LXVIII OLIMPIADA FIZYCZNA

ZAWODY III STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

Zadanie 1.

Dane są jednakowe oporniki 1 i 2 o stałym cieple właściwym oraz oporze zależnym od temperatury T według wzoru

$$R = R_0\left(1+\alpha\,\Delta T\right),$$

gdzie R_0 – opór w temperaturze równej temperaturze otoczenia T_0, $\Delta T = T - T_0$, α – stała dodatnia. Tempo odpływu ciepła $\Delta Q/\Delta t$ z każdego z oporników do otoczenia jest proporcjonalne do różnicy temperatur ΔT

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \beta\,\Delta T,$$

gdzie β jest pewną stałą dodatnią.

Oporniki te połączono szeregowo i podłączono do źródła stałego napięcia U. Zakładamy, że ciepło przepływa między każdym z oporników a otoczeniem, ale nie między opornikami.

a) Jeśli początkowe temperatury T_1 i T_2 oporników były nieznacznie większe od T_0 i różne od siebie (przyjmij $T_1 > T_2$), to czy jest możliwe, że różnica tych temperatur zaczęła rosnąć? Jeśli tak, to jaki warunek muszą spełniać parametry U, R_0, α i β, aby tak się stało?

b) Czy jest możliwe, że po długim czasie i ustaleniu się temperatur T_1 i T_2 pozostawały one różne? Jeśli tak, to jaki warunek muszą spełniać parametry U, R_0, α oraz β, aby tak się stało?

Zadanie 2.

W dniu 12 sierpnia 2018 roku wystrzelono sondę kosmiczną Parker Solar Probe mającą zbadać okolice Słońca, w tym koronę słoneczną. Zastanówmy się, „jak gorąco” jest w odległościach, na jakie ta sonda zbliży się do Słońca.

Odległość sondy od środka Słońca przez cały rozpatrywany czas jest równa d (przy czym $d \gg R_\mathrm{S}$). Słońce potraktuj jako kuliste ciało doskonale czarne o promieniu R_S i temperaturze powierzchni T_S. Pomiń wiatr słoneczny.

A. Przyjmij, że sonda jest kulą o promieniu r i jednorodnej temperaturze i że można ją traktować jako ciało doskonale czarne.

1. Wyznacz temperaturę (absolutną) T_r, jaką osiągnęłaby sonda po długim czasie przebywania w odległości d od środka Słońca.

2. Oszacuj z dokładnością do 10% czas, po jakim sonda osiągnęłaby temperaturę równą $T_\mathrm{r}/2$, gdyby nagrzewała się jednorodnie od temperatury zbliżonej do 0 K. Przyjmij, że gęstość materiału, z którego jest zbudowana sonda, jest stała i wynosi ρ, natomiast średnie ciepło właściwe w trakcie nagrzewania wynosi C (zgodnie z III zasadą termodynamiki ciepło właściwe musi maleć do zera gdy temperatura dąży do 0 K, ponieważ jednak chcemy tylko oszacować czas nagrzewania, użyjemy tu średniego ciepła właściwego).

B. Przypuśćmy, że w tej samej odległości d od środka Słońca co sonda znajduje się jednorodna kula puchu lodowego o gęstości ρ_L i początkowym promieniu r. Wyznacz czas, po jakim ta kula całkowicie wysublimowałaby pod wpływem promieniowania Słońca.
Przyjmij, że rozważana kula się nie nagrzewa (zewnętrzne warstwy sublimują bez nagrzewania wewnętrznych warstw), powierzchnia kuli pochłania całe padające na nią promieniowanie, a ciepło sublimacji lodu wynosi L. Przyjmij również, że kula sublimuje w taki sposób, że jej kształt jest zachowany.

We wszystkich przypadkach (A.1, A.2 oraz B) podaj wartości liczbowe, przyjmując $R_\mathrm{S} = 7\cdot 10^5$ km, $T_\mathrm{S} = 5800$ K, $d = 10R_\mathrm{S}$, $C = 900$ J/(kg·K), $r = 0{,}4$ m, $\rho = 2{,}7\cdot 10^3$ kg/m^3, $\rho_\mathrm{L} = 0{,}5\cdot 10^3$ kg/m^3,
$L = 2{,}7\cdot 10^6$ J/kg.

Zadanie 3.

Na każde z trzech małych ciał o różnych masach m_1, m_2, m_3 działają tylko siły wzajemnego przyciągania grawitacyjnego. Początkowo te ciała znajdowały się w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku b_0.

a) Udowodnij, że jest możliwy taki ruch ciał, że ich wzajemne odległości pozostaną niezmienione. Wyznacz prędkość kątową ω_r obrotu trójkąta o wierzchołkach wyznaczonych położeniem ciał.

b) Udowodnij, że jest możliwy taki ruch ciał w płaszczyźnie wyznaczonej przez ich początkowe położenie, że ich wzajemne odległości się zmieniają, ale pozostają sobie równe (trójkąt o wierzchołkach wyznaczonych położeniem ciał jest stale równoboczny).

c) W chwili początkowej prędkości każdego z ciał są takie, jakby trójkąt obracał się bez zmiany wielkości, w swojej płaszczyźnie, z prędkością kątową ω_0 mniejszą od prędkości ω_r z punktu a). Oblicz minimalną długość boku trójkąta b_min, która wystąpi w czasie ruchu ciał.

Wzory, które mogą być przydatne

Zgodnie z prawem Stefana-Boltzmanna ciało doskonale czarne o powierzchni S i temperaturze absolutnej T wysyła promieniowanie o mocy $P = \sigma S T^4$, gdzie $\sigma = 5{,}7\cdot 10^{-8}$ W/$\left(\mathrm{m^2K^4}\right)$jest stałą Stefana-Boltzmanna.

Dla $|x| \ll 1$: $(1+x)^r \approx 1 + rx$, $\ln(1+x) \approx x$.

LXVIII OLIMPIADA FIZYCZNA
ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAWODÓW III STOPNIA
CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Rozwiązanie zadania 1

a) Natężenie prądu w obwodzie jest równe

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{U}{R_0\left(2 + \alpha\left(\Delta T_1 + \Delta T_2\right)\right)}. \tag{1}$$

Zgodnie z zasadą zachowania energii zmiana ΔT temperatury ciała o masie m i stałym cieple właściwym C jest równa

$$\Delta T = \frac{P\Delta t}{mC},$$

gdzie P jest różnicą między dostarczną a odbieraną mocą, natomiast Δt odstępem czasu, w jakim się to odbywa.

Zatem tempie wzrostu temperatury opornika decyduje różnica między przekazywaną mocą prądu a mocą odbieraną w postaci ciepła. Dla opornika 1 ta różnica wynosi

$$P_1 = I^2 R_1 - \beta\,\Delta T_1 = \frac{U^2}{R_0}\frac{1 + \alpha\,\Delta T_1}{\left(2 + \alpha\left(\Delta T_1 + \Delta T_2\right)\right)^2} - \beta\,\Delta T_1. \tag{2}$$

Jeśli ΔT_1 i ΔT_2 są małe, to w powyższym wzorze można pozostawić tylko wyrazy zerowego i pierwszego rzędu

$$P_1 \approx \frac{U^2}{4R_0}\left(1 - \alpha\,\Delta T_2\right) - \beta\,\Delta T_1. \tag{3}$$

Dla opornika 2 analogiczna moc P_2 różni się od P_1 tylko zamianą ΔT_1 i ΔT_2 w tym wyrażeniu. Wzrost lub spadek różnicy między temperaturami T_1 i T_2 zależy od znaku wielkości $P_1 - P_2$, która jest równa

$$P_1 - P_2 \approx \left(\frac{U^2\alpha}{4R_0} - \beta\right)\left(\Delta T_1 - \Delta T_2\right) = \left(\frac{U^2\alpha}{4R_0} - \beta\right)\left(T_1 - T_2\right). \tag{4}$$

Różnicę mocy możemy wyznaczyć też ściśle. W takim przypadku otrzymujemy

$$P_1 - P_2 = \left(\frac{U^2}{R_0}\frac{\alpha}{\left(2 + \alpha\left(\Delta T_1 + \Delta T_2\right)\right)^2} - \beta\right)\left(T_1 - T_2\right). \tag{5}$$

Po uwzględnieniu, że ΔT_1 i ΔT_2 są małe, wzór (5) sprowadza się do wzoru (4).

Zatem odpowiedź na postawione pytanie brzmi: tak, jest to możliwe pod warunkiem, że

$$\frac{U^2\alpha}{4R_0} > \beta. \tag{6}$$

b) Jak wyżej, natężenie prądu jest równe $I = \frac{U}{R_0(2+\alpha(\Delta T_1+\Delta T_2))}$, a ponadto w stanie stacjonarnym (gdy temperatury pozostają stałe) obowiązują równania $P_1 = P_2 = 0$, czyli

$$\frac{U^2}{R_0}\frac{1+\alpha\,\Delta T_1}{(2+\alpha\,\Delta T_c)^2} = \beta\Delta T_1, \quad \frac{U^2}{R_0}\frac{1+\alpha\,\Delta T_2}{(2+\alpha\,\Delta T_c)^2} = \beta\,\Delta T_2. \tag{7}$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenie $\Delta T_c = \Delta T_1 + \Delta T_2$.

Dla ustalonego ΔT_c równania (7) są identycznymi równaniami liniowymi na ΔT_1 oraz ΔT_2, z czego wynika, że mają to samo rozwiązanie (lub w szczególnym przypadku – oba nie mają rozwiązania). Można to również otrzymać jawnie, np. dzieląc równania (7) przez siebie stronami. Otrzymamy wtedy

$$\frac{1+\alpha\,\Delta T_1}{1+\alpha\,\Delta T_2} = \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2},$$

a stąd

$$\Delta T_2 = \Delta T_1.$$

Zatem odpowiedź na postawione w punkcie b) pytanie jest negatywna – niezależnie od wartości parametrów.

Punktacja zadania 1

Natężenie prądu w obwodzie (wzór (1)) – 1 pkt.

Różnica między przekazywaną mocą prądu a mocą odbieraną w postaci ciepła (wzór (2) lub równoważny) – 2 pkt.

Różnica między P_1 a P_2 i stwierdzenie, że jest to wielkość decydująca o wzroście lub spadku różnicy między temperaturami T_1 i T_2 (wzór (4), (5) lub równoważny) – 2 pkt.

Wynik końcowy dla pkt. a) (wzór (6)) – 2 pkt.

Stwierdzenie, że sytuacja rozpatrywana w punkcie b) jest niemożliwa wraz z uzasadnieniem – 3 pkt.

Rozwiązanie zadania 2

A.1. Z prawa Stefana-Boltzmanna wynika, że Słońce wysyła promieniowanie o mocy $4\pi\sigma R_S^2 T_S^4$. Całe to promieniowanie dociera na odległość d od środka Słońca, zatem moc na jednostkę powierzchni w tej odległości wynosi

$$p = \frac{4\pi R_S^2 \sigma T_S^4}{4\pi d^2} = \sigma\frac{R_S^2}{d^2}T_S^4. \tag{8}$$

Po długim czasie temperatura sondy nie będzie się zmieniała – ilość pochłanianej energii ze Słońca będzie równa ilości energii wypromieniowywanej, czyli

$$\pi r^2 p = 4\pi r^2 \sigma T_r^4. \tag{9}$$

Stąd otrzymujemy $T_r = \sqrt[4]{p/(4\sigma)}$,
a więc

$$T_r = \sqrt{\frac{R_S}{2d}}T_S. \tag{10}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy

$$T_r \approx 1300\ \mathrm{K}. \tag{11}$$

A.2. Gdy temperatura sondy wynosi T, sonda wypromieniowuje moc $4\pi\sigma r^2 T^4$, zatem moc zużywana na podgrzewanie sondy wynosi

$$P_{\mathrm{ef}} = \pi r^2 p - 4\pi r^2 \sigma T^4 = \tag{12}$$

$$= 4\pi\sigma r^2 T_{\mathrm{r}}^4 \left(1 - \frac{T^4}{T_{\mathrm{r}}^4}\right). \tag{13}$$

Moc ta zmienia się od $P_{\mathrm{ef,\,max}} = 4\pi r^2 \sigma T_{\mathrm{r}}^4$ (dla $T = 0$) do $P_{\mathrm{ef,\,min}} = 4\pi r^2 \sigma T_{\mathrm{r}}^4 \left(1 - \frac{1}{16}\right) = 4\pi r^2 \sigma T_{\mathrm{r}}^4 \cdot 0{,}9375$ (dla $T = \frac{1}{2}T_{\mathrm{r}}$). Podgrzanie sondy wymaga dostarczenia energii $\frac{1}{2}mCT_{\mathrm{r}}$, gdzie $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ jest masą sondy. Zatem czas podgrzewania sondy do temperatury $\frac{1}{2}T_{\mathrm{r}}$ zawiera się w przedziale

$$\left(\frac{\frac{1}{2}mCT_{\mathrm{r}}}{P_{\mathrm{ef,\,max}}},\ \ \frac{\frac{1}{2}mCT_{\mathrm{r}}}{P_{\mathrm{ef,\,min}}}\right). \tag{14}$$

Względna szerokość tego przedziału wynosi $\frac{1}{15} \approx 7\%$, zatem wynik nieuwzględniający w ogóle promieniowania sondy jest wynikiem nie różniącym się od ścisłego o więcej niż 7%. Zatem przybliżony hipotetyczny czas nagrzewania sondy do temperatury $T_{\mathrm{r}}/2$ wynosi

$$t = \frac{\rho r C}{6\sigma \left(\frac{R_{\mathrm{S}}}{2d}\right)^{3/2} T_{\mathrm{S}}^3} \approx \tag{15}$$

$$\approx 1300 \text{ s } (-0\%,\ \ +10\%). \tag{16}$$

B.

Prędkość sublimacji (ubytek masy w jednostce czasu) bryły o promieniu r' jest równy ilorazowi całkowitej mocy promieniowania pochłanianego przez kulę i ciepła właściwego lodu:

$$\frac{p\pi\left(r'\right)^2}{L}, \tag{17}$$

gdzie p jest mocą wyznaczoną w punkcie A.1.

Przy zmniejszeniu promienia o małą wielkość δr ubytek masy wynosi $4\pi\left(r'\right)^2 \rho_{\mathrm{L}} \delta r$, zatem prędkość v_r zmiany promienia lodowej kuli wynosi

$$v_r = \frac{p}{4\rho_{\mathrm{L}} L}. \tag{18}$$

Ponieważ jest to wielkość stała, szukany czas sublimacji wynosi $\frac{r}{v_r} = \frac{4\rho_{\mathrm{L}} L r}{p}$, czyli

$$t_{\mathrm{s}} = \frac{4\rho_{\mathrm{L}} L r}{\sigma T_{\mathrm{S}}^4 R_{\mathrm{S}}^2 / d^2}. \tag{19}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy

$$t_{\mathrm{s}} \approx 3{,}4 \cdot 10^3 \text{ s}.$$

Punktacja zadania 2

A.1.

Moc promieniowania Słońca (na jednostkę powierzchni) w pobliżu sondy (wzór (8)) – 1 pkt.
Równowagowa temperatura sondy (wzór (10)) – 1 pkt.

A.2.
Rozważenie energii wypromieniowywanej przez sondę (wzór (12) lub równoważny) – 1 pkt.
Uzasadnienie, że w ramach oczekiwanej dokładności można pominąć energie wypromieniowywaną przez sondę – 1 pkt.
Szukany czas (wzór (15) lub równoważny) – 1 pkt.
B.
Prędkość sublimacji (wzór (17) lub równoważny) – 1 pkt.
Prędkość zmiany promienia kuli (wzór (18) lub równoważny) – 1 pkt.
Szukany czas sublimacji (wzór (19) lub równoważny) – 1 pkt.
Poprawne wartości liczbowe w przypadkach a), b) i c) – 2 pkt (1 pkt w przypadku dwóch z trzech poprawnych wartości).

Rozwiązanie zadania 3

Zauważmy, że jeżeli początkowe prędkości ciał leżą w płaszczyźnie wyznaczonej przez początkowe położenie tych trzech ciał, to cały ruch będzie się odbywał w tej płaszczyźnie – siły oddziaływań grawitacyjnych między ciałami również będą działały w tej płaszczyźnie. Możemy więc ograniczyć nasze rozważania do ruchów w początkowej płaszczyźnie i poniższe rozważania będą dotyczyły takiej sytuacji.

Ponieważ na układ nie działają siły zewnętrzne, jego środek masy nie doznaje przyspieszenia i związany z nim układ odniesienia jest układem inercjalnym. Możemy więc bez dodatkowych komplikacji prowadzić nasze rozważania w tym układzie odniesienia, czyli przyjąć, że środek masy spoczywa.

a) Oznaczmy przez $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ wektory położenia poszczególnych ciał względem ich wspólnego środka masy. Z definicji środka masy mamy

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 = \vec{0}. \tag{20}$$

Przyspieszenie grawitacyjne pierwszego ciała jest równe

$$\vec{a}_1 = \frac{Gm_2}{b_0^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \frac{Gm_3}{b_0^3}(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) = \tag{21}$$

$$= \frac{G}{b_0^3}(m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 - m_2\vec{r}_1 - m_3\vec{r}_1) = \tag{22}$$

$$= -\frac{G}{b_0^3}M\ \vec{r}_1, \tag{23}$$

przy czym w ostatnim przekształceniu skorzystaliśmy ze wzoru (20) i wprowadziliśmy oznaczenie $M = m_1 + m_2 + m_3$.
W analogiczny sposób otrzymamy $\vec{a}_2 = -\frac{G}{b_0^3}M\ \vec{r}_2$, $\vec{a}_3 = -\frac{G}{b_0^3}M\ \vec{r}_3$.
Rozważmy teraz sytuację, w której trójkąt wyznaczony przez położenia trzech ciał obraca się z prędkością kątową ω wokół wspólnego środka masy. Ciała będą poruszały się wtedy po okręgach o środkach pokrywających się ze środkiem masy. Aby utrzymać taki ruch, przyspieszenie dośrodkowe każdego z ciał musi wynosić odpowiednio $-\omega^2\vec{r}_1$, $-\omega^2\vec{r}_2$ oraz $-\omega^2\vec{r}_3$. Zatem, jeśli

$$\omega^2 = \frac{G}{b_0^3}M, \tag{24}$$

to ciała poruszają się tak, że pozostają w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku b_0. Stąd

$$\omega_{\mathrm{r}} = \sqrt{\frac{G}{b_0^3}(m_1 + m_2 + m_3)}. \tag{25}$$

b)

Załóżmy, że ciała poruszają się tak, że pozostają w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku b, przy czym b może się zmieniać. W tej sytuacji wzór (23) oraz jego odpowiedniki dla $\vec{a}_2$ i $\vec{a}_3$ pozostają w mocy, przy czym powinniśmy zastąpić b_0 przez zmienną długość boku trójkąta b:

$$\vec{a}_1 = -\frac{G}{b^3} M\ \vec{r}_1, \quad \vec{a}_2 = -\frac{G}{b^3} M\ \vec{r}_2, \quad \vec{a}_3 = -\frac{G}{b^3} M\ \vec{r}_3. \tag{26}$$

Zauważmy, że ponieważ ciała pozostają stale w wierzchołkach trójkąta równobocznego, a położenie środka masy nie ulega zmianie, wielkości $\beta_1 = r_1/b$, $\beta_2 = r_2/b$ oraz $\beta_3 = r_3/b$ są w trakcie ruchu stałe. Wprowadźmy wektory $\vec{b}_i$, takie że $\vec{r}_i = \beta_i \vec{b}_i$ (z definicji mamy $|\vec{r}_i| = b$), oraz odpowiadające im przyspieszenia $\vec{A}$, takie że $\vec{a}_i = \beta_i \vec{A}_i$ ($i = 1,\ 2\ ,3$). W nowych zmiennych wzory (26) na przyspieszenia można przepisać następująco

$$\beta_i \vec{A}_i = -\beta_i GM \cdot \frac{\vec{b}_i}{b^3},\ i = 1,\ 2\ ,3. \tag{27}$$

czyli po prostu

$$\vec{A}_i = -GM \cdot \frac{\vec{b}_i}{b^3},\ i = 1,\ 2\ ,3. \tag{28}$$

Równania te mają identyczną postać oraz symetrię sferyczną.

Z tego wynika, że jeśli $\vec{b}_1(t)$ jest rozwiązaniem odpowiedniego z powyższych równań, to po obróceniu $\vec{b}_1(t)$ wokół środka masy układu możemy otrzymać $\vec{b}_2(t)$ oraz $\vec{b}_3(t)$ będące rozwiązaniem odpowiadających im równań. Z konstrukcji zachodzi $\left|\vec{b}_1(t)\right| = \left|\vec{b}_2(t)\right| = \left|\vec{b}_3(t)\right| = b$, a kąty między każdą parą rozważanych wektorów nie zmieniają się. Wynika stąd, że jeśli wektorów $\beta_1\vec{b}_1(t=0)$, $\beta_2\vec{b}_2(t=0)$, $\beta_3\vec{b}_3(t=0)$ znajdowały się w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku b_0, to końce wektorów $\beta_1\vec{b}_1(t)$, $\beta_2\vec{b}_2(t)$, $\beta_3\vec{b}_3(t)$ będą znajdowały się w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku b. Skonstruowany w ten sposób ruch trzech ciał spełnia więc wszystkie przyjęte przez nas wcześniej założenia, zatem możliwy jest ruch opisany w punkcie b).

Można zadać pytanie, czy istnieje rozwiązanie $\vec{b}_1(t)$, od którego zaczęliśmy konstrukcję? Zauważmy, że pojedyncze równanie (28) to w istocie dobrze nam znane równanie ruchu ciała w polu grawitacyjnym nieruchomego punktu materialnego o masie M. Znamy wiele rozwiązań tego równania – aby uzyskać przykład ruchu opisanego w punkcie b) wystarczy wybrać dowolne z nich (za wyjątkiem ruchu po okręgu – wtedy bowiem otrzymamy ruch opisany w punkcie a) ze stałą długością boku trójkąta).

W szczególności, jeśli rozważane ciała spoczywały w chwili początkowej, to aż do momentu zderzenia we wspólnym środku masy odległości między nimi będą równe (a wyznaczany przez nie trójkąt nie będzie się obracał). Również jeśli w chwili początkowej te ciała obracały się z tą samą prędkością kątową wokół wspólnego środka masy, a ich prędkość zbliżania do tego środka była równa zero (jest to sytuacja z punktu c)), to odległości między nimi będą równe.

c)

Rozwiązanie I punktu c) (wykorzystanie zasad zachowania dla całego układu).

Na układ nie działają żadne siły zewnętrzne, zatem zachowany jest jego całkowity moment pędu, a położenie środka masy nie ulega zmianie. Również energia mechaniczna układu jest zachowana.

Z punktu b) wynika, że w każdym momencie ciała będą się znajdowały w wierzchołkach trójkąta równobocznego.

Początkowa energia grawitacyjna układu tych ciał wynosi

$$E_{g0} = -\frac{G\left(m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1\right)}{b_0}, \tag{29}$$

a energia kinetyczna w układzie środka masy

$$E_{k0} = \frac{1}{2}\left(m_1 r_{10}^2 + m_2 r_{20}^2 + m_3 r_{30}^2\right)\omega_0^2, \tag{30}$$

gdzie r_{10}, r_{20}, r_{30} są odległościami poszczególnych ciał od ich wspólnego środka masy w chwili początkowej. Przyjmijmy, że najmniejsza odległość, na jaką się zbliżą te ciała to $b_{\min}$, a prędkość kątowa w chwili największego zbliżenia to $\omega_{\min}$. Zauważmy, że w momencie największego zbliżenia szybkość zmiany odległości między ciałami jest równa 0, a zatem trójkąt obraca się bez zmiany wielkości. Oznaczając przez $r_{1\,\min}$, $r_{2\,\min}$, $r_{3\,\min}$ odległości poszczególnych ciał od ich wspólnego środka masy w chwili największego zbliżenia, otrzymamy następujące wyrażenia na energię potencjalną $E_{g\,\min}$ oraz energię kinetyczną $E_{k\,\min}$ w chwili największego zbliżenia

$$E_{g\,\min} = -\frac{G\left(m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1\right)}{b_{\min}}, \quad E_{k\,\min} = \frac{1}{2}\left(m_1 r_{1\,\min}^2 + m_2 r_{2\,\min}^2 + m_3 r_{3\,\min}^2\right)\omega_{\min}^2. \tag{31}$$

Zauważmy, że zachodzi

$$r_{1\,\min} = r_{10}\frac{b_{\min}}{b_0},\ r_{2\,\min} = r_{20}\frac{b_{\min}}{b_0},\ r_{3\,\min} = r_{30}\frac{b_{\min}}{b_0} \tag{32}$$

Moment pędu układu jest zachowany, co oznacza, że

$$\left(m_1 r_{10}^2 + m_2 r_{20}^2 + m_3 r_{30}^2\right)\omega_0 = \left(m_1 r_{1\,\min}^2 + m_2 r_{2\,\min}^2 + m_3 r_{3\,\min}^2\right)\omega_{\min}, \tag{33}$$

czyli

$$\omega_{\min} = \omega_0\left(\frac{b_0}{b_{\min}}\right)^2. \tag{34}$$

Zachowana jest też energia mechaniczna

$$E_{k0} + E_{g0} = E_{k\,\min} + E_{g\,\min}. \tag{35}$$

Uwzględniając wzory (32) oraz (34), otrzymujemy

$$E_{k0} + E_{g0} = E_{k0}\left(\frac{b_0}{b_{\min}}\right)^2 + E_{g0}\frac{b_0}{b_{\min}}. \tag{36}$$

Jest to równanie kwadratowe na $\frac{1}{b_{\min}}$, którego jednym rozwiązaniem jest $\frac{1}{b_0}$, a drugim

$$\frac{1}{b_{\min}} = -\frac{1}{b_0}\left(1 + \frac{E_{g0}}{E_{k0}}\right). \tag{37}$$

Zauważmy, że $\vec{r}_1 = \left(-m_2\vec{r}_{21} + m_3\vec{r}_{13}\right)/M$, gdzie $\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, $\vec{r}_{13} = \vec{r}_1 - \vec{r}_3$,a zatem

$$m_1 r_1^2 = m_1\frac{m_2^2 r_{21}^2 + m_3^2 r_{13}^2 - 2m_2 m_3 \vec{r}_{21}\cdot\vec{r}_{13}}{M^2} = m_1\frac{m_2^2 b^2 + m_3^2 b^2 + m_2 m_3 b^2}{M^2},$$

gdzie wykorzystaliśmy $|\vec{r}_{21}| = |\vec{r}_{13}| = b$, $\vec{r}_{21}\cdot\vec{r}_{13} = b^2\cos 120^0 = -b^2/2$.

Analogiczne związki zachodzą dla $m_2 r_2^2$ oraz $m_3 r_3^2$, stąd

$$m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 = \frac{m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_1 m_3}{M} b^2. \tag{38}$$

Zatem

$$\frac{E_{\mathrm{g}0}}{E_{\mathrm{k}0}} = -\frac{2GM}{b^3 \omega_0^2}, \tag{39}$$

i otrzymujemy

$$\frac{1}{b_{\min}} = \frac{1}{b_0}\left(\frac{2GM}{b^3 \omega_0^2} - 1\right). \tag{40}$$

0statecznie

$$b_{\min} = \frac{b_0}{2G\left(m_1 + m_2 + m_3\right) / \left(\omega_0^2 b_0^3\right) - 1}. \tag{41}$$

Zauważmy, że warunek $\omega_0 < \omega_r$ wraz z równaniem (25) oznaczają, że $2G\left(m_1 + m_2 + m_3\right) / \left(\omega_0^2 b_0^3\right) > 2$, czyli zgodnie z oczekiwaniami $b_{\min} < b_0$.

Zauważmy również, że zarówno rozwiązanie metodą I jak i wynik w przypadku c) są analogiczne do przypadku trzech równych mas (patrz zadanie T3 w drugiej części I stopnia 68. Olimpiady Fizycznej).

Rozwiązanie II punktu c) (wykorzystanie efektywnych zasad zachowania dla każdego z ciał z osobna).

Zauważmy, że prawa strona równań (28) ma postać przyspieszenia grawitacyjnego z prawa grawitacji Newtona, któremu odpowiada jej energia grawitacyjna $-GMm_i/b$. Zatem każde z równań (28) prowadzi do odpowiadającej mu „zasady zachowania energii":

$$\frac{V^2}{2} + \frac{(\omega b)^2}{2} - \frac{GM}{b} = \mathrm{const}, \tag{42}$$

przy czym ω jest prędkością kątową obrotu każdego z wektorów $\vec{b}_1(t)$, $\vec{b}_2(t)$, $\vec{b}_3(t)$ (czyli prędkością kątową ruchu każdego z ciał wokół wspólnego środka masy), natomiast V jest prędkością zmiany b; $V^2/2 + (\omega b)^2/2$ jest „energią kinetyczną" danego ciała podzieloną przez jego masę.

Zgodnie ze wzorem (27) siła działająca na ciało i jest siłą centralną, zatem moment pędu tego ciała L_i jest zachowany. Stąd

$$\frac{L_i}{m_i} = \omega r_i^2 = \omega \beta_i^2 b^2 = \omega_0 \beta_i^2 b_0^2. \tag{43}$$

A zatem

$$\omega = \frac{\omega_0 b_0^2}{b^2}. \tag{44}$$

Po podstawieniu powyższego wyrażenia na ω do równania (42) otrzymujemy

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{\left(\omega_0 b_0^2\right)^2}{2b^2} - \frac{GM}{b} = \mathrm{const}\,. \tag{45}$$

W chwili początkowej i w chwili największego zbliżenia mamy $V = 0$, stąd

$$\frac{\omega_0^2 b_0^2}{2} - \frac{GM}{b_0} = \frac{\left(\omega_0 b_0^2\right)^2}{2b^2} - \frac{GM}{b}. \tag{46}$$

Jest to równanie kwadratowe na $\frac{1}{b}$ którego jednym z rozwiązań jest $\frac{1}{b_0}$, zatem drugim rozwiązaniem jest

$$\frac{1}{b_{\min}} = -\frac{\omega_0^2 b_0^2/2 - GM/b_0}{\left(\omega_0 b_0^2\right)^2/2} b_0,$$

co jest równoważne wzorowi (40) z rozwiązania I, czyli ostatecznie otrzymujemy ten sam wynik (41) co w rozwiązaniu I.

Punktacja zadania 3

a)

Szukana prędkość kątowa (wzór (18)) wraz z uzasadnieniem – 3 pkt.

b)

Stwierdzenie i uzasadnienie (np. sprowadzenie poprzez odpowiednią zamianę zmiennych równań ruchu dla każdej z mas do takiego samego wzoru) faktu, że taka sytuacja jest możliwa – 2 pkt.

c)

Rozwiązanie I

Zasada zachowania momentu pędu układu (wzór (33) lub równoważny) wraz z jej wykorzystaniem – 1 pkt.

Zasada zachowania energii układu (wzór (35) oraz wzory (31), (29) (30) lub wzory równoważne) wraz z jej wykorzystaniem – 1 pkt.

Równanie pozwalające wyznaczyć $b_{\min}$ na podstawie parametrów początkowych (wzór (33) lub równoważny) – 2 pkt.

Wynik końcowy (wzór (41)) – 1 pkt.

Rozwiązanie II

Efektywna zasada zachowania momentu pędu dla pojedynczej masy (wzór (43) lub równoważny) wraz z jej wykorzystaniem – 1 pkt.

Efektywna zasada zachowania energii dla pojedynczej masy (wzór (42) lub równoważny; wystarczające jest rozważenie przypadku zerowej prędkości radialnej) wraz z jej wykorzystaniem – 1 pkt.

Równanie pozwalające wyznaczyć $b_{\min}$ na postawie parametrów początkowych (wzór (46) lub równoważny) – 2 pkt.

Wynik końcowy (wzór (41)) – 1 pkt.