LXXI OLIMPIADA FIZYCZNA

ZAWODY III STOPNIA

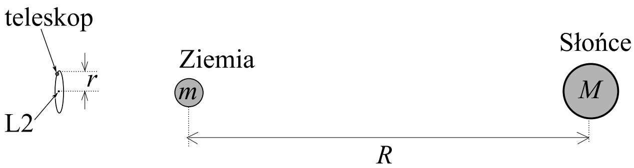
CZĘŚĆ TEORETYCZNA, 10.04.2022

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

Uwaga: na końcu treści są podane ogólne zależności matematyczne, które mogą być przydatne przy rozwiązywaniu zadań.

Zadanie 1

Kosmiczny teleskop Jamesa Webba krąży wokół punktu Lagrange'a L2 (patrz definicję poniżej) po – w przybliżeniu kołowej – orbicie o promieniu r.



Rys. 1. Schematyczne przedstawienie teleskopu Webba krążącego wokół punktu L2. Pokazano również Słońce oraz Ziemię.

Wyznacz okres obiegu T teleskopu po tej orbicie, zdefiniowany jako najmniejszy odstęp czasu między dwoma kolejnymi położeniami, odpowiadającymi maksymalnej odległości teleskopu od płaszczyzny obiegu Ziemi wokół Słońca i znajdującymi się po tej samej stronie tej płaszczyzny. Wynik wyraź przez r, masę Słońca M, masę Ziemi m, promień orbity Ziemi wokół Słońca R oraz okres obiegu Ziemi wokół Słońca T_{O}.

Pomiń oddziaływanie Księżyca i pozostałych ciał niebieskich. Przyjmij, że orbita Ziemi wokół Słońca jest kołowa i uwzględnij, że masa Słońca jest znacznie większa od masy Ziemi. Rozważ tylko r znacznie mniejsze od odległości Ziemi od punktu L2.

Punkt Lagrange'a L2 to punkt na osi Słońce-Ziemia, po przeciwnej stronie Ziemi niż Słońce, taki, że ciało w nim umieszczone może pozostawać w tym samym położeniu względem Słońca oraz Ziemi. Uwzględnij, że odległość punktu L2 od środka Ziemi jest znacznie mniejsza od odległości Ziemi od Słońca – co wynika z faktu, że $M \gg m$.

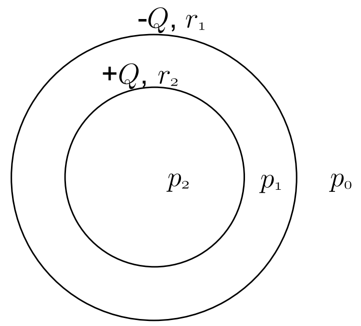
Uwaga:

Weź pod uwagę, że w obracającym się układzie nieinercjalnym działa siła Coriolisa.

Wektor tej siły leży w płaszczyźnie obrotu układu nieinercjalnego i jest prostopadły do prędkości ciała w tym układzie. Wartość siły Coriolisa jest równa $2\mu\omega\,|v_\perp|$, gdzie $\vec{v}_\perp$ jest rzutem prędkości ciała na płaszczyznę obrotu układu, ω – prędkość kątowa tego obrotu, a μ – masa ciała. Zwrot tej siły jest zgodny ze zwrotem $\vec{v}_\perp$ obróconego o kąt 90° w płaszczyźnie obrotu układu przeciwnie do tego obrotu. (Przy użyciu pojęcia wektora prędkości kątowej oraz iloczynu wektorowego siłę Coriolisa można zapisać jako $-2\mu\vec{\omega}\times\vec{v}$.)

Zadanie 2

Wewnątrz sferycznej bańki mydlanej o promieniu r_1 znajduje się współśrodkowa z nią bańka mydlana o promieniu r_2 – patrz rysunek. Bańki są naładowane jednorodnie – wewnętrzna ładunkiem $+Q$, a zewnętrzna ładunkiem $-Q$. Napięcie powierzchniowe wody z mydłem tworzącej bańki wynosi σ. Na zewnątrz większej bańki ciśnienie powietrza wynosi p_0. Układ jest w równowadze. Wyznacz ciśnienie p_2 powietrza wewnątrz mniejszej bańki oraz ciśnienie p_1 powietrza pomiędzy bańkami.



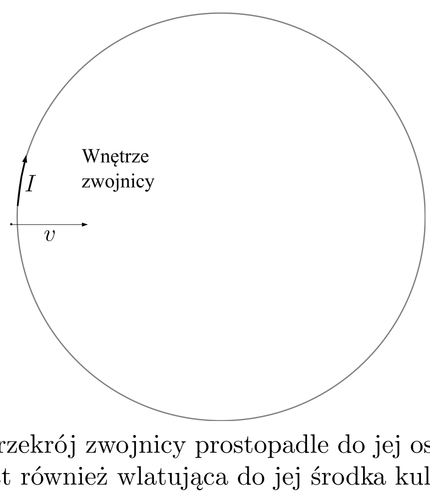
Rys. 2. Dwie współśrodkowe, naładowane bańki mydlane.

Informacja dodatkowa

Dla wody z mydłem o współczynniku napięcia powierzchniowego σ energia powierzchniowa utworzonej z niej błonki o powierzchni S jest równa $2\sigma S$ (czynnik 2 pojawia się, gdyż musimy uwględnić obie strony błonki).

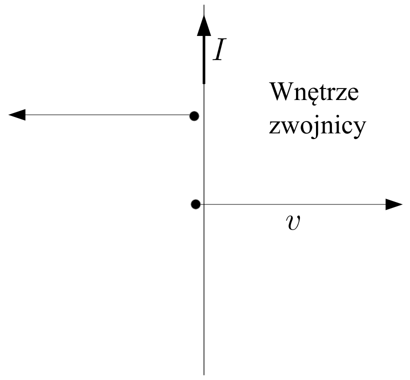
Zadanie 3

Zwojnica składa się z N równomiernie nawiniętych zwojów cienkiego drutu tworzących w sumie powierzchnię boczną walca o promieniu r i długości h, przy czym $h \gg r$. Przez tę zwojnicę płynie zmienny prąd o natężeniu $I = I_0 \sin \Omega t$, gdzie I_0 i Ω oznaczają dodatnie stałe, a t – czas. W chwili $t = 0$ przez mały odstęp między zwojami do wnętrza zwojnicy, prostopadle do jej powierzchni bocznej, wleciała z prędkością v mała kulka o masie m, naładowana ładunkiem q, patrz Rys. 3.1.



Rys. 3.1. Przekrój zwojnicy prostopadle do jej osi. Pokazana jest również wlatująca do jej środka kulka.

Zaobserwowano, że po chwili kulka wyleciała ze zwojnicy w kierunku przeciwnym do początkowego, patrz Rys. 3.2.



Rys. 3.2. Powiększony fragment przekroju zwojnicy prostopadle do jej osi. Oprócz kulki tuż przed wlotem do zwojnicy, pokazana jest też ta sama kulka tuż po wylocie ze zwojnicy.

a) Przy ustalonych pozostałych parametrach wyznacz najmniejsze I_0, dla którego opisana sytuacja może zajść. Naszkicuj tor ruchu kulki wewnątrz zwojnicy.

b) Naszkicuj tor ruchu kulki wewnątrz zwojnicy w następujących przypadkach (wymagane jest uzasadnienie każdego z przedstawionych szkiców):

(i) wartość I_0 jest dwukrotnie większa niż wartość wyznaczona w pkt. a),

(ii) wartość I_0 jest dwukrotnie mniejsza niż wartość wyznaczona w pkt. a).

Przyjmij, że odległość między miejscem, gdzie kulka wleciała do zwojnicy, a miejscem, w którym z niej wyleciała, jest znacznie mniejsza od r (patrz Rys. 3.2.) – z punktu widzenia kulki wlatuje ona w półprzestrzeń wypełnioną jednorodnym w przestrzeni (choć zmiennym w czasie) polem magnetycznym. Pomiń pole elektryczne indukowane przez zmienne pole magnetyczne i oddziaływanie elektrostatyczne kulki z drutami zwojnicy.

Zależności, które mogą być przydatne przy rozwiązywaniu zadań:

1. Dla $|x| \ll 1$, $(1+x)^r \approx 1 + rx$, gdzie r jest liczbą rzeczywistą.

2. Związki między prędkością v a drogą s:
jeśli $v = v_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^n$, to $s = \frac{v_0 t_0}{n+1} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{n+1} + C$;
jeśli $v = v_0 \cos\left(\frac{t}{t_0}\right)$, to $s = v_0 t_0 \sin\left(\frac{t}{t_0}\right) + C$;
jeśli $v = v_0 \sin\left(\frac{t}{t_0}\right)$, to $s = -v_0 t_0 \cos\left(\frac{t}{t_0}\right) + C$;
jeśli $v = v_0 e^{t/t_0}$, to $s = v_0 t_0 e^{t/t_0} + C$;
gdzie t – czas, v_0, t_0, C, n – stałe, przy czym $n \neq -1$.

LXXI OLIMPIADA FIZYCZNA
ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAWODÓW III STOPNIA
CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Rozwiązanie zadania 1

Przyjmijmy, że punkt L2 znajduje się w odległości d od Ziemi. W układzie nieinercjalnym, w którym oś Słońce–Ziemia pozostaje nieruchoma, na ciało działają siły grawitacyjne Słońca, Ziemi, oraz siła odśrodkowa. Ponieważ ciało ma pozostawać w równowadze w tym układzie, musi zachodzić

$$\frac{GM}{(R+d)^2} + \frac{Gm}{d^2} = \omega^2 (R+d)\,, \tag{1}$$

gdzie $\omega = 2\pi/T_{\mathrm{O}}$ jest prędkością kątową obiegu Ziemi wokół Słońca, a G to uniwersalna stała grawitacyjna. Ponieważ $R \gg d$, możemy zastosować przybliżenie

$$\frac{GM}{(R+d)^2} = \frac{GM}{R^2} - \frac{2GM}{R^3}d.$$

Ponieważ $\frac{GM}{R^2} = \omega^2 R$, otrzymujemy

$$-\frac{2GM}{R^3}d + \frac{Gm}{d^2} = \frac{GM}{R^3}d,$$

a stąd

$$d = \sqrt[3]{\frac{m}{3M}}R. \tag{2}$$

Rozważmy teraz siłę działającą w rozważanym układzie nieinercjalnym na ciało o masie μ oddalone o r prostopadle do osi Słońce–Ziemia. Jej składowa prostopadła do płaszczyzny obiegu Ziemi wokół Słońca (czyli składowa wzdłuż $\vec{\omega}$) wynosi

$$F_z = -\mu \left(\frac{GM}{\left((R+d+x)^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} + \frac{Gm}{\left((d+x)^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} \right) z, \tag{3}$$

gdzie $x,\ y,\ z$ to składowe w układzie takim, że x jest wzdłuż osi Słońce-Ziemia, z jest prostopadłe do płaszczyzny obiegu Ziemi wokół Słońca, a oś y jest prostopadła do osi x oraz z.

Zauważmy, że oś z jest równoległa do osi obrotu układu (czyli do wektora prędkości kątowej $\vec{\omega}$), zatem siła Coriolisa nie daje wkładu do F_z. Uwzględniając, że $|z| \ll R$, $|z| \ll d$ oraz $|x|,\ |y| \ll R,\ d$, otrzymamy

$$F_z \approx -\mu \left(\frac{GM}{(R+d)^3} + \frac{Gm}{d^3} \right) z \approx -\mu \left(\frac{GM}{R^3} + \frac{Gm}{d^3} \right) z. \tag{4}$$

Uwzględniając $d^3 = \frac{m}{3M}R^3$ otrzymamy

$$F_z = -4\frac{GM}{R^3}\mu z = -4\mu\omega^2 z. \tag{5}$$

Czyli siła działająca wzdłuż osi z jest siłą harmoniczną (ruch wzdłuż osi z jest w rozpatrywanym przybliżeniu niezależny od ruchu wzdłuż innych osi), a zatem okres jest równy

$$T = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{T_{\text{O}}}{2}. \tag{6}$$

Zatem szukany czas jest równy połowie czasu obiegu Ziemi wokół Słońca.

Animacja ruchu rozważanego teleskopu znajduje się na stronie
`https://jwst.nasa.gov/content/about/orbit.html`.

Punktacja zadania 1.

Warunek równowagi sił w układzie nieinercjalnym (wzór (1) lub równoważny) ....2 pkt.
łożenie punktu L2 w rozpatrywanym przybliżeniu (wzór (2)) ....2 pkt.
Składowa z siły działającej na ciało (wzór (4) lub równoważny) ....1 pkt.
Jawne zauważenie, że siła Coriolisa nie daje wkładu do F_z ....2 pkt.
Składowa z siły działającej na ciało w rozważanym przybliżeniu (wzór (5)) .... 1 pkt.
Szukany okres (wzór (6); oczekujemy dokładnie takiej postaci wyniku) ....2 pkt.
Jeśli w rozwiązaniu nie ma uzasadnienia że siła Coriolisa nie daje tu wkładu, to 0 pkt nawet przy poprawnym wyniku.

Rozwiązanie zadania 2

Energia napięcia powierzchniowego bańki o promieniu r jest równa $8\pi r^2\sigma$. Przy zmianie promienia o małe Δr zmiana energii będzie wynosić $16\pi r\sigma\Delta r$, zatem napięcie powierzchniowe jest efektywnie równoważne ciśnieniu

$$p_\sigma = \frac{4\sigma}{r} \tag{7}$$

ściskającemu bańkę.

Na mały element zewnętrznej bańki o powierzchni A działają następujące siły (znak minus odpowiada siłom ściskającym bańkę):

a) siła napięcia powierzchniowego $-4\sigma A/r_1$,

b) ciśnienie powietrza na zewnątrz $-p_0 A$,

c) ciśnienie powietrza wewnątrz (tzn. pomiędzy bańkami) $p_1 A$,

d) siła elektrostatyczna pochodząca od wewnętrznej bańki (pole od tej bańki jest takie, jakby cały jej ładunek był zgromadzony w środku układu) $-\frac{AQ}{4\pi r_1^2}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}$

e) siła elektrostatyczna pochodząca od pozostałych elementów zewnętrznej bańki; pole elektryczne tuż nad rozpatrywanym elementem (czyli na zewnątrz bańki), pochodzące od wszystkich elementów tej bańki, jest równe $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}$, pole elektryczne tuż pod rozpatrywanym elementem (czyli wewnątrz bańki), pochodzące od wszystkich elementów tej bańki, jest równe 0; oznacza to, że rozpatrywany element znajduje się w zewnętrznym (czyli pochodzącym od pozostałych elementów bańki) jest równe $\frac{1}{2}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}$, a zatem siła działająca na rozpatrywany element, pochodząca od pozostałych elementów zewnętrznej bańki, jest równa

$$+\frac{1}{2}\frac{AQ}{4\pi r_1^2}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}. \tag{8}$$

Ponieważ układ jest w równowadze, zachodzi

$$-\frac{4\sigma}{r_1}A - p_0A + p_1A - \frac{A}{4\pi r_1^2}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} + \frac{1}{2}\frac{A}{4\pi r_1^2}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} = 0. \tag{9}$$

Stąd

$$p_1 = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r_1^4} + p_0 + \frac{4\sigma}{r_1}. \tag{10}$$

Na mały element wewnętrznej bańki o powierzchni A działają następujące siły (znak minus odpowiada siłom ściskającym bańkę):

a) siła napięcia powierzchniowego $-4\sigma A$,

b) ciśnienie powietrza na zewnątrz tej bańki $-p_1A$,

c) ciśnienie powietrza wewnątrz p_2A,

d) siła elektrostatyczna pochodząca od pozostałych elementów wewnętrznej bańki $+\frac{1}{2}\frac{A}{4\pi r_2^2}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}$.

Pole elektryczne pochodzące od zewnętrznej bańki jest w jej wnętrzu równe 0, zatem zewnętrzna bańka efektywnie nie działa elektrostatycznie na wewnętrzną.

Ponieważ układ jest w równowadze, zachodzi

$$-4\sigma A - p_1A + p_2A + \frac{1}{2}\frac{A}{4\pi r_2^2}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = 0. \tag{11}$$

Uwzględniając uzyskany poprzednio wynik na p_1 otrzymujemy

$$p_2 = \frac{Q}{32\pi^2\epsilon_0 r_1^4} + p_0 + \frac{4\sigma}{r_1} + \frac{4\sigma}{r_2} - \frac{Q}{32\pi^2\epsilon_0 r_2^4}. \tag{12}$$

Zauważmy, że dla małych wartości r_2 teoretycznie otrzymujemy ujemne wartości p_2 – to oznacza, że nie przy wszystkich wartościach pozostałych parametrów można dopasować takie p_2, by układ był w równowadze.

Punktacja zadania 2.

„Ciśnienie" odpowiadające napięciu powierzchniowemu (wzór (7)) .... 2 pkt.
Siła elektrostatyczna działająca na element powierzchni bańki pochodząca od pozostałych elementów tej samej bańki (może być dla wewnętrznej, zewnętrznej lub w przypadku ogólnym) (wzór (8)) .... 2 pkt.
Warunek równowagi dla zewnętrznej bańki (wzór (9); powinny pojawić się wszystkie składniki) .... 2 pkt.
Ciśnienie p_1 (wzór (10); tylko w pełni poprawny wynik) ....1 pkt.

Warunek równowagi dla wewnętrznej bańki (wzór (11); powinny pojawić się wszystkie składniki) .... 2 pkt.
Ciśnienie p_2 (wzór (12); tylko w pełni poprawny wynik) .... 1 pkt.

Rozwiązanie zadania 3

Płynący prąd wywołuje wewnątrz zwojnicy pole magnetyczne o indukcji

$$B = \mu_0 \frac{N}{h} I, \tag{13}$$

skierowane wzdłuż osi zwojnicy, czyli prostopadłe do początkowego kierunku ruchu kulki. W ogólnym przypadku na ładunek poruszający się z prędkością $\vec{v}$ w prostopadłym do $\vec{v}$ polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$, działa siła prostopadła do $\vec{v}$ oraz do $\vec{B}$ o wartości

$$F = qvB. \tag{14}$$

Ponieważ ta siła jest prostopadła do prędkości, ładunek będzie poruszał się po łuku okręgu z przyspieszeniem dośrodkowym

$$a_\perp = \frac{qvB}{m}. \tag{15}$$

Z drugiej strony przyspieszenie dośrodkowe jest dane wzorami

$$a_\perp = \frac{v^2}{r}, \tag{16}$$

$$a_\perp = \omega^2 r, \tag{17}$$

gdzie r jest promieniem rozważanego łuku okręgu, a ω jest prędkością kątową tego ruchu.

Korzystając z równań (15), (16), (17) otrzymamy $r = mv/(qB)$ oraz

$$\omega = qB/m. \tag{18}$$

Z taką samą prędkością kątową obraca się wektor prędkości $\vec{v}$. Zauważmy dodatkowo, że jeśli początkowo prędkość jest prostopadła do pola magnetycznego, to pozostaje prostopadła przez cały czas. W naszym przypadku B jest zmienne, co oznacza, że promień okręgu, po którego łuku w danym momencie porusza się kulka, oraz ω, również są zmienne. Jednocześnie wartość prędkości kulki nie ulega zmianie. Można sobie tę sytuację wyobrażać jako jazdę samochodem ze stałą prędkością ze skręconą kierownicą. Gdy to skręcenie jest ustalone, jedziemy po okręgu ze stałą prędkością kątową. Gdy skręcenie kierownicy zmienia się z czasem, tor ruchu składa się z (nieskończenie krótkich) łuków okręgów, z których każdy może mieć inny promień. Większe B jest odpowiednikiem większego skręcenia kierownicy (mniejszy promień łuku i większa prędkość kątowa obrotu samochodu), a mniejsze B - mniejszego skręcenia kierownicy. Ze wzorów (13), (18) i uwzględniając podaną w treści zadania zależność I od czasu, w jawnej postaci mamy

$$\omega(t) = q\mu_0 \frac{N}{mh} I_0 \sin \Omega t. \tag{19}$$

To oznacza, że kąt α, jaki tworzy wektor prędkości w chwili t z początkowym wektorem prędkości, jest dany wzorem

$$\alpha(t) = \frac{\omega_0}{\Omega} \left(1 - \cos \Omega t\right), \tag{20}$$

gdzie $\omega_0 = q\mu_0 \frac{N}{mh} I_0$. W powyższym wzorze dopasowaliśmy stałą tak, by zachodziło $\alpha(0) = 0$.

Aby zaszła sytuacja opisana w treści zadania, w chwili T wylotu kulki ze zwojnicy musi zachodzić $\alpha = \pi$. Minimalne ω_0 będzie gdy $\cos \Omega T = -1$ (czyli $T = \pi/\Omega$). Zauważmy, że w takim przypadku tor będzie symetryczny względem położenia kulki w chwili $t = T/2$ (kąt α jest wtedy równy $\pi/2$, a wartość pola magnetycznego jest maksymalna, bo $\sin \Omega t$ ma dla $t = \pi/(2\Omega)$ wartość maksymalną), a więc kulka rzeczywiście wyleci ze zwojnicy. Tor odpowiadający rozważanemu przypadkowi jest przedstawiony na rys. 3a.

Rys. 3a: Tor ruchu kulki odpowiadający przypadkowi a).

Zatem minimalne ω_0 spełniające warunek zadania jest równe $\pi\Omega/2$, a stąd

$$I_0 = \frac{\pi m h \Omega}{2 q \mu_0 N}. \tag{21}$$

Zauważmy, że w tym przypadku

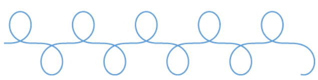
$$\alpha(t) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \cos \Omega t\right), \tag{22}$$

b) (i) Jeśli I_0 będzie dwukrotnie większe, to również pole magnetyczne w każdej chwili będzie dwukrotnie większe, a zatem wektor prędkości kulki będzie się obracał z dwa razy większą prędkością. W tej nowej sytuacji zależność kąta α od czasu będzie dana wzorem

$$\alpha(t) = \pi \left(1 - \cos \Omega t\right). \tag{23}$$

Dla $t = \pi/(2\Omega)$ (czyli w chwili, gdy wartość pola magnetycznego jest maksymalna) otrzymamy $\alpha = \pi$, czyli kulka porusza się w kierunku przeciwnym do początkowego, a promień łuku okręgu, po którym się porusza jest minimalny. W ciągu czasu od $\pi/(2\Omega)$ do π/Ω promień tego łuku będzie rósł do nieskończoności, a wektor prędkości obróci się tak, że w chwili $t = \pi/\Omega$ będzie $\alpha = 2\pi$, czyli kulka będzie się poruszała w początkowym kierunku. W następnych chwilach czasu pole magnetyczne będzie miało przeciwny zwrot,

a zatem kulka będzie skręcała w przeciwną stronę. W efekcie tor będzie taki, jak przedstawiono na Rys. 3b(i).

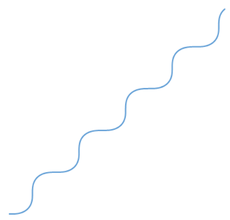


Rys. 3b(i): Tor ruchu kulki odpowiadający przypadkowi b)(i).

(ii) Analogicznie w tym przypadku dostaniemy

$$\alpha(t) = \frac{\pi}{4} \left(1 - \cos \Omega t\right). \tag{24}$$

Po czasie π/Ω (czyli w chwili, gdy wartość pola magnetycznego jest 0) otrzymamy $\alpha = \frac{\pi}{2}$, czyli kulka porusza się w kierunku prostopadłym do poprzedniego. Po kolejnym okresie czasu π/Ω wektor prędkości kulki obróci się znowu o kąt prosty, ale w przeciwną stronę (bo zwrot $\vec{B}$ zmieni się na przeciwny). W efekcie tor będzie taki, jak przedstawiono na Rys. 3b(ii).



Rys. 3b(ii): Tor ruchu kulki odpowiadający przypadkowi b)(ii).

Punktacja zadania 3.

Indukcja pola magnetycznego wewnątrz zwojnicy (wzór (13)) . . . . 1 pkt.
Prędkość kątowa kulki w ruchu po łuku okręgu (wzór (18)) . . . . 1 pkt.
Zauważenie, że ω dane wzorem (18) jest prędkością kątową obrotu wektora prędkości 1 pkt.
Zależność kąta obrotu wektora prędkości od czasu (wzór (20)) oraz szkic toru w przypadku a) . . . . 2 pkt.
I_0 odpowiadające przypadkowi a) (wzór (21)) . . . . 2 pkt.
Szkice torów odpowiadająch przypadkom b)(i) oraz b) (ii) wraz z uzasadnieniami . . . 3 pkt.
W przypadku tylko jednego toru wraz z uzasadnieniem – 1 pkt.