LXXIII OLIMPIADA FIZYCZNA
ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAWODÓW I STOPNIA
CZĘŚĆ I

ZADANIA CZĘŚCI I (termin wysyłania rozwiązań — 13 października 2023 r.)
Przy rozwiązywaniu wszystkich zadań możesz korzystać z Internetu,
pamiętaj jednak, że nie wszystkie znalezione tam informacje są prawdziwe.

CZĘŚĆ TESTOWA

Zadanie W1.

Gdy Marek przyszedł wczesnym rankiem (było jeszcze ciemno) do swojego, stojącego na parkingu samochodu, zobaczył, że przednia szyba jest oszroniona. Zmierzył termometrem temperaturę powietrza i ze zdziwieniem stwierdził, że jest ona dodatnia.

Wybierz najwłaściwszą odpowiedź.

A. Taka sytuacja jest możliwa tylko jeśli w nocy, niedługo przed przyjściem Marka, temperatura powietrza była ujemna.
B. Taka sytuacja jest możliwa, jeśli temperatura powietrza w nocy była dodatnia, a niebo było bezchmurne.
C. Taka sytuacja jest możliwa, jeśli temperatura powietrza w nocy była dodatnia, a niebo było pokryte chmurami.
D. Taka sytuacja nie jest możliwa.

Rozwiązanie zadania W1: B.

Powietrze stosunkowo słabo pochłania promieniowanie cieplne, zatem w bezchmurną noc, przy dodatniej temperaturze powietrza, szyba oddaje ciepło przez promieniowanie, ale jednocześnie jest ogrzewana przez powietrze. Jeśli temperatura powietrza jest niewiele większa od 0 °C, efekt promieniowania może być silniejszy i szyba ochłodzi się poniżej 0 °C, co w konsekwencji może doprowadzić do jej oszronienia.

Oczywiście, oszronienie może też wystąpić, jeśli w nocy, niedługo przed przyjściem Marka, temperatura powietrza była ujemna – ponieważ jednak nie jest to jedyna możliwość, prawidłową odpowiedzią jest: *Taka sytuacja jest możliwa, jeśli temperatura powietrza w nocy była dodatnia, a niebo było bezchmurne.*

Zadanie W2.

Ewa wykonała następujące doświadczenie z wagą kuchenną. Na początku ustawiła wagę na płaskim blacie na nóżkach i wytarowała ją w ten sposób, że waga bez dodatkowego obciążenia wskazywała 0 g.

Następnie położyła wagę poziomo na słoiku, w ten sposób, że nóżki wagi nie miały kontaktu z podłożem. Wskazanie wagi zmieniło się wtedy na -234 g.

Na koniec postawiła wagę na słoiku „do góry nogami” i wtedy waga wskazała -210 g.

Niech M będzie całkowitą masą wagi (razem z nóżkami), a m – masą samych nóżek.

Zakładamy, że możemy przyjąć model działania czujnika jako nieważkiej sprężyny z masywnymi nóżkami na końcu; wskazania wagi są sumą wskazań czujników, a wskazanie pojedynczego czujnika jest liniową funkcją wydłużenia sprężyn, przy czym maksymalne możliwe wydłużenie lub ściśnięcie sprężyny jest większe niż występujące w rozpatrywanym przykładzie.

Na podstawie opisanych obserwacji można stwierdzić, że

A. $M = 210$ g, $m = 12$ g.
B. $M = 210$ g, $m = 24$ g.
C. $M = 234$ g, $m = 12$ g.
D. $M = 234$ g, $m = 24$ g.
E. $M = 246$ g, $m = 12$ g.
F. $M = 258$ g, $m = 24$ g.

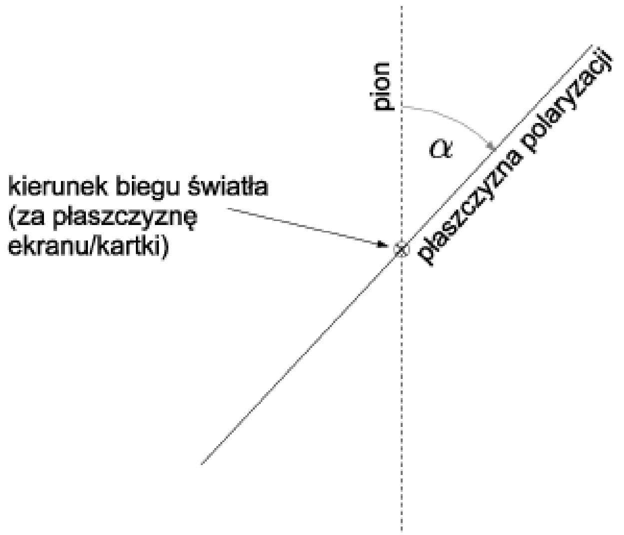
Rozwiązanie zadania W2: C.

W pierwszej sytuacji masa wagi poza jej nóżkami $(M - m)$ naciska na sprężyny łączące wagę z nóżkami. W sytuacji drugiej te same sprężyny są rozciągane masą nóżek m. Stąd różnica między pierwszym i drugim wskazaniem odpowiada masie M, a więc $M = 234$ g. W sytuacji trzeciej, nóżki wagi naciskają na sprężyny, zamiast ją rozciągać, tak jak w sytuacji drugiej. Oznacza to, że różnica między wskazaniem trzecim a drugim odpowiada dwukrotności masy nóżek, a więc $m = 12$ g. Poprawna jest więc odpowiedź $M = 234$ g, $m = 12$ g.

Zadanie W3.

W pewnym kraju, z powodu znacznej liczby wypadków samochodowych spowodowanych oślepianiem przez pojazdy jadące z przeciwka, postanowiono wprowadzić obowiązek używania w nocy świateł spolaryzowanych oraz okularów polaryzacyjnych. Chodzi o to, by zmniejszyć natężenie widzianego przez kierowcę światła reflektorów samochodu jadącego z przeciwka, bez zmniejszania widoczności przeszkody oświetlonej światłem samochodu danego kierowcy.

Rozważana jest koncepcja, w której na reflektory będzie nakładany filtr polaryzujący liniowo światło przechodzące, pod kątem $\alpha_{\text{reflektor}}$ (zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara) w stosunku do pionu - patrz rysunek.



Okulary kierującego mają polaryzować światło przechodzące (a potem wpadające do oka) pod kątem α_{okulary} (również zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara) Aby nie zmniejszać obserwowanej jasności oświetlenia, wymagane będzie odpowiednie zwiększenie mocy świateł.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród poniższych:

A. reflektory powinny polaryzować światło pionowo ($\alpha_{\text{reflektor}} = 0^{\circ}$), a okulary – poziomo ($\alpha_{\text{okulary}} = 90^{\circ}$).
B. reflektory powinny polaryzować światło ukośnie ($\alpha_{\text{reflektor}} = 45^{\circ}$), a okulary – też ukośnie, ale w przeciwną stronę ($\alpha_{\text{okulary}} = -45^{\circ}$).
C. reflektory powinny polaryzować światło ukośnie ($\alpha_{\text{reflektor}} = 45^{\circ}$), a okulary – też ukośnie, w tę samą stronę ($\alpha_{\text{okulary}} = 45^{\circ}$).
D. dla samochodów o parzystych numerach rejestracyjnych reflektory powinny polaryzować światło pionowo ($\alpha_{\text{reflektor}} = 0^{\circ}$), okulary – też pionowo ($\alpha_{\text{okulary}} = 0^{\circ}$), dla samochodów o nieparzystych numerach rejestracyjnych reflektory powinny polaryzować światło poziomo ($\alpha_{\text{reflektor}} = 90^{\circ}$), okulary – też poziomo ($\alpha_{\text{okulary}} = 90^{\circ}$).
E. żadna z pozostałych odpowiedzi nie prowadzi do pożądanego efektu.

Rozwiązanie zadania W3: B.

Prawidłową odpowiedzią jest:

reflektory powinny polaryzować światło ukośnie ($\alpha_{\text{reflektor}} = 45^{\circ}$), a okulary – też ukośnie, ale w przeciwną stronę ($\alpha_{\text{okulary}} = -45^{\circ}$).

W tym przypadku światło reflektorów samochodów jadących z przeciwka będzie spolaryzowane pod kątem 90° w stosunku do polaryzacji światła przepuszczanego przez okulary, a więc światło reflektorów będzie blokowane; światło odbite od przeszkody będzie spolaryzowane w tej samej płaszczyźnie, co światło padające, ale ponieważ kierunek biegu światła się zmieni na przeciwny, będzie ono spolaryzowane pod kątem -45° i będzie przepuszczane przez okulary.

Zadanie W4.

Ślizgający się po lodowisku krążek hokejowy uderzył w boczną bandę pod kątem 45 stopni i odbił się od niej nie tracąc styczności z lodem. Krążek może się odbić od bandy w kierunku, z którego nadleciał pod warunkiem, że:

A. obraca się odpowiednio szybko i we właściwą stronę; współczynnik tarcia krążka o bandę f musi być niezerowy, ale może spełniać warunek $f < \frac{1}{2}$.
B. obraca się odpowiednio szybko i we właściwą stronę; współczynnik tarcia krążka o bandę f musi spełniać warunek $f \geqslant \frac{1}{2}$, ale nie musi spełniać warunku $f \geqslant 1$.
C. obraca się odpowiednio szybko i we właściwą stronę; współczynnik tarcia krążka o bandę f musi spełniać warunek $f \geqslant 1$.
D. był uderzony przez Mariusza Czerkawskiego, przy czym wartość współczynnika tarcia nie ma znaczenia.
E. odbicie krążka w stronę, z której krążek przyleciał nie jest możliwe, nawet jeśli on i banda są zrobione ze specjalnych materiałów.

Rozwiązanie zadania W4: C.

Przyjmijmy, że średnia siła nacisku krążka na bandę w czasie zderzenia jest równa N, a zderzenie trwa czas Δt. Oznaczając przez T średnią siłę tarcia, a przez f współczynnik tarcia mamy

$$|T| \leqslant fN.$$

Z II zasady dynamiki mamy

$$\begin{aligned} p_{x\,\mathrm{kon}} &= p_{x\,\mathrm{pocz}} - N\Delta t, \\ p_{y\,\mathrm{kon}} &= p_{y\,\mathrm{pocz}} - T\Delta t, \end{aligned}$$

gdzie $p_{x\,\mathrm{pocz}}$, $p_{y\,\mathrm{pocz}}$ są odpowiednio prostopadłą oraz równoległą do bandy składową początkowego (tzn. tuż przed zderzeniem) pędu krążka, a $p_{x\,\mathrm{kon}}$, $p_{y\,\mathrm{kon}}$ są odpowiednio prostopadłą oraz równoległą do bandy składową końcowego (tzn. tuż po zderzeniu) pędu krążka.

Padanie pod kątem 45° oznacza że $p_{x\,\mathrm{pocz}} = p_{y\,\mathrm{pocz}}$, a odbicie w stronę, z której krążek przyleciał oznacza że $p_{x\,\mathrm{kon}} = -p_{x\,\mathrm{pocz}}$, $p_{y\,\mathrm{kon}} = -p_{y\,\mathrm{pocz}}$. Zatem otrzymamy

$$T = N,$$

czyli

$$f \geqslant 1.$$

Zatem prawidłową odpowiedzią jest:

obraca się odpowiednio szybko i we właściwą stronę; współczynnik tarcia krążka o bandę musi spełniać warunek $f \geqslant 1$.

Zadanie W5.

Przedstawione niżej rozumowanie jest pewną próbą oszacowania szybkości parowania wody w temperaturze pokojowej.

Z analizy wymiarowej wynika, że masa Δm cząsteczek pary uderzających o powierzchnię S wody w ciągu czasu Δt, spełnia związek

$$\frac{\Delta m}{S\Delta t} = w\sqrt{p\rho_0},$$

gdzie w jest stałą bezwymiarową, p – ciśnieniem tej pary, a ρ_0 to jej gęstość. W przybliżeniu, w którym średni kwadrat modułu składowej prędkości wzdłuż ustalonej osi jest równy kwadratowi średniej modułu tej prędkości otrzymamy $w = \frac{1}{2}$ (patrz **Wyprowadzenie** poniżej); ścisły wynik to $w = 1/\sqrt{2\pi}$.

Kluczowym krokiem rozumowania jest stwierdzenie, że dla pary nasyconej (tzn. będącej w równowadze termodynamicznej z cieczą) masa cząsteczek przechodzących w jednostce czasu z pary do cieczy jest równa masie cząsteczek przechodzących w stronę przeciwną. Dla wody o temperaturze 20 °C ciśnienie pary nasyconej wynosi 2300 Pa, a jej gęstość to 17 g/m^3. Stąd prawa strona powyższego (dla $w = \frac{1}{2}$) jest równa 3,1 kg/(m$^2 \cdot$ s), co oznaczałoby, że w ciągu sekundy powinna odparować warstwa wody o grubości 3,1 mm! Ta wartość jest – oczywiście – wielokrotnie większa od rzeczywistej szybkości parowania wody.

Spośród podanych niżej argumentów wybierz dwa, które są najlepszym wyjaśnieniem niezgodności powyższego wyniku z realiami.

A. Przedstawione szacowanie zakłada, że każda cząsteczka pary, która uderza w powierzchnię cieczy przechodzi do fazy ciekłej, co nie jest prawdą – większość się odbija. A skoro ilość wody ulegającej skraplaniu jest mniejsza niż podano w szacowaniu, to także ilość wody parującej musi być mniejsza.
B. Nad powierzchnią cieczy jest para (nienasycona) i jeśli cząsteczki pary przechodzą do wody, to wskutek tego ilość wody parującej „netto” jest mniejsza. Gdy nie ma przepływu powietrza nad wodą (a nawet jeśli jest, ale słaby), to nad wodą tworzy się warstewka pary prawie nasyconej, co bardzo zmniejsza wypadkowe tempo parowania.
C. Występują zderzenia między cząsteczkami pary, które nie pozwalają im dotrzeć do powierzchni wody w danym czasie.
D. Występują wzajemne oddziaływania między cząsteczkami pary, które nie pozwalają większości z nich uderzać w powierzchnię wody.
E. Przedstawione szacowanie nie uwzględnia grawitacji, która powoduje, że cząsteczkom trudniej jest opuścić fazę ciekłą, a potem oddalić się od powierzchni cieczy.

Wyprowadzenie

Oznaczmy masę cząsteczki pary przez m, a ich liczbę na jednostkę objętości przez n_0. W ciągu czasu Δt w ściankę naczynia uderzą te cząsteczki, które zdążą do niej dolecieć, czyli znajdujące się w odległości $v_x\Delta t$ od ścianki; v_x jest składową prędkości cząsteczki wzdłuż osi prostopadłej do ścianki, przy czym rozważamy tylko cząsteczki lecące w kierunku ścianki, tzn. tylko $v_x > 0$ (dla $v_x < 0$ cząsteczki oddalają się od ścianki, a więc nie uderzą w nią). Stąd liczba cząsteczek uderzających w czasie Δt w ściankę o powierzchni S wynosi

$$\Delta n = \frac{1}{2} \langle |v_x| \rangle\, n_0 S \Delta t,$$

gdzie $\langle |v_x| \rangle$ jest średnią z wartości bezwzględnej v_x; ponieważ powinniśmy rozważać tylko cząsteczki lecące w kierunku ścianki, pojawił się współczynnik $\frac{1}{2}$.

Ponieważ zmiana pędu pojedynczej cząsteczki odbijającej się od ścianki sprężyście jest równa $2mv_x$, zatem średnia zmiana pędu cząsteczek uderzających w rozważaną ściankę wynosi

$$\frac{1}{2} \langle 2mv_x \cdot v_x \rangle\, n_0 S \Delta t$$

(znowu rozważamy tylko cząsteczki lecące w stronę ścianki, stąd $\frac{1}{2}$); dzieląc ją przez $S\Delta t$ otrzymamy ciśnienie pary

$$\begin{aligned} p &= \tfrac{1}{2} \langle 2mv_x \cdot v_x \rangle\, n_0 = \\ &= \langle v_x \cdot v_x \rangle\, \rho_0, \end{aligned}$$

gdzie $\rho_0 = mn_0$ jest gęstością pary. Przyjmując przybliżenie $\langle v_x \cdot v_x \rangle \approx \langle |v_x| \rangle \cdot \langle |v_x| \rangle$, tzn. że średnia z kwadratu prędkości jest równa kwadratowi średniej prędkości otrzymamy

$$\frac{\Delta n}{S\Delta t} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{\rho_0}}n_0.$$

Masę Δm cząsteczek pary uderzających o ściankę (lub o powierzchnię wody) obliczymy mnożąc powyższe wyrażenie przez m, co daje

$$\frac{\Delta m}{S\Delta t} = w\sqrt{p\rho_0},$$

gdzie $w = \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie zadania W5: A+B.

Poprawnymi odpowiedziami są:

Przedstawione szacowanie zakłada, że każda cząsteczka, która uderza w powierzchnię cieczy przechodzi do fazy ciekłej, co nie jest prawdą – większość się odbija. A skoro ilość wody ulegającej skraplaniu jest mniejsza niż podano w szacowaniu, to także ilość wody parującej musi być mniejsza.

oraz

Nad powierzchnią cieczy jest para (nienasycona) i jeśli cząsteczki pary przechodzą do wody, to wskutek tego ilość wody parującej „netto" jest mniejsza. Gdy nie ma przepływu powietrza nad wodą (a nawet jeśli jest, ale słaby), to nad wodą tworzy się warstewka pary prawie nasyconej, co bardzo zmniejsza wypadkowe tempo parowania.

Niepoprawnymi odpowiedziami są:

Występują zderzenia między cząsteczkami pary, które nie pozwalają im dotrzeć do powierzchni wody w danym czasie.

To nie ma wpływu, bo zamiast cząsteczki A, która zderzyła się z cząsteczką B, w stronę powierzchni poleci cząsteczka B.

Występują wzajemne oddziaływania między cząsteczkami pary, które nie pozwalają większości z nich uderzać w powierzchnię wody.

Takie oddziaływania mogą zmieniać zależność ciśnienia od temperatury i gęstości, ale nie mają wpływu na związek między ciśnieniem pary, a liczbą cząstek uderzających w powierzchnię cieczy.

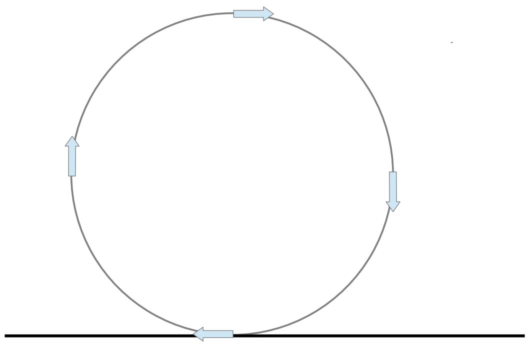
Przedstawione szacowanie nie uwzględnia grawitacji, która powoduje, że cząsteczkom trudniej jest opuścić fazę ciekłą, a potem oddalić się od powierzchni cieczy.

Rzeczywiście grawitacja ogranicza możliwość oddalania się cząsteczki pary od powierzchni cieczy, jednak wpływ tego jest analogiczny, jak wpływ grawitacji na zmianę wraz z wysokością gęstości i ciśnienia powietrza, czyli zaniedbywalny dla rozpatrywanego efektu. Podobnie jest z opuszczaniem fazy ciekłej: ponieważ odległość między cząsteczką na powierzchni cieczy i tą samą cząsteczką tuż po oderwaniu się od tej powierzchni jest niewielka, również niewielki jest wpływ grawitacji na to odrywanie się.

CZĘŚĆ NUMERYCZNA

Zadanie N1.

Przed lądowaniem w Normandii w roku 1944, alianci rozważali użycie do niszczenia zasieków dużych metalowych kół, napędzanych umieszczonymi na obwodzie małymi rakietami.



Przyjmując, że nie ma poślizgu i pomijając opory przy toczeniu, wyznacz jaką prędkość v może osiągnąć na poziomej powierzchni takie początkowo spoczywające w płaszczyźnie pionowej koło o promieniu $r = 1{,}2$ m, na którym zamocowano $n = 4$ rakiet o impulsie (popędzie) siły ciągu $J = 2500$ N·s każda.

Całkowita masa koła jest równa $m = 300$ kg, jego moment bezwładności względem osi obrotu (środka masy) wynosi $I_{\mathrm{CM}} = 0{,}8 \cdot mr^2$.
Dla stałej siły F działającej w ciągu czasu t mamy $J = Ft$.

Rozwiązanie zadania N1.

Wypadkowy moment siły względem środka koła jest równy

$$M = nFr - Tr,$$

gdzie F jest siłą ciągu jednej rakiety, a T – siłą tarcia między kołem a podłożem. Zgodnie z II zasadą dynamiki dla ruchu obrotowego przyspieszenie kątowe ε koła będzie równe

$$\varepsilon = \frac{M}{I_{\mathrm{CM}}}.$$

Ponieważ tylko siła tarcia T daje wkład do poziomej składowej siły wypadkowej działającej na koło, jego przyspieszenie będzie równe

$$a = \frac{T}{m}.$$

Ze względu na brak poślizgu spełniony jest związek

$$a = \varepsilon \cdot r.$$

Z powyższych równań otrzymamy

$$a = \frac{nF}{m + \frac{I_{\mathrm{CM}}}{r^2}}.$$

To oznacza, że szukana prędkość jest równa

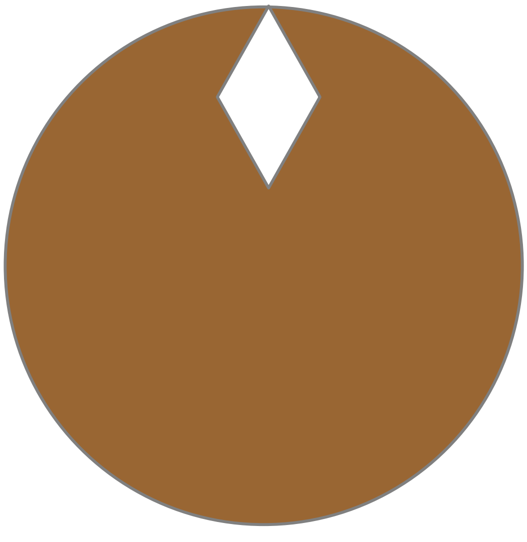
$$v = \frac{nJ}{m + \frac{I_{\mathrm{CM}}}{r^2}}.$$

W szczególnym przypadku $r = 1{,}2$ m, $n = 4$, $J = 2500$ N·s, $m = 300$ kg, $I_{\mathrm{CM}} = 0{,}8 \cdot mr^2$ otrzymamy

$$v = 18{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Zadanie N2.

W roku 3333 wewnątrz księżyca o promieniu $R = 1{,}7 \cdot 10^6$ m wydrążono jaskinię w kształcie połączonych podstawami stożków o promieniu $r = 0{,}2 \cdot 10^6$ m oraz wysokości $h/2$ każdy, gdzie $h = 0{,}4 \cdot 10^6$ m – patrz rysunek.



Wyznacz prędkość v, jaką na dnie jaskini osiągnie ciało spadające swobodnie z najwyższego punktu jaskini. Przyjmij, że księżyc jest jednorodny, a jego gęstość wynosi $\rho = 3{,}3 \cdot 10^3$ kg/m^3. Pomiń oddziaływanie z innymi ciałami.
Uniwersalna stała grawitacyjna jest równa $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m^3/ (kg · s^2).

Rozwiązanie zadania N2.

Natężenie pola grawitacyjnego rozważanego księżyca jest równe natężeniu polu grawitacyjnego jednorodnej kuli o promieniu R i gęstości ρ minus natężenie pola grawitacyjnego połączonych stożków o gęstości ρ – odpowiadających wydrążeniu.

Przyspieszenie grawitacyjne wewnątrz jednorodnej kuli o promieniu R i gęstości ρ, w odległości r $(r < R)$ jest równe natężeniu pola grawitacyjemu kuli o promieniu r, zatem wynosi

$$\gamma(r) = \frac{G\frac{4}{3}\pi\rho r^3}{r^2} = \tfrac{4}{3}\pi G\rho r,$$

gdzie $\frac{4}{3}\rho r^3$ jest masą kuli o promieniu r.

Rozpatrując pole samego zestawu stożków stwierdzamy, że ze względu na symetrię tej bryły energia potencjalna jej oddziaływania ze spadającym ciałem ma w wierzchołku górnego stożka tę samą wartość, co w wierzchołku dolnego. Z bilansu energii wynika więc, że wydrążenie nie ma wpływu na prędkość ciała na dnie jaskini – będzie ona taka, jakby księżyc był jednorodny (oczywiście z wydrążonym wąskim szybem umożliwiającym ciału swobodny spadek).

Dla ciała o masie μ powyższy wzór na γ oznacza, że jego energia potencjalna jest równa

$$E_{\mathrm{p}} = \tfrac{1}{2}\tfrac{4}{3}\pi\mu G\rho r^2.$$

Zatem zasada zachowania energii dla położenia początkowego ($r = R$, prędkość 0), oraz końcowego ($r = R - h$, prędkość v) masy ma postać

$$\tfrac{1}{2}\mu 0^2 + \tfrac{2}{3}\pi\mu G\rho R^2 = \tfrac{1}{2}\mu v^2 + \tfrac{2}{3}\pi\mu G\rho\,(R-h)^2\,.$$

Stąd szukana prędkość wynosi

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\tfrac{4}{3}\pi G\rho\left(R^2 - (R-h)^2\right)} = \\ &= \sqrt{\tfrac{4}{3}\pi G\rho\,(2Rh - h^2)}. \end{aligned}$$

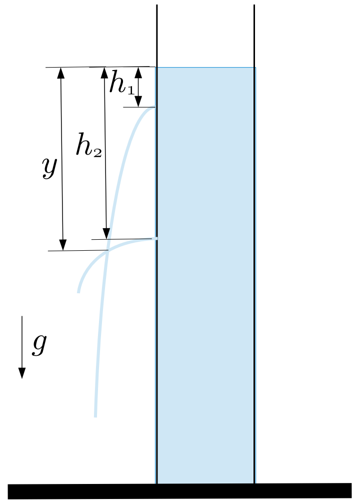
W szczególnym przypadku $R = 1{,}7 \cdot 10^6$ m, $h = 0{,}4 \cdot 10^6$ m, $\rho = 3{,}3 \cdot 10^3$ kg/m^3 otrzymamy

$$v = 1052\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Zadanie N3.

W wysokim, wypełnionym wodą, stojącym pionowo cylindrze zrobiono poniżej poziomu wody dwa małe otwory, jeden pod drugim: jeden na gł ębokości $h_1 = 0{,}5$ m , a drugi na głębokości $h_2 = 0{,}9$ m (patrz rysunek).

Strumienie wody wylatującej z tych otworów przecinają się w pewnym punkcie. Wyznacz odległość y poziomu wody w cylindrze od płaszczyzny poziomej zawierającej ten punkt.



Przyjmij, że prędkość każdego wylatującego z otworu elementu objętości wody jest taka sama i pozioma. Gęstość wody $\rho = 1000$ kg/m^3, przyspieszenie grawitacyjne $g = 9{,}81$ m/s^2.

Uwaga: Gdy w naczyniu jest walcowaty otwór, to wylatujący strumień tuż przy brzegu otworu nie jest jednorodny - strumień ulega zwężeniu na dystansie kilku średnic otworu i dopiero w tym miejscu struga staje się jednorodna. Należy przyjąć, że ten dystans jest w rozpatrywanym zagadnieniu zaniedbywalny.

Rozwiązanie zadania N3.

Prędkość wody wylatującej z otworu znajdującego się x poniżej poziomu wody jest spełnia związek

$$\tfrac{1}{2}\rho v^2 = \rho g h,$$

który jest w istocie zasadą zachowania energii. Dla naszych dwóch strumieni mamy zatem

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}v_1^2 &= gh_1, \\ \tfrac{1}{2}v_2^2 &= gh_2, \end{aligned}$$

gdzie v_1, v_2 są prędkościami wylotowymi odpowiednich strumieni. Jeśli strumienie się przecinają w położeniu $(x,\ y)$, gdzie x jest odległością od cylindra (poziomą odległością od otworów), natomiast y szukaną odległością od poziomu cieczy. Ponieważ początkowo strumienie są poziome, mamy

$$\begin{aligned} x &= v_1 t_1,\ \ h_1 - y = \tfrac{1}{2} g t_1^2, \\ x &= v_2 t_2,\ \ h_2 - y = \tfrac{1}{2} g t_2^2, \end{aligned}$$

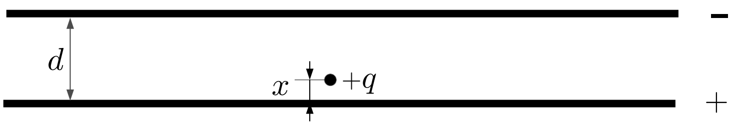
gdzie t_1 lub t_2 jest czasem, jaki zajmie małej objętości cieczy wylatującej z odpowiedniego otworu dolecenie do punktu $(x,\ y)$. Po przekształceniach otrzymujemy

$$y = h_1 + h_2.$$

W szczególnym przypadku $h_1 = 0{,}5$ m, $h_2 = 0{,}9$ m, otrzymamy $y = 1{,}4$ m.

Zadanie N4.

Mała kulka, naładowana dodatnim ładunkiem $q = 10^{-15}$ C, znajduje się w odległości x od dodatnio naładowanej, metalowej okładki kondensatora płaskiego. Powierzchnia okładek kondensatora jest równa $S = 10^{-2}$ m^2, odległość między nimi $d = 10^{-3}$ m, a napięcie między okładkami jest stałe i wynosi $U = 1$ V.



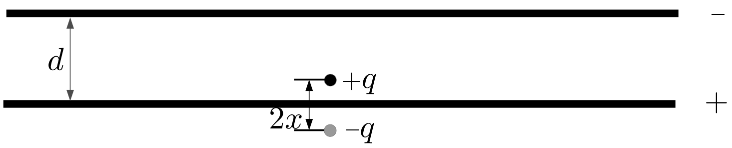
Jakie musi być x, aby siła elektrostatyczna działająca na kulkę była równa 0?

Przyjmij $x \ll d \ll$ liniowe rozmiary okładki, oraz, że q jest znacznie mniejsze od ładunku zgromadzonego w kondensatorze. Pomiń grawitację.

Przenikalność elektryczna próżni wynosi $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m.

Rozwiązanie zadania N4.

Potencjał na okładce kondensatora jest stały; z drugiej strony potencjał pochodzący od punktowego ładunku (rozważanej małej kulki) znajdującego się w pobliżu takiej okładki jest różny w różnych punktach tej okładki. To oznacza, że obecność ładunku powoduje wyindukowanie w okładce rozkładu ładunków powodującego stałość potencjału na okładce. Patrząc od strony kulki, pole pochodzące od tego rozkładu jest takie, jakby pochodziło od kulki o ładunku $-q$ znajdującej się względem rzeczywistej kulki symetrycznie względem płaszczyzny okładki (jest to tzw. „metoda obrazów”), patrz rysunek.



Kondensator wraz z naładowaną kulką oraz ładunkiem obrazowym.

Całkowite pole elektryczne, w którym znajduje się kulka, jest superpozycją oryginalnego pola elektrycznego oraz pola od kulki „obrazowej”

$$E = \frac{U}{d} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (2x)^2}.$$

Siła elektrostatyczna działająca na kulkę jest równa 0 gdy E jest równe 0, stąd

$$x = \sqrt{\frac{q/(16\pi\varepsilon_0)}{U/d}}.$$

Dla $q = 10^{-15}$ C, $d = 10^{-3}$ m , $U = 1$ V otrzymamy

$$x = 4{,}74 \cdot 10^{-5} \text{ m}.$$

Uwaga: Ponieważ mamy też drugą okładkę, na której potencjał też powinien być stały, pojawia się też ładunek obrazowy, symetryczny względem drugiej okładki. Ten ładunek powinien mieć swój obraz względem pierwszej okładki, a ten obraz swój obraz względem drugiej okładki itd. Ponieważ jednak $x \ll d$, możemy pominąć wszystkie obrazy za wyjątkiem pierwszego.

Zadanie N5.

Jednym z rozważanych sposobów magazynowania energii pochodzącej ze źródeł odnawialnych, jest wykorzystywanie podgrzewania piasku.

Rozważmy wielki magazyn piasku, izolowany cieplnie od otoczenia. Piasek jest wstępnie podgrzewany do temperatury $T_1 = 600$ K – energii związanej z tym nie uwzględniamy w cyklach ładowania i rozładowania energii (ale potem możemy ją odzyskać). Ładowanie energią polega na podgrzaniu piasku za pomocą grzałek zasilanych energią elektryczną z źródeł odnawialnych od temperatury T_1 do temperatury $T_1 + \Delta T$.

Podgrzany piasek jest następnie wykorzystywany do ogrzewania pomieszczeń za pomocą czynnika grzewczego o temperaturze $T_2 = 350$ K. W trakcie tego ogrzewania temperatura piasku spada co najwyżej do początkowej temperatury T_1 (czyli gdy temperatura piasku wynosi T_1, to nasz magazyn energii uważamy za w pełni rozładowany). Wyznacz, jaką największą teoretycznie ilość ciepła można przekazać czynnikowi grzewczemu, jeśli piasek został podgrzany energią elektryczną o wartości 1 kWh. Możesz rozważać dowolne urządzenie wymieniające z otoczeniem o temperaturze $T_3 = 273$ K jedynie ciepło. Przyjmij, że piasku jest na tyle dużo, że jego temperatura przy podgrzewaniu wzrasta bardzo nieznacznie ponad T_1, tzn. $\Delta T \ll T_1$.

Rozwiązanie zadania N5.

Najefektywniejszym sposobem jest wykorzystanie do ogrzewania pompy ciepła (czyli silnika Carnota działającego w cyklu odwróconym) czerpiącej ciepło z otoczenia i przekazującej je czynnikowi grzewczemu. Moc potrzebną do napędzania tej pompy możemy uzyskać wykorzystując silnik Carnota działający między podgrzanym piaskiem, a otoczeniem.

Dla silnika Carnota działającego między termostatami A oraz B o temperaturach T_A oraz T_B, gdzie $T_\mathrm{A} > T_\mathrm{B}$ mamy

$$\begin{aligned} W &= \left(1 - \frac{T_\mathrm{B}}{T_\mathrm{A}}\right) Q_\mathrm{A}, \\ \bar{Q}_\mathrm{B} &= Q_\mathrm{A} - W = \frac{T_\mathrm{B}}{T_\mathrm{A}} Q_\mathrm{A}, \end{aligned}$$

gdzie Q_A jest ciepłem pobranym z termostatu A, W pracą wykonaną przez silnik, a $\bar{Q}_\mathrm{B}$ – ciepłem oddanym do termostatu B.

Dla pompy ciepła działającej między tymi samymi termostatami, czyli dla silnika Carnota działającego w cyklu odwrotnym, mamy analogiczne wzory

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \left(1 - \frac{T_\mathrm{B}}{T_\mathrm{A}}\right) \bar{Q}_\mathrm{A}, \\ Q_\mathrm{B} &= \bar{Q}_\mathrm{A} - \bar{W} = \frac{T_\mathrm{B}}{T_\mathrm{A}} \bar{Q}_\mathrm{A}, \\ \bar{Q}_\mathrm{A} &= \frac{\bar{W}}{1 - \frac{T_\mathrm{B}}{T_\mathrm{A}}}, \end{aligned}$$

gdzie $\bar{Q}_\mathrm{A}$ jest ciepłem oddanym termostatowi A, $\bar{W}$ – energią dostarczoną do pompy, a Q_B – ciepłem pobranym z termostatu B.

Dla silnika Carnota działającego pomiędzy piaskiem o temperaturze T_1 a otoczeniem o temperaturze T_3, praca wykonana przez ten silnik wynosi

$$W = \left(1 - \frac{T_3}{T_1}\right) Q_1,$$

gdzie Q_1 jest ciepłem pobranym z piasku.

Jeśli wykorzystamy tę pracę do napędzania pompy cieplnej działającej między otoczeniem a czynnikiem grzewczym, ciepło dostarczone przez pompę czynnikowi grzewczemu będzie równe

$$\begin{aligned}\bar{Q}_2 &= \frac{W}{1-\frac{T_3}{T_2}} = \frac{1-\frac{T_3}{T_1}}{1-\frac{T_3}{T_2}}Q_1 = \\ &= \frac{T_1-T_3}{T_1-\frac{T_1}{T_2}T_3}Q_1.\end{aligned}$$

Zauważmy, że ponieważ $T_1 > T_2 > T_3$, zawsze mamy $\bar{Q}_2 > Q_1$. W szczególnym przypadku $T_1 = 600$ K, $T_2 = 350$ K, $T_3 = 273$ K oraz $Q_1 = 1$ kWh, otrzymamy

$$\bar{Q}_2 = 2{,}48 \text{ kWh}.$$

Dla $T_1 = 700$ K, $T_2 = 350$ K, $T_3 = 273$ K oraz $Q_1 = 1$ kWh, otrzymamy

$$\bar{Q}_2 = 2{,}77 \text{ kWh}.$$

Dla $T_1 = 500$ K, $T_2 = 350$ K, $T_3 = 273$ K oraz $Q_1 = 1$ kWh, otrzymamy

$$\bar{Q}_2 = 2{,}06 \text{ kWh}.$$

Uwaga: Zamiast rozważać silnik Carnota działający między piaskiem a otoczeniem (czyli między T_1 a T_3), można rozważać silnik cieplny działający między piaskiem a czynnikiem grzewczym (czyli między T_1 a T_2); wtedy praca uzyskana w wyniku działania tego silnika będzie mniejsza (bo mniejsza będzie sprawność), ale silnik przekaże dodatkowe ciepło czynnikowi roboczemu. Sumaryczny wynik będzie taki sam, jak przedstawiony powyżej.

Zadanie N6.

Pewien samochód terenowy ma cztery koła o osiach odległych o $d = 2{,}5$ m, przy czym koła tej samej osi znajdują się w odległości $ww = 1{,}6$ m. Koła nie są skręcane, a zmianę kierunku jazdy uzyskuje się przez ich różną prędkość obrotową. Rozważmy sytuację, w której lewe koła obracają się do przodu, prawe do tyłu, przy czym prędkość bieżnika kół względem samochodu jest równa $v = 10$ m/s. Wyznacz, z jaką prędkością kątową samochód będzie się jednostajnie obracał wokół osi pionowej, jeśli koła są równomiernie obciążone, a współczynnik tarcia kół o podłoże wynosi $f = 0{,}5$.

Rozwiązanie zadania N6.

Przyjmijmy, że samochód obraca się wokół osi pionowej przechodzącej przez środek masy z prędkością kątową Ω. Rozważymy tylko lewe przednie koło, ponieważ rozważanie każdego z kół prowadzi do takiego samego wyniku.

Przyjmując oś y wzdłuż samochodu, a oś x od lewego koła do prawego, prędkość punktu styczności koła z podłożem ma składowe

$$\begin{aligned}v_x &= \Omega\frac{w}{2}, \\ v_y &= \Omega\frac{d}{2}.\end{aligned}$$

Ponieważ prędkość bieżnika koła względem samochodu jest równa v, prędkość $\vec{v}'$ tego bieżnika względem podłoża ma składowe

$$\begin{aligned} v'_x &= \Omega\frac{d}{2}, \\ v'_y &= \Omega\frac{w}{2} - v. \end{aligned}$$

Siła tarcia działająca na koło jest skierowana przeciwnie do powyższej prędkości. Jeśli ta siła tarcia ma niezerową składową prostopadłą do osi punkt styczności – oś obrotu, to ruch obrotowy samochodu będzie przyspieszał (lub spowalniał – w zależności od zwrotu). Zatem przy obrocie jednostajnym ta składowa musi być równa zeru. Ponieważ kierunek prostopadły do rozważanej osi jest dany przez wektor

$$\vec{p} = \left(\frac{d}{2},\ \frac{w}{2}\right),$$

rozważany warunek oznacza

$$\vec{p} \cdot \vec{v}' = 0,$$

czyli

$$\Omega\frac{d}{2}\frac{d}{2} + \left(\Omega\frac{w}{2} - v\right)\frac{w}{2} = 0.$$

Stąd

$$\Omega = \frac{2vw}{d^2 + w^2}.$$

Zauważmy, że $\omega\sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{w^2}{4}} = \frac{\frac{w}{2}}{\sqrt{\frac{d^2}{4}+\frac{w^2}{4}}}v$ jest równa tej składowej wektora prędkości $\vec{v}$, która jest prostopadła do osi punkt styczności-oś obrotu. Tego właśnie należy oczekiwać w przypadku jednostajnego obrotu.

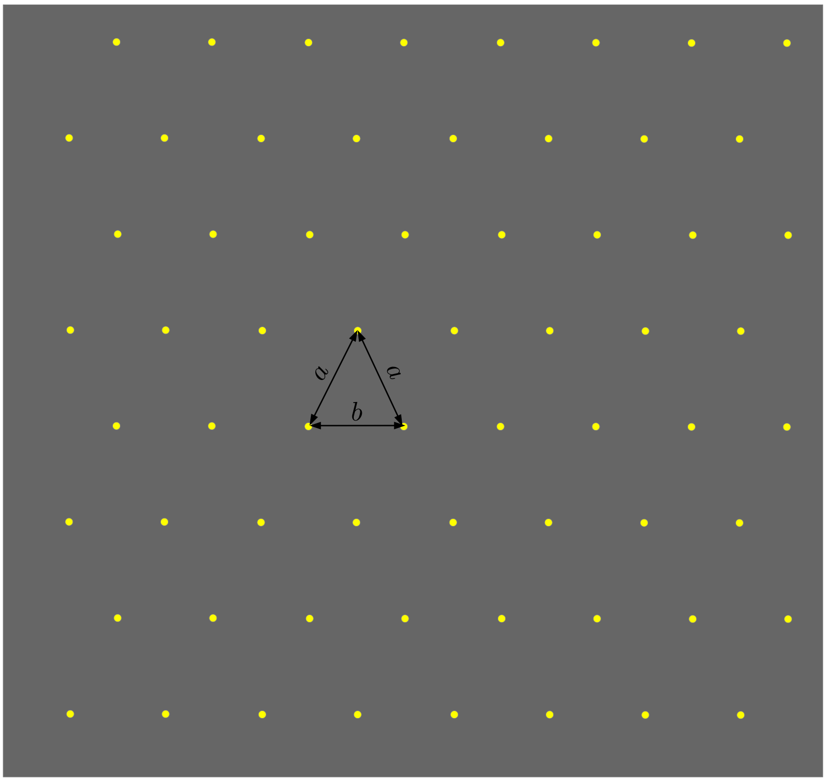
W szczególnym przypadku $d = 2{,}5$ m, $w = 1{,}6$ m, $v = 10$ m/s otrzymamy

$$\Omega = 3{,}63\ \frac{1}{\mathrm{s}},$$

czyli 0,58 obrotu na sekundę.

Zadanie N7.

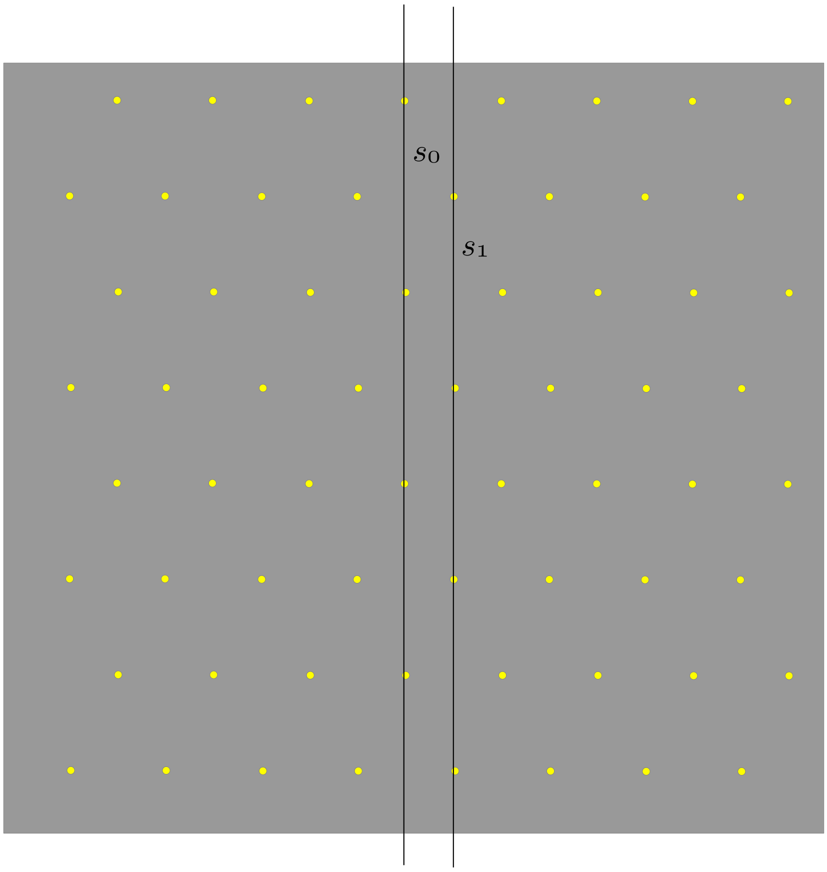
W cienkiej, płaskiej płytce znajdują się małe otwory ułożone równomiernie w kształt siatki, tak, że trzy najbliższe sobie leżą w wierzchołkach trójkąta równoramiennego o ramionach o długości $a = 2000$ nm, oraz podstawie o długości $b = 2500$ nm – patrz rysunek.



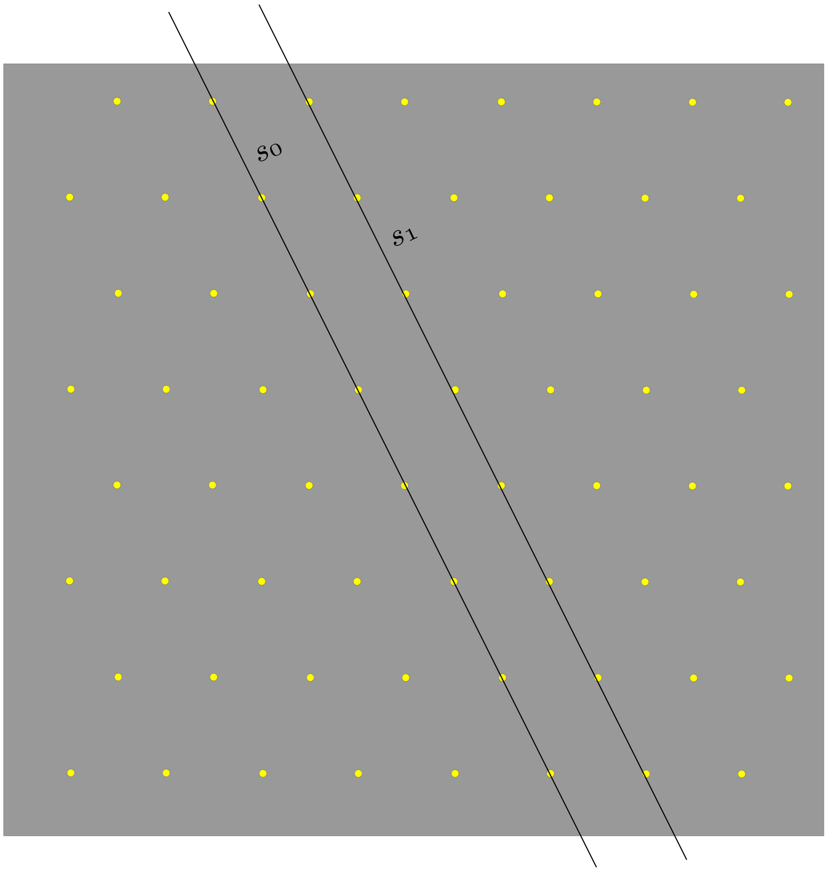
Na tę płytkę pada prostopadle wiązka światła monochromatycznego o długości fali $\lambda = 600$ nm. Wyznacz najmniejszy kąt (względem kierunku padającej wiązki), pod jakim będzie widoczne pierwsze maksimum interferencyjne, takie, przy którym wszystkie fale dochodzące do danego punktu ekranu z różnych otworów interferują konstruktywnie. Ekran znajduje się w znacznie większej odległości od płytki niż jej rozmiary poprzeczne, a rozmiary poprzeczne płytki są znacznie większe, niż a oraz b.

Rozwiązanie zadania N7.

Oznaczmy przez s_0 oś leżącą w płaszczyźnie siatki oraz prostopadłą do płaszczyzny, w której badamy odchylenie od pierwotnego kierunku biegu wiązki, przechodzącą dodatkowo przez co najmniej jeden otwór w płytce.



Zauważmy, że w ramach stosowanego tu przybliżenia (ekran w znacznie większej odległości od płytki niż jej rozmiary poprzeczne), faza wszystkich promieni wychodzących z otworów leżących na osi s_0 jest taka sama. Podobnie faza wszystkich promieni wychodzących z otworów leżących na osi s_1, równoległej s_0 też jest taka sama (choć różna, niż tych leżących na osi s_0). To oznacza, że dla porównywania różnic faz, naszą płytkę z otworami można traktować jak siatkę dyfrakcyjną ze szczelinami pokrywającymi się z osią s_0, s_1 oraz innymi osiami równoległymi do s_0 i przechodzącymi przez co najmniej jeden otwór. Rozpatrywane pierwsze maksimum interferencyjne będzie, gdy różnica faz dla promieni wybiegającymi z sąsiednich „szczelin" (czyli osi) będzie równa 2π; kąt będzie najmniejszy, gdy odległość między sąsiednimi „szczelinami" jest największa. Taka sytuacja zajdzie, jeśli s_0 będzie przechodziła przez jeden z boków rozważanego trójkąta, tak, by wysokość opuszczona na ten bok była największa.



Jeśli $a \geqslant b$, to najdłuższą wysokością jest wysokość opuszczona na podstawę b i jest ona równa $h_b = \sqrt{a^2 - b^2/4}$; jeśli $a < b$ to najdłuższą wysokością jest wysokość opuszczona na jedno z ramion a i jest ona równa $h_a = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - b^2/4}$. Zatem najmniejszy szukany kąt α, odpowiadający maksimum interferencyjnemu, spełnia zwykły warunek maksimum dla siatki dyfrakcyjnej

$$\sin\alpha = \frac{\lambda}{h},$$

czyli

$$\alpha = \arcsin\frac{\lambda}{h}$$

gdzie

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{a^2 - b^2/4} \text{ jeśli } a \geqslant b, \\ h &= \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - b^2/4} \text{ jeśli } a < b. \end{aligned}$$

W szczególnym przypadku $a = 2000$ nm, $b = 2500$ nm, $\lambda = 600$ nm otrzymamy

$$\begin{aligned} h &\approx 1951{,}6 \text{ nm}, \\ \alpha &\approx 0{,}307 \text{ (rad)}. \end{aligned}$$

Zadanie N8.

Metalową sferę o promieniu $R = 0{,}1$ m przecięto płaszczyzną odległą od jej środka o $d = 0{,}05$ m, a powstałe części odsunięto od siebie na małą odległość. Temperatura mniejszej części wynosi $T_1 = 400$ K, a większej $T_2 = 300$ K . Wyznacz moc ciepła przepływającego między częściami.

Wewnątrz oraz na zewnątrz części sfery jest próżnia. Powierzchnie potraktuj jako ciało doskonale czarne.

Wyszukaj w dostępnych Ci źródłach jak promieniuje i jak absorbuje promieniowanie ciało doskonale czarne. Stała Stefana-Boltzmanna jest równa $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ W/(m$^2 \cdot$ K^4).

Rozwiązanie zadania N8.

Moc promieniowana przez małą powierzchnię o mierze S ciała doskonale czarnego (prawo Stefana-Boltzmanna) jest dana wzorem

$$P = S\sigma T^4.$$

Jeśli powierzchnia jest wklęsła, to część wypromieniowanej energii jest z powrotem pochłaniana; w rozważanym przypadku do drugiej części sfery przechodzi moc odpowiadająca powierzchni przekroju łączącego obie części, równego πr^2, gdzie $r = \sqrt{R^2 - d^2}$. Zatem z części o temperaturze T_1 do części o temperaturze T_2 przepływa promieniowanie o mocy moc $\pi r^2 \sigma T_1^4$; z części o temperaturze T_2 do części o temperaturze T_1 przepływa promieniowanie o mocy moc $\pi r^2 \sigma T_2^4$. Zatem z części o temperaturze T_1 do części o temperaturze T_2 przepływa wypadkowo ciepło o mocy

$$P = \pi r^2 \sigma \left(T_1^4 - T_2^4\right),$$

Wartość bezwzględna mocy ciepła przepływającego między częściami sfery jest równa

$$|P| = \pi\sigma \left(R^2 - d^2\right) \left|T_1^4 - T_2^4\right|.$$

W szczególnym przypadku $R = 0{,}1$ m, $d = 0{,}05$ m, $T_1 = 400$ K, $T_2 = 300$ K otrzymamy

$$|P| = 23{,}4 \text{ W}.$$

Zadanie N9.

Niektóre tramwaje magazynują energię elektryczną w superkondensatorach, co pozwala im na przebycie pewnego odcinka drogi bez zasilania z sieci trakcyjnej. Podaj minimalną pojemność takiego superkondensatora, jeśli energia zgromadzona w nim pozwala na ruszenie tramwaju o masie $m = 40 \cdot 10^3$ kg z przystanku i osiągnięcie przez niego prędkości $v = 10$ m/s. Początkowe (gdy tramwaj spoczywa) napięcie na tym superkondensatorze jest równe $U = 600$ V, a końcowe (gdy tramwaj osiągnął prędkość v) jest równe $U/2$.

Rozwiązanie zadania N9.

Energia potrzebna do rozpędzenia tramwaju jest równa

$$\tfrac{1}{2}mv^2.$$

Wykorzystana energia kondensatora o pojemności C jest równa

$$\tfrac{1}{2}C\left(U^2-\left(\frac{U}{2}\right)^2\right)=\tfrac{3}{8}CU^2.$$

Stąd

$$C=\tfrac{4}{3}\frac{mv^2}{U^2}.$$

W szczególnym przypadku $m = 40\cdot 10^3$ kg, $U = 600$ V, $v = 10$ m/s, otrzymamy

$$C = 14{,}8 \text{ F}.$$

Zadanie N10.

Szklana probówka o masie $m = 21$ g pływa przy powierzchni wody dnem do góry. Probówka zawiera $V_\mathrm{p} =$ 15 cm^3 powietrza, zaś objętość samego szkła wynosi $V_\mathrm{s} =$ 7 cm^3. Na jaką maksymalną głębokość h można zanurzyć tę probówkę, aby po puszczeniu nie zatonęła?

Przyjmij, że temperatura powietrza w probówce się nie zmienia (zanurzamy ją na tyle wolno, że jej temperatura jest stale równa temperaturze otoczenia), oraz, że rozmiary probówki można pominąć w porównaniu z h.

Ciśnienie atmosferyczne wynosi $p_0 = 100$ kPa, gęstość wody $\rho = 1$ g/cm^3, przyspieszenie ziemskie $g = 9{,}81$ m/s^2. Pomiń ciśnienie pary wodnej w probówce i przyjmij, że początkowe ciśnienie powietrza w probówce jest równe p_0.

Rozwiązanie zadania N10.

Objętość powietrza w probówce na głębokości h jest równa

$$V_h=\frac{p_0}{p_0+\rho g h}V_\mathrm{p},$$

stąd siła wyporu jest równa

$$\left(V_\mathrm{s}+V_h\right)\rho g.$$

Maksymalna głębokość, na jaką można zanurzyć probówkę, odpowiada sytuacji, gdy siła wyporu jest równa sile ciężkości

$$mg=\left(V_\mathrm{s}+V_h\right)\rho g$$

czyli

$$m=\left(V_\mathrm{s}+\frac{1}{1+\frac{\rho g}{p_0}h}V_\mathrm{p}\right)\rho.$$

Stąd

$$h=\frac{p_0}{g}\left(\frac{V_\mathrm{p}}{m-\rho V_\mathrm{s}}-\frac{1}{\rho}\right).$$

W szczególnym przypadku $m = 21$ g, $V_\mathrm{p} =$ 15 cm^3, $V_\mathrm{s} =$ 7 cm^3 otrzymamy

$$h = 0{,}728 \text{ m}.$$