabeli:

	B_0 (μT)	B_1 (μT)	B_2 (μT)
$L = 1$ m	35	170	-99
	-38	98	-175
	-37	107	-185
$L = 2$ m	10	178	-155
	10	173	-147
	13	171	-145
$L = 4$ m	12	177	-155
	11	162	-140
	12	164	-136

Wartość indukcji pola wytwarzanego przez pętlę z prądem uzyskano przez uśrednienie pomiarów różnicowych: $B_1 - B_0$ oraz $B_0 - B_2$. Otrzymano w ten sposób $B = (139 \pm 7) \mu\text{T}$ dla $L = 1$ m, $B = (162 \pm 5) \mu\text{T}$ dla $L = 2$ m oraz $B = (156 \pm 10) \mu\text{T}$ dla $L = 4$ m. Po zastosowaniu wzoru (45) obliczono odpowiadające powyższym pętlom wartości oporu: $R_{\text{obw}} = 3,1 \Omega$; $5,5 \Omega$; $11,8 \Omega$. Niepewność wyznaczenia wartości B została oszacowana jako największe z odchyżeń pojedynczych pomiarów od średniej.

Wkład do niepewności wyznaczenia oporów R_{obw} dają niepewności poszczególnych wartości pośrednich: promienia r (ok. 5%) oraz indukcji pola magnetycznego B (ok. 5%). Jak widać wkład tych składników jest porównywalny. Na podstawie przywołanych wartości niepewność wyniku można oszacować na 10-15%. Z kolei pomiar długości L obarczony jest stosunkowo niewielką niepewnością (ok. 1%), więc wartości L przyjęto za dokładne.

Uzyskane wartości przedstawiono na wykresie:



Wszystkie punkty układają się na prostej o nachyleniu $\lambda = (2,9 \pm 0,5) \Omega/\text{m}$ przechodzącej w granicach niepewności pomiaru przez początek układu współrzędnych, co oznacza, że opór wewnętrzny baterii miał niewielki wkład do oporu całkowitego.

Punktacja zadania D2.

Część teoretyczna

Pomysł na wyznaczenie natężenia prądu na podstawie pomiaru pola magnetycznego z uwzględnieniem pola magnetycznego otoczenia – 3 pkt.

Wzór na opór obwodu (wzór (45) lub równoważny) – 3 pkt.

Wzór na opór obwodu uwzględniający długość drutu (wzór (46) lub równoważny) – 2 pkt.

Część doświadczalna

Opis układu pomiarowego – 1 pkt.

Wyznaczenie położenia sensora – 2 pkt.

Uwzględnienie faktu, że czujnik pola nie leży dokładnie w płaszczyźnie pętli (np. przez dobranie odpowiednio dużego promienia pętli) – 2 pkt.

Wykonanie niezbędnych pomiarów (wielokrotnych w celu zredukowania błędów przypadkowych) – 3 pkt.

Wykres $R_{\text{obw}}(\lambda)$ lub równoważny – 2 pkt.

Wynik wraz z oszacowaną niedokładnością – 2 pkt.

Rozwiązanie zadania D3.

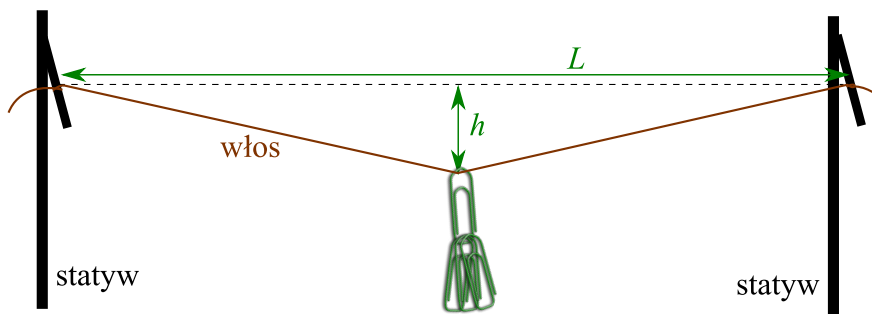
Część teoretyczna

Obciążanie włosa wymaga jego zamocowania, co nieuchronnie prowadzi do ograniczenia części włosa ulegającej wydłużeniu. Oznacza to, że w rzeczywistości wyznaczamy stałą sprężystości k_f

fragmentu włosa o długości L_0 , podczas gdy cały włos ma inną długość L_1 i stałą sprężystości k . Zakładając, że włos rozciąga się w sposób równomierny, otrzymujemy związek:

$$k = \frac{L_0}{L_1} k_f \quad (47)$$

Z uwagi na niewielką masę typowych spinaczy, obciążenie nimi jednego końca włosa nie doprowadzi do wydłużenia, które byłoby mierzalne z dobrą dokładnością przy użyciu papieru milimetrowego. Problem ten można ominąć dokonując pomiaru w układzie przedstawionym na rysunku 5.



Rysunek 5: Schemat układu doświadczalnego.

Włos zamocowany jest między statywami oddległymi o L . Długość swobodna części włosa między statywami oznaczmy przez L_0 . Staramy się dobrać odległość statywów tak, aby L było możliwie bliskie L_0 . Włos obciążamy w środku długości spinaczami o łącznym ciężarze nmg , gdzie n – liczba spinaczy, m – masa każdego spinacza, $g \approx 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ – przyspieszenie ziemskie. Pod wpływem tego obciążenia włos ulega wydłużeniu, co prowadzi do ustalenia się równowagi, w której środek włosa znajduje się o h poniżej prostej łączącej punkty zawieszenia włosa (patrz Rys. 5).

W warunkach doświadczenia kąt α włosa w stosunku do poziomu jest niewielki. Możemy to wykorzystać w wyrażeniu na wydłużenie włosa:

$$\Delta L = \frac{L}{\cos \alpha} - L_0 \approx \frac{L}{1 - \frac{\alpha^2}{2}} - L_0 \approx L \frac{\alpha^2}{2} + L - L_0. \quad (48)$$

Kąt α związany jest z wartościami L oraz h . Dla małych kątów α :

$$\alpha \approx \text{tg } \alpha = \frac{h}{L/2} = \frac{2h}{L}. \quad (49)$$

Po podstawieniu do równania (48) uzyskujemy:

$$\Delta L \approx \frac{2h^2}{L} + L - L_0. \quad (50)$$

Wydłużenie włosa przekłada się na jego naciąg:

$$N = k_f \Delta L, \quad (51)$$

który z kolei wiąże się z siłą obciążającą pochodzącą od spinaczy:

$$nmg = 2N \sin \alpha \approx 2k_f \Delta L \frac{2h}{L} \approx 2k_f \left(\frac{2h^2}{L} + L - L_0 \right) \frac{2h}{L}. \quad (52)$$

$$\frac{nmg}{h} \approx k_f \frac{8h^2}{L^2} + \frac{4k_f(L - L_0)}{L}. \quad (53)$$

Po uwzględnieniu związku (47):

$$\frac{nmg}{h} \approx k \frac{L_1}{L_0} \frac{8h^2}{L^2} + k \frac{L_1}{L_0} \frac{4(L - L_0)}{L} \approx k \frac{8L_1 h^2}{L^3} + \frac{4kL_1(L - L_0)}{L^2}. \quad (54)$$

Oznacza to, że wykreślając wykres zależności $\frac{nmg}{h}$ od $\frac{8L_1 h^2}{L^3}$ oczekujemy zależności liniowej, której współczynnik kierunkowy jest szukaną stałą sprężystości.

Część doświadczalna

W doświadczeniu wykorzystany został włos o całkowitej długości $L_1 = 350$ mm. Niezbędne pomiary wykonane zostały w układzie pomiarowym skonstruowanym zgodnie z przedstawionym na rysunku 1 schematem. Odległość L wynosiła 290 mm. W rozwiązaniu wykorzystano spinacze biurowe o masie (324 ± 5) mg. Na środku zamocowanego na końcach włosa dokładano kolejno spinacze i mierzono ich obniżenie h względem wyjściowego położenia włosa (lekko napiętego bez obciążenia). Pomiar wysokości h opierał się na odczycie pozycji środka włosa na pionowo zamocowanym papierze milimetrowym. Dokładność odczytu oszacowano na ± 1 mm.

Uzyskane w doświadczeniu wyniki zebrano w tabeli 2.

Liczba spinaczy n	Obniżenie h (mm)
1	7
2	10,5
4	14
8	19
10	21
12	22,5
15	25

Tabela 2: Wyniki pomiarów obniżenia środka drutu pod wpływem obciążenia spinaczami.

Zgodnie z rozważaniami z części teoretycznej na podstawie zebranych danych wyznaczono wielkości $\frac{nmg}{h}$ oraz $\frac{8L_1 h^2}{L^3}$ i naniesiono je na wykres (Rys. 6).

Dopasowując prostą do punktów na wykresie wyznaczamy nachylenie odpowiadające szukanej stałej sprężystości $k = (22 \pm 2)$ N/m. Niepewność tego wyniku określona została na podstawie różnicy między skrajnymi wartościami nachylenia prostych na rysunku 6 poprowadzonych przez punkty na wykresie z uwzględnieniem ich niepewności.

Głównym czynnikiem wpływającym na niepewność przeprowadzonego pomiaru jest niepewność odczytu odległości h wynosząca 5–10%, która przekłada się na podobną niepewność wyniku końcowego.

Punktacja zadania D3.

Część teoretyczna

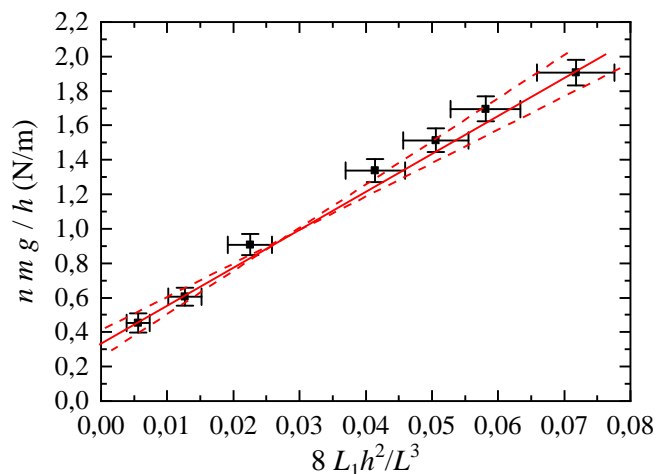
Uwzględnienie wpływu długości włosa na wartość stałej sprężystości (równanie 47): 1 pkt.

Pomysł na przeprowadzenie pomiaru: 3 pkt.

Wyprowadzenie wzoru pozwalającego na wyznaczenie k_f (np. równanie 54): 6 pkt.

Część doświadczalna

Zestawienie układu doświadczalnego: 2 pkt.



Rysunek 6: Wykres zależności $\frac{nmg}{h}$ od $\frac{8L_1h^2}{L^3}$

Wykonanie przynajmniej 5 pomiarów (w naszym przypadku dla różnych liczby spinaczy): 3 pkt.

Wykonanie wykresu lub równoważna analiza umożliwiająca wyznaczenie k na podstawie zmierzonych danych: 2 pkt.

Uwzględnienie w analizie danych kwestii początkowego napięcia włosa, np. poprzez dopasowanie prostej jak w przedstawionym rozwiązaniu. Dopuszczalne jest również zaniedbanie tego efektu (tj. przyjęcie $L_0 = L$), o ile słuszność modelu zostanie potwierdzona post-factum przez sprawdzenie związku $nmg \propto h^3$ dla zebranych danych: 1 pkt.

Wartość liczbowa uzyskanego wyniku wraz z niepewnością pomiarową i wskazaniem głównych jej źródeł: 2 pkt.