

# LXX OLIMPIADA FIZYCZNA

## ZAWODY III STOPNIA

CZEŚĆ DOŚWIADCZALNA, 10.04.2021

Za zadanie można otrzymać maksymalnie 40 punktów.

Na powierzchni Ziemi jest wiele kraterów, które są pozostałościami po zderzeniach z obiektami pochodzącymi z przestrzeni kosmicznej: meteoroidami, planetoidami lub kometami. Ogromna większość zderzeń nastąpiła w odległej przeszłości i – poza powstałym kraterem – nie ma już o nich żadnych informacji. Na podstawie doświadczeń wykonywanych w niewielkiej skali oraz pomiarów istniejących kraterów można jednak próbować odtworzyć prawdopodobny przebieg takich zderzeń.

Masz do dyspozycji:

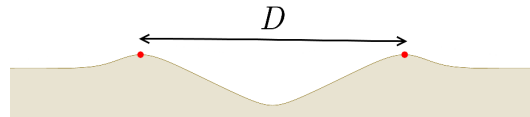
- pojemnik wypełniony drobnym piaskiem do głębokości około 10 cm,
- kulki stalowe o gęstości  $8000 \text{ kg/m}^3$  o sześciu różnych rozmiarach,
- przezroczystą linijkę z podziałką milimetrową,
- taśmę mierniczą o długości 3 m,
- suwmiarkę,
- przezroczystą taśmę klejącą i nożyczki.

a) (32 pkt.) Na podstawie wykonanych przez Ciebie pomiarów wyznacz, jaką średnicę miałby krater utworzony w wyniku prostopadłego uderzenia w takie samo podłoże kulistego meteorytu o gęstości  $8000 \text{ kg/m}^3$  i średnicy 100 m, spadającego z prędkością 15 km/s. Przyjmij, że średnica krateru  $D$  (patrz: rysunek) jest proporcjonalna do potęgi pewnej wielkości  $P$  w następujący sposób:

$$D = D_0 \left( \frac{P}{P_0} \right)^\alpha,$$

gdzie  $D_0$ ,  $P_0$  to wartości średnicy i wielkości  $P$  dla pewnego krateru, zaś  $\alpha$  jest liczbą rzeczywistą. Przyjmij, że wielkość  $P$  ma postać iloczynu wielkości fizycznych opisujących kulkę i jej ruch (na przykład prędkość, pole przekroju, gęstość, masa, pęd itp.), podniesionych do niewielkich potęg całkowitych.

b) (8 pkt.) Przedstaw prostą argumentację fizyczną, z której wynika postać wielkości  $P$  oraz otrzymana wartość wykładnika  $\alpha$ . Załóż, że kratery cechują się podobieństwem geometrycznym, niezależnie od ich rozmiarów.



### Uwagi:

- Jeśli chcesz, możesz postawić pojemnik z piaskiem na podłodze. Możesz użyć krzesła jako statywu, na przykład, ustawiając je na stole. Nie martw się, jeśli niewielka ilość piasku wysypie się poza pojemnik podczas zrzucania kulek.
- Oprócz zestawu doświadczalnego otrzymałeś również magnes, który możesz użyć do wyjmowania małych kulek z piasku.
- Po zakończeniu zawodów możesz zabrać kulki i magnes na pamiątkę.
- Meteoroid to odłamek skalny poruszający się po orbicie wokół Słońca. Wpadając do ziemskiej atmosfery, meteoroid rozgrzewa się i świeci, a rozbłysk ten nazywamy meteorem. Pozostałości meteoroidów docierające do powierzchni Ziemi noszą nazwę meteorytów.

# Rozwiązanie

## Pomysł badawczy

W rozważanym problemie meteoroid ma tę samą gęstość, co kulki, które znajdują się w zestawie doświadczalnym. Przy takim założeniu, najważniejsze parametry od których może zależeć średnica krateru to średnica  $d$  oraz prędkość  $v$  spadającego obiektu. W przeprowadzonym eksperymencie w małej skali, przy pominięciu oporu powietrza, prędkość kulki w momencie uderzenia jest jednoznacznie określona przez wysokość zrzutu  $h$ . Ogólną postać  $P$  można zapisać jako

$$P = h^n d^m, \quad (1)$$

wtedy równanie proporcjonalności dane w treści zadania przyjmie postać

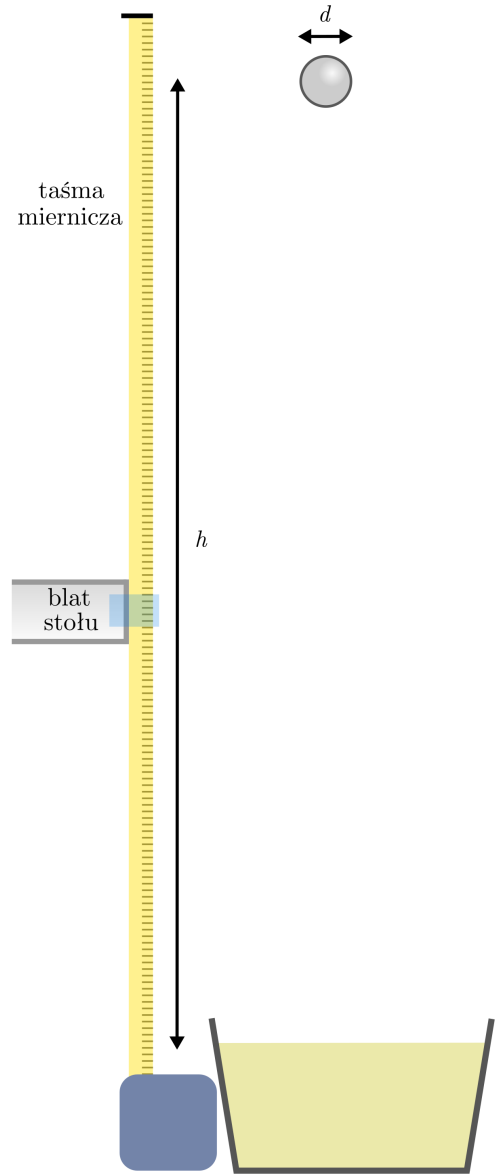
$$D = D_0 \left( \frac{h^n d^m}{h_0^n d_0^m} \right)^\alpha. \quad (2)$$

Logarytmując stronami można je przekształcić do postaci:

$$\log_{10} \left( \frac{D}{D_0} \right) = \log_{10} \left( \frac{h}{h_0} \right)^{n\alpha} + \log_{10} \left( \frac{d}{d_0} \right)^{m\alpha} \quad (3)$$

Aby wyznaczyć wartości  $n$ ,  $m$  oraz  $\alpha$  wystarczy zbadać zależność średnicy krateru od wysokości zrzutu dla ustalonej kulki oraz zależność średnicy krateru od wielkości kulki przy ustalonej wysokości zrzutu. Obie te zależności, zgodnie z równaniem (3) przyjmą w skali logarytmicznej postać równania prostej.

**Realizacja doświadczalna** W celu wykonania doświadczenia skonstruowano układ schematycznie przedstawiony na rysunku 1. Pojemnik wypełniony piaskiem ustawiono na podłodze blisko krawędzi stołu roboczego. Obok pojemnika ustawiono pionowo taśmę mierniczą wysuniętą do takiej długości, aby sięgała na wysokość 200 cm ponad powierzchnię piasku. Taśmę mierniczą przyklejono do krawędzi blatu stołu. Wysokość, z jakiej zrzucana jest kulka zadawano ustawiając oczy na wysokości pożądanego punktu na skali taśmy mierniczej, a następnie ustawiając trzymaną w ręku kulkę na linii wzroku. Ponieważ w momencie zrzucenia kulka znajdowała się w odległości kilkunastu centymetrów od taśmy mierniczej, niepewność ustalenia wysokości oszacowano na 2 cm. Wyjątek stanowił pomiar w którym zrzucano kulkę z wysokości 200 cm. Ponieważ nie było możliwe zrównanie oczu ze skalą taśmy mierniczej, niepewność ustalenia wysokości w takim przypadku oszacowano na 4 cm. Po każdym zrzuceniu kulki pojemnikiem potrząsano, aby wyrównać powierzchnię piasku. Średnice badanych kulek zmierzono suwmiarką. Średnicę krateru mierzono przez przyłożenie linijki. Każde zrzucenie kulki i pomiar średnicy krateru linijką powtarzano trzykrotnie, uśredniając otrzymany wynik. Analizując rozrzut otrzymanych wyników, niepewność określenia średnicy krateru oszacowano na 5% średniego wyniku. Dla małych kraterów rolę zaczyna odgrywać długość pojedynczej podziałki linijki równa 1 mm oraz ziarnistość piasku utrudniająca określenie położenia krawędzi krateru. W związku z tym przyjęto, że niepewność określenia średnicy krateru nigdy nie jest mniejsza niż 1 mm.



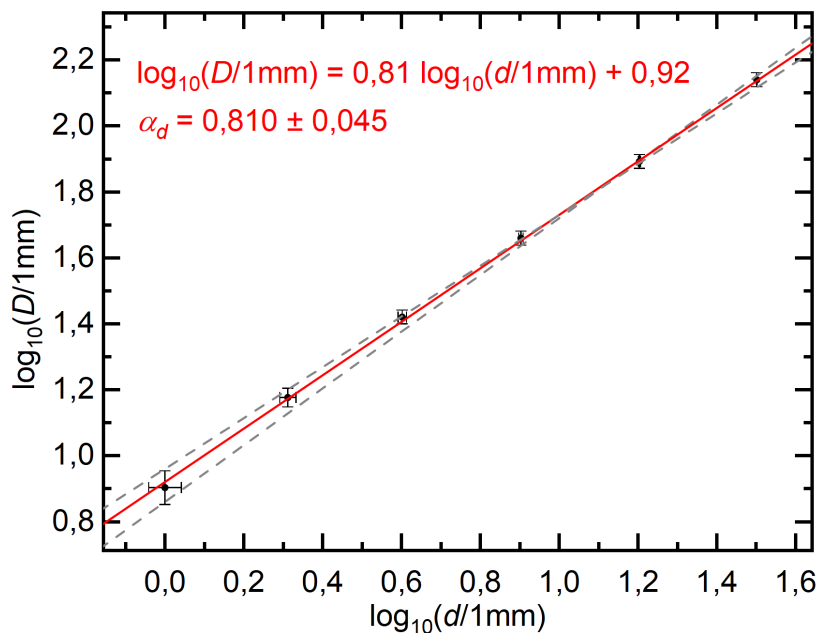
Rysunek 1: Schemat układu doświadczalnego

Tabela 1: Zestawienie wszystkich wykonanych pomiarów. Symbole  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  oznaczają wartości średnicy krateru zmierzone podczas kolejnych powtórzeń.

$d$ (mm)	$h$ (cm)	$P$ (J)	$D_1$ (mm)	$D_2$ (mm)	$D_3$ (mm)	$D$ (mm)
31,75	200	2,64	138	137	139	138,0
16,00	200	0,337	80	77	77	78,0
8,00	200	0,0422	44	46	47	45,7
4,00	200	$5,27 \cdot 10^{-3}$	26	26	27	26,3
2,00	200	$7,1 \cdot 10^{-4}$	15	15	15	15,0
1,00	200	$8,24 \cdot 10^{-5}$	8	8	8	8,0
16,00	200	0,337	79	79	82	80,0
16,00	150	0,253	69	75	74	72,7
16,00	100	0,169	64	67	70	67,0
16,00	50	0,0843	54	57	58	56,3
16,00	30	0,0506	42	46	49	45,7

### Analiza zebranych pomiarów

Kulki o różnych średnicach  $d$  zrzucano z wysokości  $h = 200$  cm. Wartości średnic utworzonych w ten sposób kraterów przedstawiono w skali logarytmicznej na rysunku 2. Poprzez dopasowanie prostej wyznaczono wykładnik zależności potęgowej średnicy krateru  $D$  od średnicy kulki  $d$ , otrzymując wartość  $\alpha_d = 0,810 \pm 0,045$ .

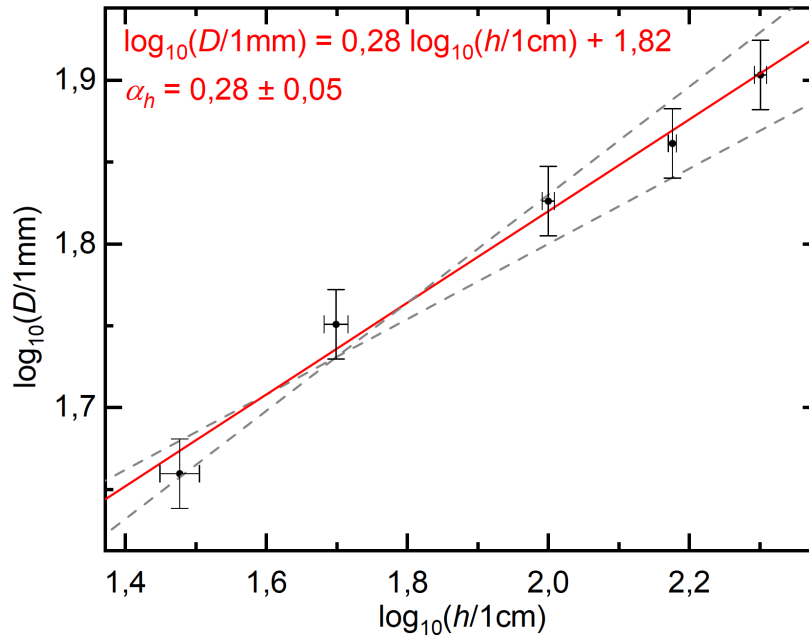


Rysunek 2: Pomiar średnicy krateru dla ustalonej wysokości 200 cm i różnych średnic kulek.

Podobną procedurę dopasowania prostej powtórzono dla pomiarów średnicy kraterów utworzonych przez zrzucanie kulki o średnicy  $d = 16$  mm z różnych wysokości  $h$ , wynoszących od 30 cm do 200 cm. Otrzymano zależność potęgową średnicy krateru od wysokości zrzutu opisaną wykładnikiem  $\alpha_h = 0,28 \pm 0,05$ .

Zauważmy, że wykładnik potęgi  $\alpha_d$  jest – w granicach niepewności pomiarowej – trzykrotnie większy od wykładnika potęgi  $\alpha_h$ . Możemy zaproponować na tej podstawie postać wielkości  $P$ :

$$P = hd^3 \quad (4)$$



Rysunek 3: Pomiar średnicy krateru dla różnych wysokości dla kulki o średnicy 16 mm.

Ponieważ w rozważanym zagadnieniu gęstość kulek jest zawsze stała, człon  $d^3$  jest wprost proporcjonalny do masy kulki  $m$ . Podczas wykonywania eksperymentu stałe było również przyspieszenie grawitacyjne  $g$ . Równoważna definicja wielkości  $P$  ma zatem postać

$$P = mgh = E_p, \quad (5)$$

gdzie  $E_p$  to energia potencjalna kulki w momencie zrzutu, zdefiniowana względem powierzchni piasku. Energia potencjalna  $E_p$  kulki w momencie zrzutu jest równa jej energii kinetycznej  $E_k$  w momencie uderzenia o powierzchnię piasku. Przyjmujemy zatem równoważną definicję wielkości  $P$ :

$$P = E_k. \quad (6)$$

Następnym krokiem jest określenie parametrów  $\alpha$ ,  $D_0$ ,  $P_0$  w proporcjonalności zaproponowanej w treści zadania. Można to uczynić na dwa sposoby.

### Sposób pierwszy

Pomiary zebrane dla jednej kulki zrzucanej z różnych wysokości oraz dla różnych kulek zrzucanych z jednej wysokości przedstawiono na rysunku 4 w zależności od wielkości  $P$  (energii kinetycznej kulki w momencie uderzenia), a następnie dokonano dopasowania prostej uzyskując równanie postaci:

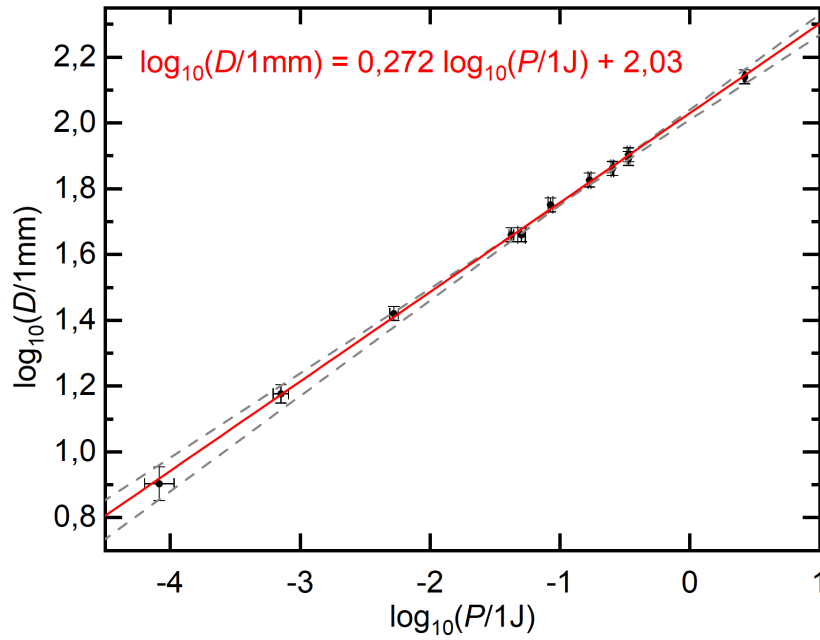
$$\log_{10} \left( \frac{D}{1 \text{ mm}} \right) = 0,272 \log_{10} \left( \frac{P}{1 \text{ J}} \right) + 2,03. \quad (7)$$

Podnosząc liczbę 10 do potęg równych obu stronom równania otrzymano:

$$\frac{D}{1 \text{ mm}} = \left( \frac{P}{1 \text{ J}} \right)^{0,272} \cdot 10^{2,03}. \quad (8)$$

Po przekształceniu otrzymano równanie proporcjonalności:

$$D = 107 \text{ mm} \left( \frac{P}{1 \text{ J}} \right)^{0,272}. \quad (9)$$



Rysunek 4: Wszystkie wykonane pomiary przedstawione jako funkcja wielkości  $P$  (energii kinetycznej kulki w momencie uderzenia).

Analogiczne obliczenia przeprowadzono dla dopasowanych prostych o skrajnych nachyleniach i otrzymano:

$$D_{\min} = 102 \text{ mm} \left( \frac{P}{1 \text{ J}} \right)^{0,257} \quad (10)$$

oraz

$$D_{\max} = 110 \text{ mm} \left( \frac{P}{1 \text{ J}} \right)^{0,290}. \quad (11)$$

Podstawiając energię kinetyczną meteorytu opisanego w treści zadania otrzymujemy poszukiwany w podpunkcie **a**) zadania wynik  $D = (6,9_{-3,3}^{+7,8}) \text{ km}$ .

### Alternatywny (uproszczony) sposób otrzymania wyniku końcowego

Zauważmy, że pomiary wykonane dla różnych wysokości zrzutu są obarczone znacznie większą niepewnością dopasowania oraz obejmują znacznie węższy zakres otrzymanych średnic krateru, niż pomiary wykonane dla różnych kulek. Podczas wyznaczania parametrów równania

$$D = D_0 \left( \frac{P}{P_0} \right)^\alpha \quad (12)$$

dopuszczalne jest odrzucenie pomiarów wykonanych dla jednej kulki zrzucanej z różnych wysokości oraz przeprowadzenie obliczeń na podstawie już wykonanego dopasowania prostej do danych przedstawionych na rysunku 2. Równanie prostej najlepszego dopasowania ma postać:

$$\log_{10} \left( \frac{D}{1 \text{ mm}} \right) = 0,810 \log_{10} \left( \frac{d}{1 \text{ mm}} \right) + 0,92. \quad (13)$$

Podnosząc liczbę 10 do potęg równych obu stronom równania otrzymujemy

$$\frac{D}{1 \text{ mm}} = \left( \frac{d}{1 \text{ mm}} \right)^{0,810} \cdot 10^{0,92}. \quad (14)$$

Wielkość  $P$  jest równa

$$P = E_k = E_p = mgh = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 \rho gh, \quad (15)$$

gdzie  $\rho = 8000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  to gęstość kulki a w przypadku rozważanej serii pomiarowej  $h = 200 \text{ cm}$ . Otrzymujemy zatem:

$$d = \left(\frac{6P}{\pi\rho gh}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (16)$$

Po podstawieniu równania (16) do równania (14) otrzymujemy:

$$\frac{D}{1 \text{ mm}} = \left(\frac{\left(\frac{6P}{\pi\rho gh}\right)^{\frac{1}{3}}}{1 \text{ mm}}\right)^{0,810} \cdot 10^{0,92} = \left(\frac{6P}{\pi\rho gh \cdot 1 \text{ mm}^3}\right)^{\frac{0,810}{3}} \cdot 10^{0,92}. \quad (17)$$

Po dokonaniu obliczeń na wartościach liczbowych otrzymujemy równanie proporcjonalności:

$$D = 8,32 \text{ mm} \left(\frac{P}{82,2 \mu\text{J}}\right)^{0,270}. \quad (18)$$

Analogiczne obliczenia przeprowadzono dla dopasowanych prostych o skrajnych nachyleniach i otrzymano:

$$D_{\min} = 9,12 \text{ mm} \left(\frac{P}{82,2 \mu\text{J}}\right)^{0,255} \quad (19)$$

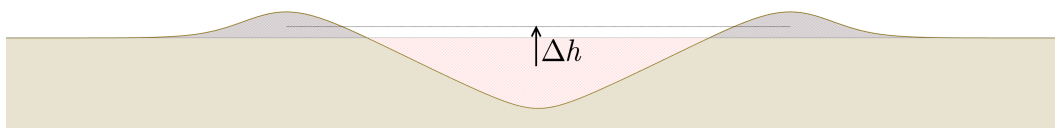
oraz

$$D_{\max} = 7,24 \text{ mm} \left(\frac{P}{82,2 \mu\text{J}}\right)^{0,285}. \quad (20)$$

Podstawiając energię kinetyczną meteorytu opisanego w treści zadania otrzymujemy poszukiwany w podpunkcie **a)** zadania wynik  $D = (6,2_{-3,0}^{+5,3}) \text{ km}$ .

**Komentarz:** Żelazny meteoryt o podobnych parametrach uderzający w mało zwartą glebę stworzyłby krater uderzeniowy o średnicy około 3 km. Źródło: <https://impact.ese.ic.ac.uk/ImpactEarth/ImpactEffects/>.

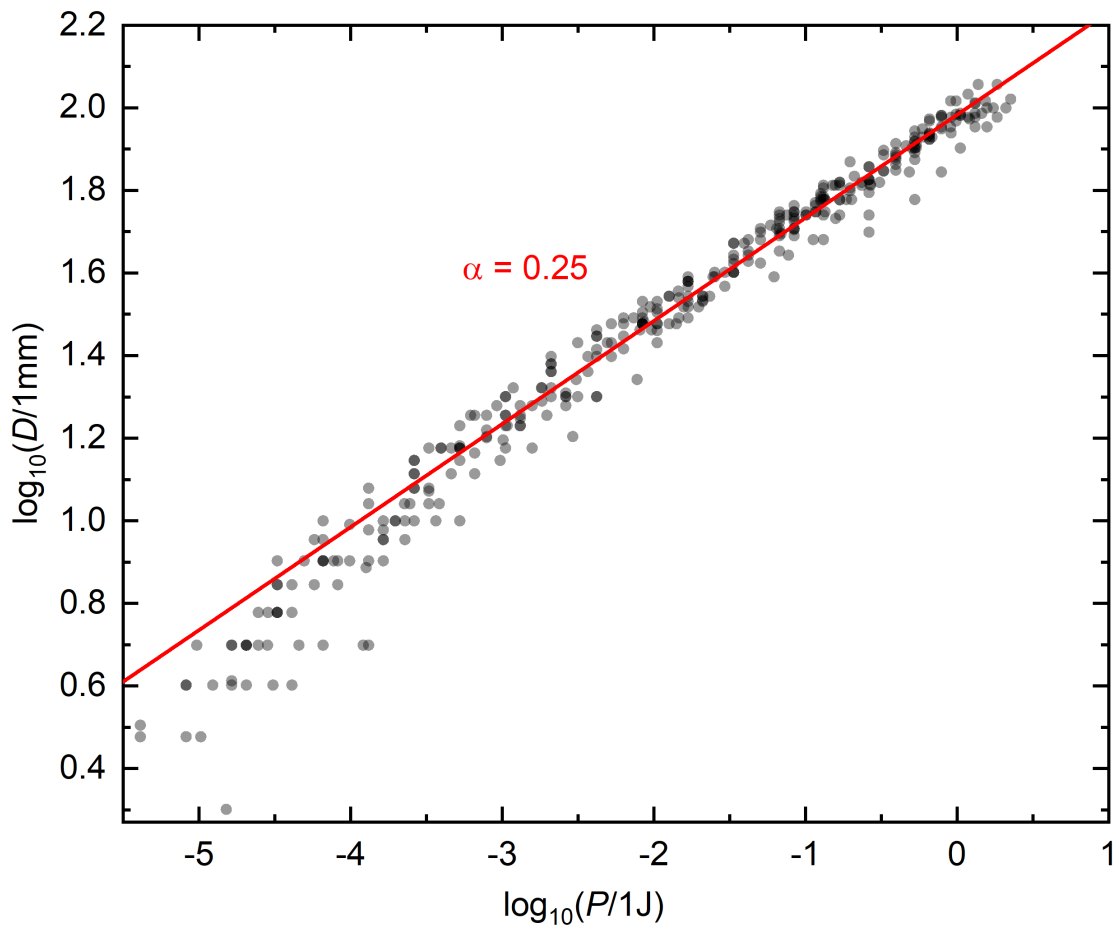
b) Zauważmy, że otrzymana wartość wykładnika  $\alpha$  jest bliska  $\frac{1}{4}$ . Zależność średnicy krateru od energii uderzenia wyrażona proporcjonalnością  $D \propto E^{\frac{1}{4}}$  jest dobrze tłumaczona przez model, w którym średnica krateru jest ograniczona przez energię, jaką trzeba wydatkować, aby objętość piasku pierwotnie wypełniającą wewnętrzną część krateru podnieść w ziemskim polu grawitacyjnym i rozrzucić dookoła krateru. Objętość, a zatem i masa piasku, który należy przenieść poza krater jest proporcjonalna do trzeciej potęgi średnicy krateru. Średnia wysokość  $\Delta h$ , na jaką trzeba unieść piasek jest z kolei wprost proporcjonalna do średnicy krateru (ze względu na geometryczne podobieństwo kraterów o różnych rozmiarach). Ostatecznie otrzymujemy:  $E \propto D^4$ , co tłumaczy otrzymaną wartość wykładnika  $\alpha \approx \frac{1}{4}$ .



### Punktacja:

- Opis układu eksperymentalnego umożliwiającego zmierzenie średnicy krateru dla różnych prędkości uderzenia kulek o piasek ..... 1 pkt.
- Zmierzenie średnic kulek ..... 1 pkt.
- Wykonanie pomiarów średnicy krateru dla co najmniej 5 kulek o różnej wielkości oraz dla co najmniej 4 różnych wysokości zrzutu ..... 3 pkt.
- Określenie i wykorzystanie niepewności pomiarowych zebranych danych ..... 1 pkt.
- Użycie metody pomiaru średnicy krateru dokładniejszej, niż jednokrotne przyłożenie linijki . 1 pkt.
- Wyznaczenie wykładników potęgowej zależności średnicy krateru od masy (lub średnicy) kulki oraz od prędkości (lub wysokości zrzutu) kulki, wraz z określeniem ich niepewności ..... 4 pkt.
- Zaproponowanie i wykorzystanie postaci wielkości P ..... 2 pkt.
- Wyznaczenie średnicy krateru meteorytu oraz jej niepewności ..... 3 pkt.
- Wyjaśnienie otrzymanych zależności prostym modelem fizycznym ..... 4 pkt.

### Dodatek



Rysunek 5: 360 pomiarów zebranych z prac dwudziestu zawodników. Czerwoną linią oznaczono prostą odpowiadającą wykładnikowi 1/4 otrzymanemu w rozważaniach teoretycznych. Widoczne jest odchylenie od modelu. Dotyczy ono głównie pomiarów wykonanych dla kulki o średnicy 1 mm zrzucanej z wysokości mniejszej niż 1.5 m.