

LXXI OLIMPIADA FIZYCZNA

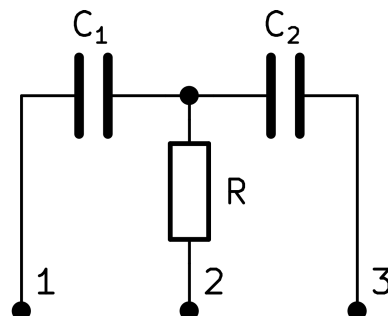
ZAWODY II STOPNIA

CZEŚĆ DOŚWIADCZALNA, 20.02.2022

Za zadanie można otrzymać maksymalnie 40 punktów.

Masz do dyspozycji:

- obwód elektryczny o trzech wyprowadzeniach (patrz: Rys. 1),
- woltomierz o oporze wewnętrznym $1\text{ M}\Omega$,
- stoper,
- baterię o napięciu nominalnym $4,5\text{ V}$,
- przewody umożliwiające zestawienie układu pomiarowego.



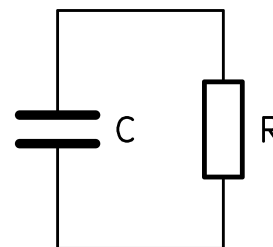
Rysunek 1: Schemat badanego obwodu elektrycznego.

Wyznacz opór R opornika oraz pojemności C_1 oraz C_2 kondensatorów w obwodzie elektrycznym. Schemat obwodu przedstawiony jest na Rys. 1.

WSKAZÓWKA 1: W obwodzie RC (patrz: Rys. 2) napięcie U mierzone na kondensatorze o pojemności C maleje wykładniczo z czasem t według wzoru:

$$U = U_0 e^{-\frac{t}{RC}},$$

gdzie U_0 oznacza napięcie na kondensatorze w chwili $t = 0$, a R oznacza opór opornika. Liczba $e = 2,71828\dots$ jest podstawą logarytmu naturalnego.

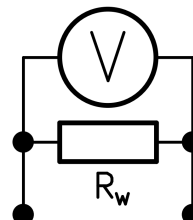


Rysunek 2: Schemat obwodu RC .

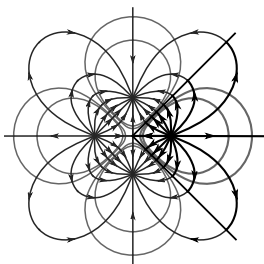
UWAGA 1: Podczas badania obwodu elektrycznego korzystaj wyłącznie z wyprowadzeń oznaczonych numerami 1, 2 oraz 3. Nie próbuj dokonywać podłączeń elektrycznych w pozostałych punktach układu. Nie próbuj odczytywać wartości znamionowych elementów elektrycznych.

UWAGA 2: Kondensatory mogą charakteryzować się niewielką upływnością, powodującą stopniową utratę zgromadzonego ładunku. Zaniedbaj tego typu efekty, jeśli twój eksperyment trwa mniej niż 15 minut.

UWAGA 3: Woltomierz rzeczywisty o oporze wewnętrznym R_w można przedstawić jako połączenie równoległe woltomierza idealnego (to znaczy: o nieskończonym oporze wewnętrznym) oraz opornika o oporze R_w (patrz: Rys. 3).



Rysunek 3: Schemat zastępczy woltomierza rzeczywistego.



LXXI OLIMPIADA FIZYCZNA

ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAWODÓW II STOPNIA

CZĘŚĆ DOŚWIADCZALNA

Rozwiązanie zadania

Część teoretyczna

Pomysł rozwiązania zadania polega na naładowaniu kondensatorów a następnie na pomiarze zależności napięć od czasu podczas ich stopniowego rozładowywania.

Naładowanie kondensatorów możliwe jest poprzez podłączenie baterii do wyprowadzeń 1 oraz 3. Przy takim sposobie podłączenia nie są znane napięcia na poszczególnych kondensatorach, natomiast znana jest suma tych napięć, która jest równa napięciu baterii. Należy zauważyć, że jeśli w momencie podłączenia baterii kondensatory miały zgromadzone pewne ładunki, wtedy rozkład napięć na obu kondensatorach nie musi być wprost związany z ich pojemnościami.

Rozładowywanie kondensatorów można przeprowadzić w układzie schematycznie przedstawionym na Rys. 1. Układ elektryczny ma postać obwodu RC złożonego z pojemności C_1 oraz oporu o wartości $R + R_w$. Napięcie na kondensatorze C_1 zmienia się z upływem czasu t i wynosi

$$U_1(t) = U_1(0) e^{\frac{-t}{(R+R_w)C_1}}, \quad (1)$$

gdzie t oznacza czas od momentu podłączenia woltomierza do wyprowadzeń 1 oraz 2. Napięcie U_1 nie jest mierzone bezpośrednio, można je jednak obliczyć na podstawie napięcia U_1^* rejestrowanego przez woltomierz. Ponieważ prąd płynący przez obwód w chwili t wynosi

$$I(t) = \frac{U_1(t)}{R_w + R}. \quad (2)$$

to napięcie U_1^* wskazywane przez woltomierz jest równe napięciu na oporniku R_w :

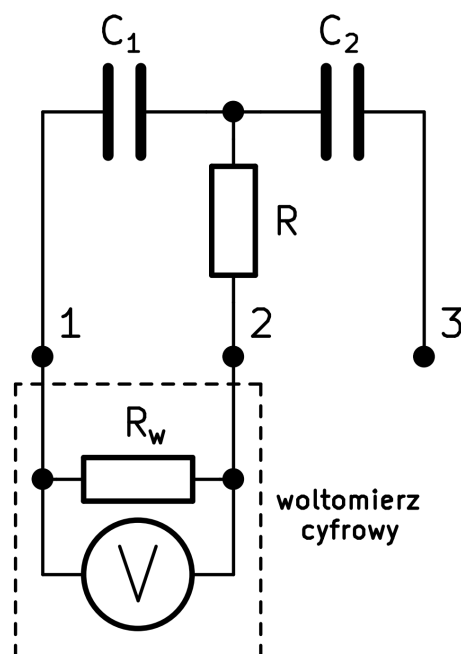
$$U_1^*(t) = I(t)R_w = U_1(t) \frac{R_w}{R_w + R}. \quad (3)$$

Stąd, napięcie na kondensatorze C_1 wynosi

$$U_1(t) = U_1^*(t) \frac{R_w + R}{R_w}. \quad (4)$$

Rozumowanie analogiczne do przedstawionego można przeprowadzić dla kondensatora o C_2 oraz woltomierza podłączonego do wyprowadzeń 2 i 3 otrzymując:

$$U_2(t) = U_2^*(t) \frac{R_w + R}{R_w}. \quad (5)$$



Rysunek 1: Schemat zastępczy obwodu wykorzystanego podczas pomiaru rozładowywania kondensatora C_1 .

Napięcie baterii U_B jest równe sumie napięć obu kondensatorów dla $t = 0$, czyli w momencie podłączenia woltomierza do wyprowadzeń 1 i 2 lub odpowiednio 2 i 3:

$$U_B = U_1(0) + U_2(0). \quad (6)$$

Korzystając z równań (4) oraz (5) możemy przekształcić równanie (6) do postaci

$$U_B = (U_1^*(0) + U_2^*(0)) \frac{R_w + R}{R_w}. \quad (7)$$

Należy zwrócić uwagę, że napięcia $U_1^*(0)$ oraz $U_2^*(0)$ wyznaczamy na podstawie dwóch niezależnych pomiarów. Uwzględniając, że opór wewnętrzny baterii jest znacznie mniejszy niż opór wewnętrzny woltomierza, można przyjąć, że napięcie U_B jest równe wskazaniu woltomierza podczas bezpośredniego pomiaru. Opór R_w jest znany, zatem przekształciwszy wzór (7) możemy obliczyć opór opornika R :

$$R = R_w \left(\frac{U_B}{U_1^*(0) + U_2^*(0)} - 1 \right). \quad (8)$$

obwodzie RC ()można skorzystać z dopasowania prostej. Korzystając z równania (4) można przekształcić równanie (1) do postaci

$$U_1^*(t) \frac{R_w}{R_w + R} = U_1^*(0) \frac{R_w}{R_w + R} e^{\frac{-t}{(R+R_w)C_1}}, \quad (9)$$

z czego wynika:

$$U_1^*(t) = U_1^*(0) e^{\frac{-t}{(R+R_w)C_1}}. \quad (10)$$

Zlogarytmowanie stronami równania (10) sprowadzi je do postaci równania prostej. Aby uniknąć logarytmowania wielkości mianowanej (wielkości z jednostką fizyczną), podzielmy równanie obustronnie przez wielkość $u_0 = 1 \text{ mV}$:

$$\frac{U_1^*(t)}{u_0} = \frac{U_1^*(0)}{u_0} e^{\frac{-t}{(R+R_w)C_1}}. \quad (11)$$

Po obliczeniu logarytmu naturalnego obu stron równania (11), otrzymujemy:

$$\ln \left(\frac{U_1^*(t)}{u_0} \right) = \ln \left(\frac{U_1^*(0)}{u_0} \right) - \frac{t}{(R + R_w)C_1}. \quad (12)$$

Powyższe równanie ma postać równania prostej, w którym współczynnik kierunkowy A_1 ma postać:

$$A_1 = \frac{-1}{(R + R_w)C_1}, \quad (13)$$

natomiast parametr wolny B_1 ma postać:

$$B_1 = \ln \left(\frac{U_1^*(0)}{u_0} \right), \quad (14)$$

Po wyznaczeniu – przez dopasowanie prostej – współczynnika kierunkowego A_1 oraz parametru B_1 można obliczyć napięcie $U_1^*(0)$:

$$U_1^*(0) = u_0 e^{B_1}, \quad (15)$$

oraz pojemność kondensatora C_1 :

$$C_1 = -\frac{1}{(R + R_w)A_1}. \quad (16)$$

Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla kondensatora C_2 , otrzymując

$$U_2^*(0) = u_0 e^{B_2}, \quad (17)$$

$$C_2 = -\frac{1}{(R + R_w)A_2}. \quad (18)$$

Część doświadczalna

Za pomocą woltomierza zmierzono napięcie baterii i otrzymano wartość: $U_B = 4,92 \text{ V}$. Następnie, rozpoczęto przygotowania do pomiaru procesu rozładowywania się kondensatora w układzie przedstawionym na Rys. 1. Obwód elektryczny położono na stole, a następnie przytknięto na kilka sekund podłączone do baterii przewody krokodyłkowe do wyprowadzeń 1 oraz 3. Następnie, jeden z zacisków woltomierza podłączono do wyprowadzenia numer 1 obwodu elektrycznego. Ponieważ trudno jest jednocześnie włączyć stoper i podłączyć zaciski do wyprowadzeń układu, najpierw włączono stoper, a gdy wskazanie stopera osiągnęło wartość $t_0 = 5 \text{ s}$ podłączono drugi z zacisków woltomierza do wyprowadzenia numer 2. W trakcie przeprowadzanych operacji dbano, aby nie dotykać odizolowanych części wyprowadzeń i przewodów połączeniowych rękami, aby nie rozładować kondensatorów. W momencie podłączenia drugiego zacisku woltomierza do wyprowadzenia 2 obwodu elektrycznego, rozpoczęło się rozładowywanie kondensatora o pojemności C_1 w układzie przedstawionym na Rys. 1. W określonych odstępach czasu notowano wartość napięcia U_1^* wskazywanego przez woltomierz oraz czas t , który upłynął od zestawienia pełnego układu pomiarowego (czyli: czas od chwili t_0).

Po około minucie odłączono woltomierz od układu i przystąpiono do pomiaru procesu rozładowywania kondensatora C_2 . Jeden z zacisków woltomierza podłączono do wyprowadzenia 2 obwodu elektrycznego, włączono stoper, a następnie po czasie t_0 podłączono drugi z zacisków woltomierza do wyprowadzenia 3 obwodu elektrycznego a następnie rozpoczęto pomiar podobny, jak dla kondensatora C_1 .

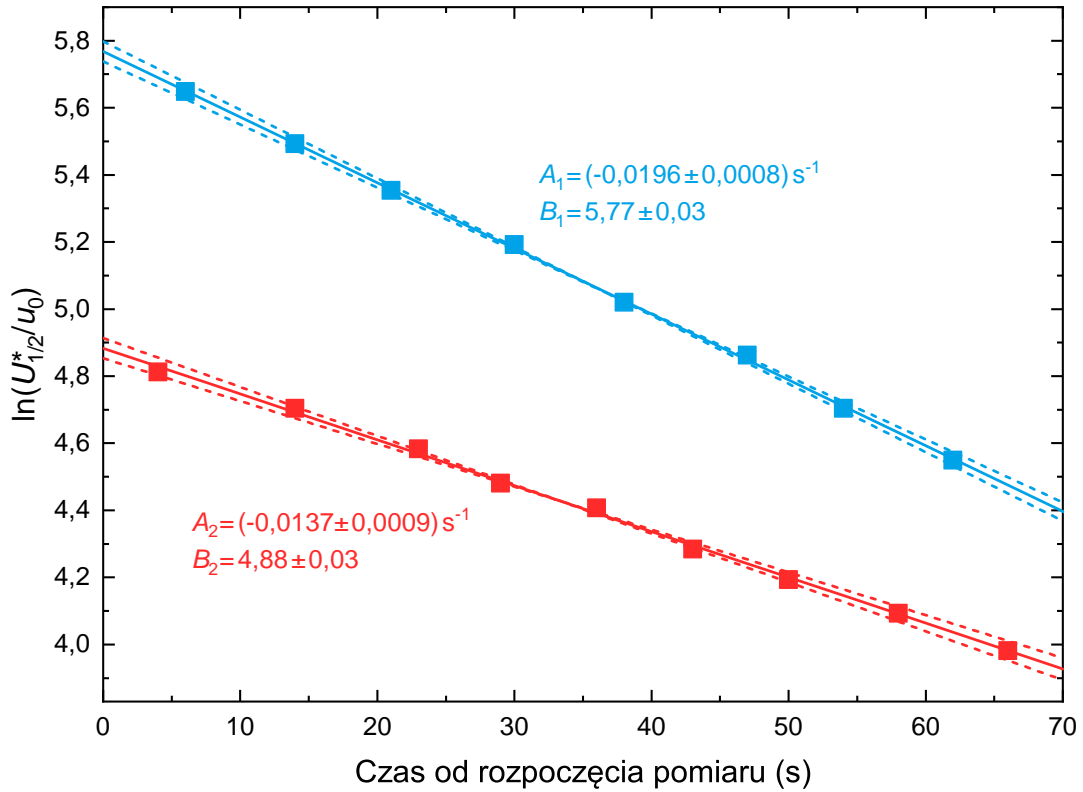
Wyniki obu serii pomiarowych przedstawiono na Rys. 2. Niepewność określenia chwil czasu oszacowano jako równą czasowi reakcji człowieka, czyli około $0,3 \text{ s}$. Niepewności pomiaru czasu mieszczą się w szerokości symboli punktów pomiarowych, natomiast niepewność związaną z pomiarem napięcia woltomierzem zanedbano.

Do obu otrzymanych zależności dopasowano prostą najlepszego dopasowania oraz proste o skrajnych nachyleniach zgodne z punktami pomiarowymi. Odczytano parametry A_1 , A_2 , B_1 oraz B_2 otrzymując wartości wraz z ich niepewnościami:

$$A_1 = (-0,0196 \pm 0,0008) \text{ s}^{-1}, \quad (19)$$

$$A_2 = (-0,0137 \pm 0,0009) \text{ s}^{-1}, \quad (20)$$

$$B_1 = 5,77 \pm 0,03, \quad (21)$$



Rysunek 2: Wyniki pomiarów wartości napięć U_1^* oraz U_2^* mierzonych podczas rozładowywania kondensatorów o pojemności C_1 oraz C_2 . Na osi poziomej naniesiono czas mierzony od zestawienia pełnego obwodu elektrycznego, czyli od chwili t_0 .

$$B_2 = 4,88 \pm 0,03. \quad (22)$$

Korzystając z równań (15) oraz (17) obliczono wartości napięć U_1^* oraz U_2^* w chwili rozpoczęcia pomiarów:

$$U_1^*(0) = (321 \pm 10) \text{ mV}; \quad (23)$$

$$U_2^*(0) = (132 \pm 4) \text{ mV}. \quad (24)$$

Następnie, korzystając z równania (8) obliczono opór opornika w obwodzie elektrycznym:

$$R = (9,86 \pm 0,33) \text{ M}\Omega, \quad (25)$$

co pozwala na użycie równań (16) oraz (18) do obliczenia pojemności kondensatorów C_1 oraz C_2 :

$$C_1 = (4,69 \pm 0,35) \mu\text{F}; \quad (26)$$

$$C_2 = (6,72 \pm 0,70) \mu\text{F}. \quad (27)$$

Niepewności wielkości $U_1^*(0)$ obliczono jako połowę różnicy między wartością otrzymaną dla największego możliwego parametru $B_1 = 5,77 + 0,03$ a wartością otrzymaną dla najmniejszej możliwej wartości parametru $B_1 = 5,77 - 0,03$. Podobnie obliczono niepewności parametrów $U_2^*(0)$, R , C_1 oraz C_2 .

Komentarze od organizatorów

1. W zestawie doświadczalnym wartość znamionowa oporu opornika wynosiła $R = (10,0 \pm 0,1) \text{ M}\Omega$, natomiast wartości znamionowe pojemności kondensatorów wynosiły $C_1 = (4,70 \pm 0,47) \mu\text{F}$ oraz $C_2 = (6,80 \pm 0,68) \mu\text{F}$.

2. Niezależne naładowanie kondensatorów do znanych napięć poprzez podłączenie baterii do wyprowadzeń 1 i 2 oraz 2 i 3 także byłoby możliwe, ale wymagałoby długiego i trudnego do określenia czasu ze względu na dużą wartość oporu R . Jednym z możliwych sposobów na upewnienie się, że kondensator osiągnął napięcie równe napięciu baterii byłoby ładowanie kondensatora przy pomocy baterii połączonej szeregowo z woltomierzem. W takiej konfiguracji woltomierz pełni rolę amperomierza. Gdy jego wskazanie osiągnie wartość zero, oznacza to, że napięcia kondensatora oraz baterii są równe.

3. Metoda pomiaru najczęściej wybierana przez uczniów polegała na pomiarze stałych A_1 oraz A_2 tak jak w przedstawionym wyżej rozwiązaniu, oraz stałej A_3 zmierzonej podczas rozładowywania kondensatorów przez woltomierz podłączony do wyprowadzeń 1 oraz 3. W takiej konfiguracji wartości stałych wynoszą:

$$A_1 = -\frac{1}{(R + R_w)C_1},$$

$$A_2 = -\frac{1}{(R + R_w)C_2},$$

$$A_3 = -\frac{C_1 + C_2}{R_w C_1 C_2}.$$

Rozwiązanie powyższego układu równań pozwala obliczyć pojemności C_1 , C_2 oraz opór R :

$$R = \left(\frac{A_3}{A_1 + A_2} - 1 \right) R_w,$$

$$C_1 = \frac{A_1 + A_2}{A_1 A_3 R_w},$$

$$C_2 = \frac{A_1 + A_2}{A_2 A_3 R_w}.$$

Takie rozwiązanie jest prostsze koncepcyjnie, jednak trudniejsze doświadczalnie. Zanik napięcia w trzeciej, dodatkowej konfiguracji jest około dwudziestokrotnie szybszy niż zaniki w pozostałych konfiguracjach, co często przekładało się na zmniejszoną precyzję otrzymanych wyników.

Punktacja

Pomysł na metodę pomiaru oporu opornika (wzór (8) lub równoważny) 3 pkt.
 Pomysł na metodę pomiaru pojemności kondensatora (wzory (16) oraz (18) lub równoważne) 3 pkt.
 Pomysł oparty na pomiarze sumy napięć początkowych kondensatorów (wzór (6)) lub dokładne określenie rzeczywistych napięć $U_1(0)$ oraz $U_2(0)$ 2 pkt.
 Opis układu pomiarowego oraz procedury pomiarowej 2 pkt.
 Wykonanie co najmniej 5 pomiarów napięcia podczas rozładowania każdego z kondensatorów 2 pkt.

- Wyznaczenie wartości oporu R wraz z oceną niepewności 2 pkt.
Wyznaczenie wartości R z dokładnością do 20% względem wartości znamionowej ... 1 pkt.
Wyznaczenie wartości pojemności C_1 oraz C_2 wraz z oceną niepewności 3 pkt.
Wyznaczenie wartości C_1 oraz C_2 z dokładnością do 20% względem wartości znamionowych 2 pkt.