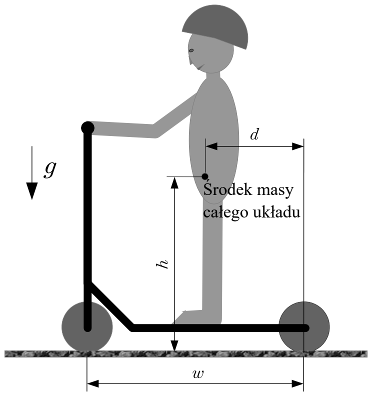
LXX OLIMPIADA FIZYCZNA

ZAWODY III STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA, 11.04.2021

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

Zadanie 1



Rozważmy hulajnogę elektryczną wraz z jadącą na niej osobą. Całkowita masa układu jest równa M, a masę kół oraz wirnika silnika można pominąć. Promień każdego z kół hulajnogi wynosi r, odległość między ich osiami jest równa w. Składowe pozioma oraz pionowa położenia środka masy hulajnogi wraz z jadącą na niej osobą, mierzone względem punktu styczności tylnego koła z drogą, wynoszą odpowiednio d oraz h – patrz rysunek. Hulajnoga ma napęd na przednie koło, a maksymalna moc jej silnika wynosi P. Współczynnik tarcia kół o podłoże jest równy f, a droga jest pozioma. Zakładając, że przy dowolnej prędkości silnik może działać z pełną mocą oraz pomijając opory ruchu, wyznacz minimalny czas rozpędzania hulajnogi od spoczynku do prędkości v_{k}.

Podaj wynik liczbowy dla $v_{\mathrm{k}} = 25$ km/h, $P = 500$ W, $M = 80$ kg, $h = 1{,}0$ m, $r = 0{,}1$ m, $w = 1{,}0$ m, $d = 0{,}5$ m, $g = 9{,}8$ m/s^2, $f = 0{,}5$.

Zadanie 2

Zamknięty obwód kołowy (pętla) znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o zmiennej indukcji. W przedziale czasu $0 < t < t_0$ ta indukcja wyraża się wzorem

$$B(t) = B_0\left(1 - \left(\frac{t}{t_0}\right)^2\right),$$

gdzie B_0 i t_0 są stałymi parametrami. Pętla ma promień r i jest wykonana z drutu o oporze na jednostkę długości ρ. Płaszczyzna obwodu jest prostopadła do kierunku pola magnetycznego.

Wyznacz minimalną wytrzymałość drutu na zerwanie W taką, żeby w przedziale czasu $0 < t < t_0$ pętla nie uległa rozerwaniu.

Podaj wartość liczbową tej wytrzymałości dla $B_0 = 4$ T, $t_0 = 0{,}2$ s, $r = 10$ cm, $\rho = 0{,}1$ Ω/m.

Pomiń rozciągliwość (sprężystość) drutu oraz przyjmij, że indukcja pola magnetycznego pochodzącego od prądu płynącego w pętli jest znacznie mniejsza od indukcji pola zewnętrznego.

Wytrzymałość drutu na zerwanie to maksymalna rozciągająca go siła, przy której nie ulegnie on rozerwaniu.

Zadanie 3

Nowo powstała spółka „Na Marsie będzie Ci lżej" planuje organizować wycieczki z niskiej orbity okołoziemskiej w pobliże Marsa (pozostałe części podróży klienci mają przebyć własnym transportem lub wynająć kosmiczną taksówkę).

Przyjmij, że wycieczkę można podzielić na następujące etapy:

1. Oddalenie się z niskiej (odległość od powierzchni Ziemi jest znacznie mniejsza od jej promienia), kołowej orbity okołoziemskiej na stosunkowo dużą odległość od Ziemi (taką, że wpływ pola grawitacyjnego Ziemi można zaniedbać, ale małą w porównaniu z odległością Ziemia – Mars). Na tym etapie pomijamy grawitację Słońca, a uwzględniamy tylko grawitację Ziemi.

2. Lot swobodny w dalekie okolice Marsa (na odległość od Słońca równą odległości Mars – Słońce). Na tym etapie pomijamy grawitację Ziemi i Marsa, a uwzględniamy tylko grawitację Słońca. Przyjmij, że prędkość początkowa jest tu styczna do okołosłonecznej orbity Ziemi.

Masa rakiety niewypełnionej paliwem, ale wraz z ładunkiem oraz pasażerami jest równa m_0. Prędkość wylotowa gazów z dysz jest równa v_{g}. Ze względów ekologicznych rakieta nie odrzuca żadnych opróżnionych zbiorników ani członów. Jej silnik jest włączany na krótki czas tylko na początku. W trakcie działania silnika wpływ grawitacji na ruch rakiety można pominąć.

Przyjmij, że orbity Ziemi, Marsa, oraz orbita okołoziemska są kołowe oraz leżą w tej samej płaszczyźnie. Niska orbita dookoła planety oznacza tu orbitę kołową na wysokości małej w porównaniu z promieniem tej planety. Masa Słońca to M_{S}. Masa Ziemi, promień Ziemi, odległości od środka Słońca środków do Ziemi oraz Marsa to odpowiednio M_{Z}, r_{Z}, d_{Z} oraz d_{M}. Uniwersalna stała grawitacyjna to G.

Wyznacz minimalną masę paliwa wraz z utleniaczem m_{p}, którymi należy napełnić rakietę, aby osiągnęła cel wycieczki.

Zakładamy, że rakieta wyrusza w podróż w najbardziej optymalnym momencie (przy odpowiednim położeniu względnym Marsa i Ziemi).

Podaj wyniki liczbowe przyjmując $m_0 = 3{,}00 \cdot 10^3$ kg, $v_{\mathrm{g}} = 3{,}00 \cdot 10^3$ m/s, $M_{\mathrm{S}} = 2{,}00 \cdot 10^{30}$ kg, $M_{\mathrm{Z}} = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, $r_{\mathrm{Z}} = 6{,}37 \cdot 10^6$ m, $d_{\mathrm{Z}} = 1{,}50 \cdot 10^{11}$ m, $d_{\mathrm{M}} = 2{,}30 \cdot 10^{11}$ m, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m^3/(kg·s).

Informacje, które moga być przydatne:

Zmiana prędkości rakiety Δv pod wpływem działania jej silnika jest dana wzorem Ciołkowskiego

$$\Delta v = v_{\mathrm{g}} \ln \frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{k}}},$$

gdzie ln oznacza logarytm naturalny (logarytm o podstawie $e \approx 2{,}718$), m_{k} jest całkowitą masą końcową, a m_{p} – całkowitą masą początkową.

Uwaga o pomijaniu grawitacji Słońca dotyczy pominięcia jej wpływu na ruch rakiety względem Ziemi.

LXIX OLIMPIADA FIZYCZNA
ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAWODÓW III STOPNIA
CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Rozwiązanie zadania 1

Zauważmy, że przyspieszenie hulajnogi a jest ograniczone dwoma czynnikami:

a) Mocą silnika. Ponieważ przy dowolnej prędkości v silnik może działać z pełną mocą, wynikająca z tego maksymalna siła przyspieszająca jest równa

$$F_P = \frac{P}{v}. \tag{1}$$

b) Siłą tarcia. Ponieważ hulajnoga ma napęd na przednie koło, maksymalna siła tarcia wynosi

$$F_\mathrm{T} = fN, \tag{2}$$

gdzie N jest siłą nacisku przedniego koła na drogę.

Z równowagi momentów sił względem środka masy (hulajnoga nie może obracać się w płaszczyźnie pionowej, bo wtedy przednie koło oderwałoby się od drogi) wynika

$$N\,(w-d) - (Mg - N)\,d + hfN = 0. \tag{3}$$

Stąd

$$N = \frac{d}{w+hf} Mg. \tag{4}$$

Początkowo (dla małych v) siła F_P jest duża, a zatem przyspieszenie jest ograniczone maksymalną siłą tarcia i wynosi

$$a_\mathrm{b} = \frac{F_\mathrm{T}}{M} = \frac{d}{w+hf} gf. \tag{5}$$

Tak będzie aż do momentu, gdy hulajnoga osiągnie taką prędkość v_g, że $F_\mathrm{T} = F_P$, czyli

$$\frac{d}{w+hf} Mgf = \frac{P}{v_\mathrm{g}}.$$

zatem

$$v_\mathrm{g} = \frac{P}{Mgf}\frac{w+hf}{d}. \tag{6}$$

Jeśli $v_\mathrm{k} \leqslant v_\mathrm{g}$, szukany czas wynosi

$$t = \frac{v_\mathrm{k}}{a_\mathrm{b}} = \frac{v_\mathrm{k}}{gf}\frac{w+hf}{d}. \tag{7}$$

Jeśli $v_\mathrm{k} > v_\mathrm{g}$, to do osiągnięcia prędkości v_g hulajnoga porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym; czas przyspieszania na tym etapie wynosi

$$t_1 = \frac{v_\mathrm{g}}{a_\mathrm{b}} = \frac{P}{M}\left(\frac{w+hf}{dgf}\right)^2. \tag{8}$$

W następnych chwilach moc silnika nie będzie wystarczająca do osiągania przyspieszenia a_b – przyspieszenie będzie zdeterminowane mocą silnika. Ponieważ na tym etapie silnik będzie pracował z maksymalną mocą, z zasady zachowania energii wynika, że odpowiedni czas t_2 spełnia warunek

$$\frac{M}{2}\left(v_\mathrm{k}^2 - v_\mathrm{g}^2\right) = Pt_2. \tag{9}$$

Stąd

$$t_2 = \frac{M\left(v_\mathrm{k}^2 - v_\mathrm{g}^2\right)}{2P}. \tag{10}$$

Zatem ostatecznie w przypadku $v_\mathrm{k} > v_\mathrm{g}$ czas t przyspieszania do prędkości v_k wynosi

$$t = \frac{P}{M}\left(\frac{w+hf}{dgf}\right)^2 + \frac{M\left(v_\mathrm{k}^2 - v_\mathrm{g}^2\right)}{2P} = \frac{P}{2M}\left(\frac{w+hf}{dgf}\right)^2 + \frac{Mv_\mathrm{k}^2}{2P}, \tag{11}$$

gdzie v_g jest dane wzorem (6).

Dla danych z zadania dostaniemy $v_\mathrm{g} = 3{,}8$ m/s, $t_1 = 2{,}3$ s, $t_2 = 2{,}7$ s,

$$t = 5{,}0 \text{ s}.$$

Punktacja zadania 1.

Zauważenie, że przyspieszenie jest ograniczone mocą silnika oraz siłą tarcia .... 1 pkt.
Warunek równowagi momentów sił (wzór (3) lub równoważny) .... 2 pkt.
Maksymalne przyspieszenie powodowane siłą tarcia (wzór (5)) .... 2 pkt.
Zauważenie, że w ogólności ruch składa się z dwóch faz: pierwszej, z przyspieszeniem ograniczonym wielkością siły tarcia i drugiej, z przyspieszeniem ograniczonym mocą silnika oraz wyznaczenie prędkości granicznej (wzór (6)) .... 2 pkt.
Wynik końcowy w zależności od prędkości końcowej (wzory (7) oraz (11)) .... 2 pkt.
Wynik liczbowy .... 1 pkt.

Rozwiązanie zadania 2

Jeśli pominiemy własne pole pętli, to z prawa Faradaya SEM indukcji jest w niej równe

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \tag{12}$$

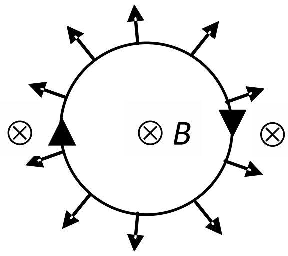
gdzie $\Delta\Phi$ jest zmianą strumienienia indukcji pola magnetycznego przechodzącego przez pętlę w ciągu (infinitezymalnie) krótkiego czasu Δt. Strumień Φ jest równy $\pi r^2 B$, zatem

$$\mathcal{E} = -\pi r^2 \frac{\Delta B}{\Delta t}. \tag{13}$$

Opór pętli jest równy $R = 2\pi r\rho$, zatem popłynie w niej prąd o natężeniu

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{r}{2\rho}\frac{\Delta B}{\Delta t}. \tag{14}$$

Zwrot prądu – zgodnie z regułą Lenza – jest taki, aby przeciwstawić się zmniejszaniu się strumienia indukcji, a więc prawoskrętny dla pola skierowanego za płaszczyznę rysunku 1.,



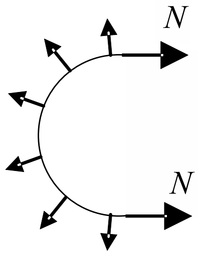
Rys. 1.

Podzielmy obwód na wiele łuków o długości Δl (ponieważ łuków jest wiele, będziemy utożsamiali każdy z nich z odcinkiem $\overline{\Delta l}$). Wektor $\Delta\vec{l}$ definiujemy jako $\overline{\Delta l}$ z dodanym zwrotem zgodnym z kierunkiem prądu płynącego w obwodzie. Dla danego łuku (czyli wektora $\Delta\vec{l}$) siła magnetyczna (elektrodynamiczna) działająca na niego wynosi

$$\Delta\vec{F} = I\Delta\vec{l} \times \vec{B}, \tag{15}$$

i dla rozważanej zależności $B(t)$ jest skierowana radialnie na zewnątrz.

Aby obliczyć naprężenie N drutu (czyli siłę rozciągającą go), rozpatrzmy siły działające na jedną połówkę pętli (patrz rysunek 2.).



Rys. 2.

Składowe poziome wektorów $\Delta\vec{l}$ dają iloczyn $\Delta\vec{l} \times \vec{B}$ skierowany pionowo i – jak widać z symetrii – suma tych iloczynów jest równa zeru. Pozostaje wkład od składowych pionowych Δl_{pion}, czyli całkowita siła magnetyczna jest skierowana poziomo, jest sumą wyrażeń $I\Delta l_{\mathrm{pion}}B$ i wynosi $F = I \cdot 2r \cdot B$. Siła ta jest równoważona przez dwie siły N, zatem

$$N = -IrB, \tag{16}$$

czyli

$$N = -\frac{r^2}{2\rho}B\frac{\Delta B}{\Delta t}. \tag{17}$$

Należy znaleźć maksymalną wartość powyższego wyrażenia. W rozpatrywanym przedziale czasu $0 < t < t_0$ ma ono postać

$$N(t) = \frac{r^2}{\rho}\frac{B_0^2}{t_0}\left(1 - \left(\frac{t}{t_0}\right)^2\right)\frac{t}{t_0}. \tag{18}$$

czyli

$$N(t) = \frac{r^2}{\rho}\frac{B_0^2}{t_0} f\left(\frac{t}{t_0}\right)$$

gdzie wprowadziliśmy funkcję

$$f(x) = x\left(1 - x^2\right).$$

Pochodna powyższej funkcji jest równa

$$f'(x) = 1 - 3x^2.$$

W przedziale $0 < x < 1$ maksymalna wartość $f(x)$ występuje w punkcie x_{m}, dla którego $f'(x_{\mathrm{m}}) = 0$:

$$x_{\mathrm{m}} = \frac{t_{\mathrm{m}}}{t_0} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \tag{19}$$

i wynosi $f_{\max} = 2/\left(3\sqrt{3}\right) \approx 0{,}385$. Zatem maksymalne naprężenie drutu wynosi

$$N_{\max} = \frac{r^2}{\rho}\frac{B_0^2}{t_0} f_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\frac{r^2 B_0^2}{\rho t_0}. \tag{20}$$

Czyli minimalna wytrzymałość drutu, przy której pętla nie ulega rozerwaniu, wynosi

$$W_{\min} = \frac{2\sqrt{3}}{9\rho}\frac{r^2 B_0^2}{t_0}. \tag{21}$$

Po podstawieniu danych z treści zadania otrzymamy

$$W_{\min} = 3{,}1\ \mathrm{N}. \tag{22}$$

Punktacja zadania 2.

Siła elektromotoryczna działająca w pętli (wzór (13) lub równoważny), wyprowadzona z prawa Faradaya (wzór (12)) .... 2 pkt.
Natężenie prądu płynącego w pętli (wzór (14) lub równoważny) .... 1 pkt.
Radialna siła działająca na element pętli (wzór (15) lub równoważny, z uzasadnieniem kierunku i zwrotu siły) .... 1 pkt
Naprężenie drutu (wzór (16) lub równoważny) .... 2 pkt.
Szukana minimalna wytrzymałość drutu (wzór 21 lub równoważny) .... 3 pkt.
Liczbowa wartość szukanej minimalnej wytrzymałości drutu (wzór 22) .... 1 pkt.

Uwaga: nie jest koniecznie używanie we wzorach jawnie znaku „-” o ile z treści rozwiązania wynika, jaki jest zwrot sił.

Rozwiązanie zadania 3

Rozważmy najpierw etap 2. Oznaczmy przez v_1 prędkość, jaką musi mieć nasza rakieta gdy jest w odległości d_Z od środka Słońca, aby dotarła na odległość d_M od tego środka, a przez v_2 jej prędkość w tym drugim położeniu. Oczekujemy, że najoszczędniejszy tor odpowiada temu, że największa odległość, na jaką rakieta oddala się od Słońca jest równa d_M, a zatem, że $\vec{v}_2$ będzie styczne do okołosłonecznej orbity Marsa. Z treści zadania $\vec{v}_1$ jest styczne do okołosłonecznej orbity Ziemi. W takiej sytuacji, z zasad zachowania energii oraz momentu pędu mamy

$$-\frac{GM_\mathrm{S}}{d_\mathrm{Z}} + \frac{v_1^2}{2} = -\frac{GM_\mathrm{S}}{d_\mathrm{M}} + \frac{v_2^2}{2}, \tag{23}$$

$$d_\mathrm{Z} v_1 = d_\mathrm{M} v_2. \tag{24}$$

Z powyższego

$$v_2 = \frac{d_\mathrm{Z}}{d_\mathrm{M}} v_1, \tag{25}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_\mathrm{S}}{d_\mathrm{Z}} \frac{2}{1 + \frac{d_\mathrm{Z}}{d_\mathrm{M}}}}. \tag{26}$$

Prędkość orbitalna Ziemi v_Z wynosi

$$v_\mathrm{Z} = \sqrt{\frac{GM_\mathrm{S}}{d_\mathrm{Z}}}, \tag{27}$$

zatem na koniec etapu 1. przyrost prędkości rakiety $\Delta v_1 = v_1 - v_\mathrm{Z}$ w porównaniu z prędkością Ziemi powinien wynosić

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM_\mathrm{S}}{d_\mathrm{Z}} \frac{2}{1 + \frac{d_\mathrm{Z}}{d_\mathrm{M}}}} - \sqrt{\frac{GM_\mathrm{S}}{d_\mathrm{Z}}}. \tag{28}$$

Etap 1.

Oznaczmy przez v_0 prędkość rakiety względem Ziemi po zakończeniu działania silników. Aby po oddaleniu się od Ziemi rakieta miała względem niej prędkość Δv_1, musi być spełniona zasada zachowania energii

$$-\frac{GM_\mathrm{Z}}{r_\mathrm{Z}} + \frac{v_0^2}{2} = \frac{(\Delta v_1)^2}{2}. \tag{29}$$

Stąd

$$v_0 = \sqrt{(\Delta v_1)^2 + \frac{2GM_\mathrm{Z}}{r_\mathrm{Z}}}. \tag{30}$$

Dla podanych danych liczbowych jest to $11,57 \cdot 10^3$ m/s.

Ponieważ pierwsza prędkość kosmiczna wynosi

$$v_\mathrm{I} = \sqrt{\frac{GM_\mathrm{Z}}{r_\mathrm{Z}}}, \tag{31}$$

zatem w wyniku działania silników zmiana prędkości Δv_0 musi wynieść

$$\Delta v_0 = v_0 - v_\mathrm{I} = \sqrt{(\Delta v_1)^2 + \frac{2GM_\mathrm{Z}}{r_\mathrm{Z}}} - \sqrt{\frac{GM_\mathrm{Z}}{r_\mathrm{Z}}}. \tag{32}$$

Przyjęliśmy tu, że ciąg rakiety jest styczny do początkowej orbity okołoziemskiej – w przeciwnym razie Δv_0 byłoby większe. Dla podanych wartości liczbowych $\Delta v_0 = 3{,}67 \cdot 10^3$ m/s.

Powyższe, uwzględniając wzór Ciołkowskiego, oznacza, że początkowa masa rakiety m oraz jej masa końcowa m_0 spełniają związek

$$m = m_0 \exp\left(\frac{\sqrt{(\Delta v_1)^2 + \frac{2GM_Z}{r_Z}} - \sqrt{\frac{GM_Z}{r_Z}}}{v_g}\right). \tag{33}$$

Stąd

$$m_p = m_0 \left[\exp\left(\frac{\sqrt{(\Delta v_1)^2 + \frac{2GM_Z}{r_Z}} - \sqrt{\frac{GM_Z}{r_Z}}}{v_g}\right) - 1\right] \tag{34}$$

gdzie Δv_1 jest dane wzorem (28).

Dla podanych wartości liczbowych otrzymujemy

$$m_p = 7{,}19 \cdot 10^3 \text{ kg}. \tag{35}$$

Punktacja zadania 3.

Zasada zachowania energii dla etapu II (wzór 23) .... 2 pkt.
Zasada zachowania momentu pędu dla etapu II (wzór 24) .... 1 pkt.
Prędkość niezbędna, aby dolecieć z orbity Ziemi do orbity Marsa (wzór 26) .... 1 pkt.
Przyrost prędkości niezbędny, aby dolecieć z orbity Ziemi do orbity Marsa (wzór 28) 1 pkt.
Prędkość na orbicie okołoziemskiej niezbędna, aby dolecieć do orbity Marsa (wzór 30) 2 pkt.
Przyrost prędkości niezbędny, aby dolecieć z orbity okołoziemskiej do orbity Marsa (wzór 32) .... 1 pkt.
Masa paliwa i utleniacza potrzebna do osiągnięcia celu wycieczki (wzór 34) .... 1 pkt.
Wynik liczbowy (wzór 35) .... 1 pkt.