

LXXIII OLIMPIADA FIZYCZNA

ZAWODY II STOPNIA

CZEŚĆ DOŚWIADCZALNA, 18.02.2024

Za zadanie można otrzymać maksymalnie 40 punktów.

Masz do dyspozycji:

- ołówek,
- kartkę papieru,
- równy, poziomy blat stołu,
- linijkę,
- tekturowe pudło,
- nić,
- taśmę klejącą,
- nożyczki,
- papier milimetrowy.

Wyznacz współczynnik tarcia statycznego wkładu ołówka (czasem niesłusznie nazywanego grafitem) o papier.

Uwaga 1: Do pomiarów należy użyć ołówka i białej, czystej kartki dostarczonej przez organizatorów. Nie należy używać własnego ołówka ani papieru. Nie należy również używać papieru milimetrowego jako powierzchni o którą trze ołówek.

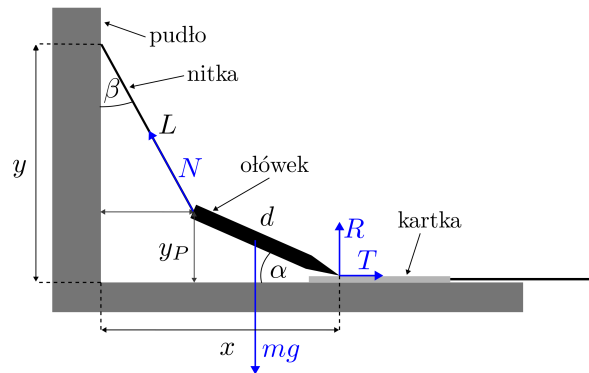
Uwaga 2: Przy wykonywaniu pomiarów niedopuszczalne jest jakiegokolwiek niszczenie ołówka. W szczególności, nie należy usuwać drewnianej obudowy, wyjmować wkładu, temperować ołówka itp.

Uwaga 3: W razie przypadkowego zniszczenia kartki lub ołówka, należy zwrócić się do organizatorów po nowe.

Rozwiązanie zadania

Część teoretyczna

Do wyznaczenia współczynnika tarcia statycznego wkładu ołówka o papier użyto układu przedstawionego na poniższym rysunku.



Rys. 1. Schemat układu pomiarowego z zaznaczonymi (na niebiesko) siłami działającymi na ołówek. Czarna, pozioma strzałka oznacza kierunek, w którym ciągnięto kartkę, aby znaleźć moment zerwania tarcia statycznego

Niech m będzie masą ołówka, d – jego długością, g – przyspieszeniem ziemskim, N – siłą naciągu nitki, R – siłą reakcji podłoża (kartki) działającą na ołówek, T – siłą tarcia statycznego działającą na ołówek (o zwrocie w prawo). W sytuacji statycznej siły poziome, pionowe i momenty sił działające na ołówek równoważą się. Oznacza to, że spełnione są następujące zależności:

$$N \sin \beta = T, \quad (1)$$

$$N \cos \beta + R = mg, \quad (2)$$

$$\frac{mg}{2}d \cos \alpha = Td \sin \alpha + Rd \cos \alpha, \quad (3)$$

ostatnie z równań odpowiada równowadze momentów sił względem punktu zawieszenia ołówka na nitce (równanie to można zastąpić równaniem równowagi momentów względem dowolnego innego punktu, nie zmieni to końcowego wyniku). W równaniu (3) przyjęto, że środek masy ołówka znajduje się w połowie jego długości. Położenie środka masy można również wyznaczyć doświadczalnie, szukając punktu podparcia przy którym ołówek jest w równowadze, na przykład zawieszając ołówek na nitce. Przekształcając powyższe równania tak, aby wyeliminować z nich zmienne mg i N otrzymujemy

$$T = \frac{R}{\operatorname{ctg} \beta - 2 \operatorname{tg} \alpha}. \quad (4)$$

Jeśli f jest szukanym współczynnikiem tarcia statycznego, to w sytuacji statycznej musi zachodzić $T \leq Rf$. Oznacza to, że w sytuacji granicznej między równowagą ołówka i zerwaniem siły tarcia spełniona jest zależność

$$f = \frac{1}{\operatorname{ctg} \beta - 2 \operatorname{tg} \alpha}. \quad (5)$$

Pomiar kątów α i β odpowiadających granicznej sytuacji między równowagą ołówka i poślizgiem pozwala na wyznaczenie współczynnika f .

Część doświadczalna

Opis układu pomiarowego

Zmontowano układ przedstawiony na rysunku 1. Nitkę przyklejono do pudełka przy pomocy taśmy klejącej, drugi koniec nitki przyklejono do niezatemperowanego końca ołówka. Zmierzono długość ołówka d i długość nitki L . Koniec ołówka z wystającym wkładem ułożono na kartce, zadbane aby w trakcie eksperymentu drewniana obudowa nie miała kontaktu z kartką. Kartkę powoli ciągnięto w prawo aż do momentu w którym ołówek zaczął się ślizgać. Kluczowym elementem eksperymentu jest pomiar długości umożliwiających obliczenie kątów α i β w sytuacji w której zrywana jest siła tarcia. Pomiar taki wykonano następująco. Koniec ołówka oparto o kartkę tak jak na Rysunku 1, punkt podparcia zaznaczono (w sposób nie wpływający na pomiar, nie rysowano nic bezpośrednio w punkcie styku papieru i ołówka). W dalszej kolejności kartkę powoli odsuwano od pudła aż do momentu, w którym nastąpił poślizg. Natychmiast po zerwaniu tarcia kartkę zatrzymano, a koniec ołówka przesunięto z powrotem do zaznaczonego punktu. Ołówek unieruchomiono w takiej pozycji i zmierzono odległości x_P , y_P . W czasie eksperymentu zadbane, aby punkt zaczepienia nitki, punkt P i punkt styku ołówka z kartką wyznaczały cały czas płaszczyznę prostopadłą do pionowej ściany pudła. Funkcje trygonometryczne kątów α i β można wyrazić przez zmierzone długości w następujący sposób:

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{\sqrt{L^2 - x_P^2}}{x_P}, \quad (6)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_P}{\sqrt{d^2 - y_P^2}}. \quad (7)$$

Zwróćmy uwagę, że w rozważanym rozwiązaniu nie był konieczny pomiar długości x i y . Alternatywnie, w celu zmierzenia kątów α i β , można było zmierzyć inne długości charakteryzujące nasz układ. Pomiar długości x , y , d , L jest prosty do wykonania, jednak równania pozwalające wyrazić α i β przy pomocy tych zmiennych są trudne do rozwiązania. Niektóre z metod pomiaru kątów obarczone są znaczną niepewnością. Przykładowo, mierząc y , y_P , L , można wyznaczyć kąt β przy pomocy równania $\cos \beta = (y - y_P)/L$, a następnie wyznaczyć $\operatorname{ctg} \beta$ używając tożsamości $\operatorname{ctg} \beta = \cos \beta / \sqrt{1 - \cos^2 \beta}$. Metoda ta jest niedokładna gdy kąt β jest mały i stosunek $(y - y_P)/L$ jest bliski jedynki – w takiej sytuacji sinus kąta jest bardziej czuły na jego zmiany od jego cosinusa.

Używając równań (5), (6), (7) możemy wyrazić f przez zmierzone długości:

$$f = \left(\frac{\sqrt{L^2 - x_P^2}}{x_P} - \frac{2y_P}{\sqrt{d^2 - y_P^2}} \right)^{-1}. \quad (8)$$

Opis przeprowadzonych pomiarów i analiza wyników

Nitkę o długości $L = 35,7$ cm zamocowano na wysokości $y = 39,6$ cm nad stołem. Długość użytego do eksperymentu ołówka wynosi $d = 17,6$ cm. Następnie wykonano 8 powtórzeń pomiaru x_P i y_P . Dla każdego powtórzenia obliczono odpowiadające mu wartości $\operatorname{tg} \alpha$ i $\operatorname{ctg} \beta$. Wyniki przedstawiono w poniższej tabelce:

x_P , cm	y_P , cm	$\text{tg } \alpha$	$\text{ctg } \beta$	f
7,3	5,7	0,342	4,787	0,244
8,3	5,8	0,350	4,183	0,287
7,4	5,7	0,342	4,720	0,248
7,1	5,6	0,336	4,928	0,235
7,0	5,5	0,329	5,001	0,230
6,9	5,5	0,329	5,076	0,226
8,4	5,9	0,356	4,131	0,292
8,4	6,0	0,363	4,131	0,294

Tabela 1. Wyniki pomiarów

Z powyższej tabelki wynika, że obserwowane są dość znaczne odchylenia mierzonej odległości x_P przy której ołówek zaczyna ślizgać się po papierze. Niepewność pomiaru tej wielkości znacznie przekracza niepewność wynikającą z niedokładności pomiaru linijką. Najbardziej prawdopodobną jej przyczyną jest niejednorodna struktura papieru. Powierzchnia kartki nie jest idealnie gładka, może się zdarzyć, że końcówka wkładu zostanie umieszczona na małej „górcie” lub w małym „dołku”, co sprawia, że efektywna siła tarcia jest różna w różnych punktach kartki. Uśredniając po wszystkich powtórzeniach, otrzymujemy wynik

$$f = 0,26 \pm 0,03. \quad (9)$$

Niepewność została oszacowana metodą najmniej korzystnego przypadku.

Wykonano również serię pomiarów przy zmienionej długości nitki ($L = 33,8$ cm). W tej serii pomiarowej kąt nachylenia ołówka względem papieru był większy. Otrzymano następujące wyniki:

x_P , cm	y_P , cm	$\text{tg } \alpha$	$\text{ctg } \beta$	f
8,3	6,8	0,419	3,948	0,322
9,8	7,3	0,456	3,301	0,419
8,0	6,8	0,419	4,105	0,306
9,0	7,1	0,441	3,620	0,365
10,3	7,5	0,471	3,125	0,458
10,1	7,4	0,463	3,194	0,441
10,3	7,5	0,471	3,125	0,458
10,2	7,3	0,456	3,159	0,445

Tabela 2. Wyniki pomiarów przy zmienionej długości nitki

Po uśrednieniu otrzymujemy

$$f = 0,40 \pm 0,08. \quad (10)$$

Jak widać, przy większym kącie nachylenia efektywny współczynnik tarcia jest większy, ale też niepewność jego wyznaczenia jest większa. Może to wynikać z faktu, że drobne nierówności powierzchni wpływają na ołówek naciskający na papier pod większym kątem w większym stopniu.

Punktacja

Część teoretyczna:

- Pomysł na wykonanie układu pomiarowego umożliwiającego wyznaczenie współczynnika tarcia 4 pkt.
Zapisanie warunków równowagi sił i momentów sił działających na ołówek (równania (1-3) lub równoważne) 3 pkt.
Wzór na współczynnik tarcia w funkcji kątów α i β lub w funkcji innych wielkości geometrycznych charakteryzujących układ 3 pkt.

Część doświadczalna:

- Opis sposobu w jaki zapewnione zostało, że końcówka ołówka i kartka są względem siebie nieruchome 1 pkt.
Opis szczegółów układu pomiarowego i sposobu mierzenia odległości niezbędnych do wyznaczenia współczynnika f 2 pkt.
Wykonanie przynajmniej sześciu powtórzeń pomiaru : 3 pkt; 4 powtórzenia: 2 pkt; 2 powtórzenia 1 pkt.
Wykonanie pomiarów dla przynajmniej dwóch różnych geometrii układu, dyskusja zależności efektywnego współczynnika tarcia od kąta α 1 pkt.
Dyskusja niepewności pomiaru i jej potencjalnych przyczyn 2 pkt.
Końcowy wynik wraz z obliczoną niepewnością pomiaru 1 pkt.

Komentarz sprawdzających

Wyznaczenie współczynnika tarcia statycznego ołówka o papier wymaga znalezienia konfiguracji, w której ołówek znajduje się na granicy równowagi statycznej. Istotnym punktowym elementem była stabilność rozważanej konfiguracji. Część uczestników proponowała konstrukcję układu, w którym ołówek znajduje się w stanie równowagi chwiejnej (np. konstrukcję z rysunku do zadania N1 z zestawu [of72-1-1.pdf](#)). W niektórych przypadkach stabilność można było zapewnić poprzez podtrzymanie ołówka przy pomocy palca, dodatkowej nitki lub innej konstrukcji wykonanej np. z papieru. Należy jednak wtedy uwzględnić obecność takiej konstrukcji w bilansie sił/momentów sił lub wykazać, że wpływ konstrukcji stabilizującej można zaniedbać. Rozwiązania, w których dyskusja stabilności i roli elementów stabilizujących nie była przeprowadzona, były niżej punktowane jako niedokładne i obciążone potencjalnym błędem systematycznym.

Najwyżej punktowane były pomysły umożliwiające badanie kilku różnych położeń równowagi, w których ołówek naciska na papier z różną siłą lub pod różnym kątem.

Część uczestników rozważała układ w którym jeden koniec ołówka opiera się o papier, a drugi o karton. W takim przypadku występują dwie siły tarcia statycznego. Bardzo istotne jest zauważenie, że w sytuacji granicznej tylko jedna z tych sił osiągnie swoją maksymalną wartość. Przy założeniu, że każda z sił tarcia jest równa iloczynowi współczynnika tarcia i siły nacisku, otrzymujemy sprzeczny układ, w którym równań jest więcej niż niewiadomych, patrz zadanie T1 z zestawu [of63-2-1-R.pdf](#). Z tego powodu rozwiązań opartych na takim założeniu nie można uznać za poprawne.

W niektórych rozwiązaniach ołówek ustawiano na równi pochyłej i podtrzymywano przy pomocy

doczepionej do niego nici. W takich przypadkach kluczowa jest poprawna dyskusja wpływu tej nici na bilans sił i momentów. Co ciekawe, gdy nić jest pionowa, współczynnik tarcia można wyznaczyć jako tangens granicznego kąta nachylenia równi, tak jakby nici w ogóle nie było. Ten fakt wymaga jednak dokładnego uzasadnienia.

Niektórzy uczestnicy błędnie określili kierunek sił reakcji i tarcia między ołówkiem a papierem. Siła reakcji jest z definicji siłą prostopadłą do stykających się powierzchni. Mimo, że wydawać by się mogło, że kierunek prostopadły jest ciężki do zdefiniowania w przypadku powierzchni ołówka, to jednak jest on dobrze określony przez powierzchnię papieru (o ile pominiemy jego chropowatość, która stanowi istotne źródło niepewności). Składowa siły działającej na ołówek równoległa do papieru jest siłą tarcia.

Przykładowe błędy w rozwiązaniach:

- 1) Badanie tarcia poruszających się względem siebie powierzchni: w takim przypadku wyznaczany jest współczynnik tarcia kinetycznego, co jest niezgodne z treścią zadania.
- 2) Rozważanie konfiguracji w której ołówek spoczywający na poziomej powierzchni jest podtrzymywany przez pionową nitkę: w takim wypadku tarcie zawsze wynosi 0, co wynika z bilansu poziomych składowych sił.
- 3) Badanie tarcia kartki pomalowanej ołówkiem o czystą kartkę: sytuacja taka nie jest fizycznie równoważna sytuacji w której wkład ołówka trze o kartkę.
- 4) W przypadku rozwiązań bazujących na użyciu nici przełożonej przez bloczek: brak uwzględnienia tarcia o bloczek.