# LXXIII OLIMPIADA FIZYCZNA

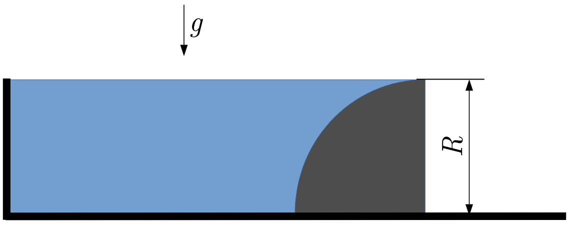
## ZAWODY III STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA, 14.04.2024

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

### Zadanie 1

Wewnątrz prostopadłościennego zbiornika o płaskim poziomym dnie i szerokości $L$ umieszczono, wzdłuż boku szerokości $L$, jednorodną zaporę w kształcie ćwierćwalca o promieniu $R$ i długości $L$ – patrz rysunek. Głębokość wody w zbiorniku wynosi również $R$ – patrz rysunek:




Zapora nie jest w żaden sposób przymocowana – ani na dnie, ani na końcach, ale współczynnik tarcia materiału zapory o podłoże jest niezerowy i równy $f$.

Wyznacz minimalną masę $m$ zapory, przy której woda jej nie przesunie, ani nie przewróci. Gęstość wody wynosi $\rho$, przyspieszenie ziemskie $g$.

Zakładamy, że woda nie podsącza się pod podstawę zapory, ale też zapora nie przysysa się do podłoża.

### Zadanie 2

Zwojnica ma $N$ równomiernie i gęsto nawiniętych zwojów, długość $L$ oraz promień $r$, przy czym $L \gg r$. W płaszczyźnie prostopadłej do osi zwojnicy znajduje się nieprzewodzący, jednorodny pierścień o promieniu wewnętrznym $R_1$, zewnętrznym $R_2$ ($L \gg R_2 > R_1 > r$) i masie $m$. Pierścień jest równo odległy od końców zwojnicy, równomiernie naładowany ładunkiem $Q$ i może się swobodnie obracać wokół swojej osi, pokrywającej się z osią zwojnicy.

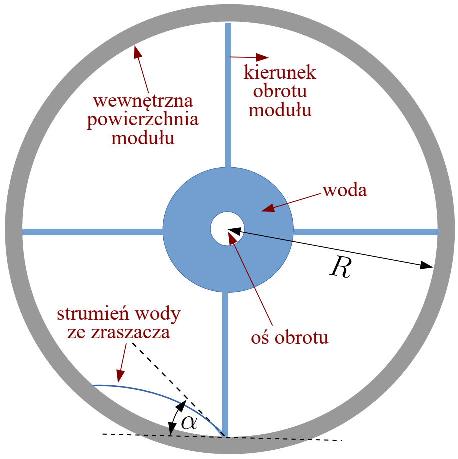
W chwili $t = 0$ pierścień się nie obraca. Wyznacz prędkość kątową obrotu pierścienia w chwili $t = T$, jeśli przez zwojnicę płynie prąd o zależnym od czasu natężeniu $I(t) = I_0 \cdot t/T$, gdzie $I_0$ jest stałą.

Pomiń pole magnetyczne wytwarzane przez pierścień oraz ładunek elektrostatyczny indukowany przez niego w obwodzie zwojnicy. Przyjmij, że układ znajduje się w próżni.

Moment bezwładności jednorodnego krążka o masie $M$ i promieniu $R$ względem jego osi jest równy $MR^2/2$.

### Zadanie 3

Właśnie powstająca firma „Zrelaksuj się w drodze na Marsa” zamierza produkować moduły rekreacyjne do statków kosmicznych.




Schemat modułu. Strumień wody pokazany w układzie współobracającym się z modułem.

Taki moduł ma kształt wydrążonego walca, o promieniu wewnętrznym $R$. W trakcie podróży, gdy silniki rakietowe są wyłączone, walec obraca się wokół swojej osi z taką prędkością, by na wewnętrznej powierzchni efektywne przyspieszenie grawitacyjne było równe $g$. Ta wewnętrzna powierzchnia jest przysypana cienką warstwą ziemi, na której rośnie trawa. Trawa jest podlewana umieszczanymi na poziomie ziemi zraszaczami, zasilanymi ze zbiornika wody znajdującego się na osi obrotu. Ciśnienie powietrza wewnątrz modułu i w bardzo małej przestrzeni „nad” wodą (czyli tuż przy osi obrotu) jest równe ziemskiemu ciśnieniu atmosferycznemu $p_0$. Jedyną przyczyną powodującą przepływ wody do zraszacza, a potem jej wypływ z niego jest „sztuczna grawitacja” spowodowana ruchem obrotowym modułu.

Rozważmy strumień wody wylatujący w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu pod kątem $\alpha$ w stosunku do ziemi, przy czym $\alpha = 0$ oznacza wypływ wody zgodnie z kierunkiem obrotu walca. Zakładamy, że tuż za wylotem z otworu, wszystkie elementy objętości wody poruszają się z taką samą prędkością i w tym samym kierunku.

Przyjmując, że nie występują straty energii – ani w trakcie przepływu wody do zraszacza, ani po wylocie wody ze zraszacza, wyznacz odległość (mierzoną wzdłuż wewnętrznej powierzchni walca) oraz maksymalną wysokość (mierzoną jako odległość wzdłuż promienia od ziemi), na jaką poleci rozważany strumień wody. Przyjmij również, że prędkość przepływu wody w rurach łączących zbiornik ze zraszaczem jest znacznie mniejsza od prędkości wody wypływającej ze zraszacza. Masa wypływającej wody jest znacznie mniejsza od masy stacji.

# LXXIII OLIMPIADA FIZYCZNA
## ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAWODÓW III STOPNIA
### CZĘŚĆ TEORETYCZNA

**Rozwiązanie zadania 1**

Po pierwsze zauważmy, że w każdym miejscu woda naciska na powierzchnię zapory prostopadle do tej powierzchni, więc wzdłuż promienia walca, którego (formalnie) część stanowi rozważana zapora. To oznacza, że moment sił parcia wody na przegrodę względem (prawej - zgodnie z rysunkiem) skrajnej dolnej krawędzi przegrody jest zerowy. Zatem woda nie jest w stanie przewrócić zapory niezależnie od jej masy.

Zatem pozostaje znaleźć warunek, przy spełnieniu którego woda nie przesunie zapory.

Ponieważ zapora nie przysysa się do podłoża, w poniższych rozważaniach będziemy pomijać ciśnienie atmosferyczne - jego wypadkowy wkład jest zerowy.

Niech $F_y$ oznacza (pionową) wypadkową siłę nacisku zapory na podłoże, natomiast $F_x$ – składową poziomą wypadkowej siły parcia wody na tę przegrodę.

Wyobraźmy sobie, że objętość po prawej stronie zapory jest również do wysokości $R$ wypełniona wodą. W takiej sytuacji zapora nie będzie przesuwana, a więc $F_x$ będzie równa sile parcia wody po prawej stronie zapory na tę zaporę. Ponieważ ciśnienie wody rośnie liniowo z głębokością $y$, tzn. $p(y) = \rho g y$, średnie ciśnienie wody z prawej strony zapory jest równe $p_{\text{śr}} = \rho g R/2$. Zatem woda z prawej strony zapory działa na nią w lewo siłą $p_{\text{śr}} L R$. To oznacza, że

$$F_x = \frac{1}{2}\rho g R^2 L. \tag{1}$$

Siła $F_y$, czyli siła nacisku zapory na podłoże jest równa sumarycznemu ciężarowi zapory oraz ciężarowi wody znajdującej się nad jej podstawą. Objętość prostopadłościanu ograniczonego od góry powierzchnią wody i którego podstawą jest podstawa zapory wynosi $R \cdot R \cdot L$. Ponieważ objętość zapory jest równa $\pi R^2 L/4$ (jedna czwarta objętości walca o promieniu $R$ i długości $L$), objętość wody nad zaporą wynosi $R^2 L - \pi R^2 L/4$, a jej masa to $(R^2 L - \pi R^2 L/4)$. Zatem siła nacisku zapory na podłoże jest równa

$$F_y = \rho g R^2 L \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + mg. \tag{2}$$

Maksymalna siła tarcia przy sile nacisku $F_y$ i współczynniku tarcia $f$ to $fF_y$, zatem zapora się nie przesunie, jeśli będzie spełniony warunek

$$fF_y \geqslant F_x, \tag{3}$$

Uwzględniając wzory na $F_x$ i $F_y$ otrzymamy

$$f\left(\rho g R^2 L \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + mg\right) \geqslant \frac{1}{2}\rho g L R^2.$$

czyli

$$m \geqslant \rho L R^2 \left( \frac{1}{2f} - 1 + \frac{\pi}{4} \right). \tag{4}$$

Zauważmy, że dla

$$f \geqslant \frac{2}{4-\pi} \approx 2{,}33, \tag{5}$$

prawa strona nierówności (4) jest ujemna, a więc zapora może być dowolnie lekka – takie wartości współczynnika tarcia są jednak trudne do osiągnięcia. Dla pozostałych wartości $f$ szukana minimalną masa, zgodnie z nierównością (4) jest równa

$$m = \rho L R^2 \left( \frac{1}{2f} - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \right). \tag{6}$$

**Punktacja zadania 1.**

Poprawne uzasadnienie, że niezależnie od masy zapory, woda jej nie przewróci ...... 2 pkt.
Pozioma składowa wypadkowej siły nacisku wody na zaporę (wzór (1) wraz z wyprowadzeniem ........ 2 pkt.
Siła nacisku zapory na podłoże (wzór (2) wraz z wyprowadzeniem) ........ 2 pkt.
Ogólny warunek nieprzesuwania się zapory (wzór (3) lub równoważny) ........ 1 pkt.
Szukana minimalna masa zapory (wzór (6) lub równoważny) ........ 2 pkt.
Zauważenie, że począwszy od pewnej wartości współczynnika tarcia (nierówność (5) ) zapora może być dowolnie lekka ........ 1 pkt

**Rozwiązanie zadania 2**

Indukcja pola magnetycznego wewnątrz długiej zwojnicy o gęstości zwojów $N/L$ jest jednorodna i skierowana wzdłuż osi zwojnicy, a jej wartość wynosi

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} I, \tag{7}$$

gdzie $I$ jest natężeniem prądu płynącego przez zwojnicę, a $\mu_0$ – przenikalnością magnetyczną próżni.

Rozważmy okrąg o promieniu $R$, leżący wewnątrz rozważanego pierścienia i współśrodkowy z tym pierścieniem. Zgodnie z prawem Faradaya wyindukowana siła elektromotoryczna wzdłuż tego okręgu jest równa

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}, \tag{8}$$

gdzie $\Phi$ jest strumieniem przez powierzchnię ograniczoną rozważanym okręgiem. W naszym przypadku

$$\Phi = \pi r^2 B = \mu_0 \frac{N}{L} \pi r^2 I, \tag{9}$$

zatem

$$\mathcal{E} = -\mu_0 \frac{N}{L} \pi r^2 \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \tag{10}$$

$$= -\mu_0 \frac{N}{L} \pi r^2 \frac{I_0}{T}. \tag{11}$$

Zauważmy, że $\mathcal{E}$ nie zależy od promienia okręgu.

Okrąg ma obwód $2\pi R$; z symetrii wynika zatem, że w każdym punkcie tego okręgu występuje styczne do niego pole elektryczne o natężeniu

$$E(R) = \frac{\mathcal{E}}{2\pi R}. \tag{12}$$

Rozważmy mały fragment pierścienia o powierzchni $\Delta S$. Ponieważ pierścień jest naładowany równomiernie, ładunek elektryczny rozważanego fragmentu jest równy

$$\Delta Q = Q\frac{\Delta S}{S}, \tag{13}$$

gdzie $S = \pi(R_2^2 - R_1^2)$ jest powierzchnią pierścienia.

Oznacza to, że siła działająca na rozważany fragment jest równa

$$\Delta F = \Delta Q E(R) = \frac{Q}{S}\frac{\mathcal{E}}{2\pi R}\Delta S. \tag{14}$$

Ta siła jest, tak jak pole elektryczne, styczna do okręgu, zatem moment siły względem osi pierścienia, pochodzący od rozważanego fragmentu wynosi

$$\begin{aligned} \Delta M &= R\Delta F = && (15)\\ &= \frac{Q}{S}\frac{\mathcal{E}}{2\pi}\Delta S. && (16) \end{aligned}$$

Sumując po wszystkich fragmentach pierścienia, otrzymujemy, że całkowity moment siły obracający pierścień jest równy

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2\pi}Q\mathcal{E} = && (17)\\ &= -\mu_0 Q\frac{N}{L}\frac{r^2}{2}\frac{I_0}{T}. && (18) \end{aligned}$$

Ponieważ ten moment bezwładności nie zależy od czasu, po czasie $T$ prędkość kątowa pierścienia będzie równa

$$\omega = \frac{MT}{I_{\text{bezwł}}}, \tag{19}$$

gdzie $I_{\text{bezwł}}$ jest momentem bezwładności pierścienia względem jego osi. Ten moment bezwładności możemy wyznaczyć traktując pierścień jako krążek o masie $\sigma\pi R_2^2$,z którego wycięto mniejszy, współśrodkowy z nim krążek o masie $\sigma\pi R_2^2$, przy czym $\sigma = m/\left(\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)\right)$ jest gęstością masy pierścienia na jednostkę powierzchni. Otrzymamy

$$\begin{aligned} I_{\text{bezwł}} &= \frac{1}{2}\left(\sigma\pi R_2^2\right)R_2^2 - \frac{1}{2}\left(\sigma\pi R_1^2\right)R_1^2 = \\ &= \frac{1}{2}\sigma\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)\left(R_2^2 + R_1^2\right) = \\ &= \frac{1}{2}m(R_2^2 + R_1^2). \end{aligned}$$

Zatem ostatecznie szukana prędkość kątowa jest równa

$$\omega = -\mu_0 \frac{Qr^2 I_0 N/L}{m(R_2^2 + R_1^2)}. \tag{20}$$

Powyżej znak minus oznacza, że pierścień będzie się obracał przeciwnie do kierunku przepływu prądu wokół zwojnicy.

**Punktacja zadania 2.**

Indukcja pola magnetycznego wewnątrz zwojnicy (wzór (7)) ........................ 1 pkt.
Wykorzystanie prawa Faradaya do okręgu o pewnym promieniu, współśrodkowego z pierścieniem (wzór (8) lub równoważny) ............................................ 1 pkt.
Jawny wzór na siłę elektromotoryczną wzdłuż okręgu o pewnym promieniu, współśrodkowego z pierścieniem (wzór (11) lub równoważny) ................................ 1 pkt.
Natężenie pola elektrycznego w odległości $R$ od osi obrotu (wzór (12) lub równoważny), wraz ze stwierdzeniem, że jest ono styczne do okręgu o promieniu $R$ ................ 1 pkt.
Siła działająca na mały fragment pierścienia w odległości $R$ od osi obrotu (wzór (12) lub równoważny) ................................................................ 2 pkt.
Całkowity moment siły działający na pierścień (wzór (18) lub równoważny) ......... 2 pkt.
Szukana prędkość kątowa (wzór (20)); nie jest niezbędne podanie znaku ............. 2 pkt.

**Rozwiązanie zadania 3**

Rozważmy sytuację w układzie nieinercjalnym związanym z obracającym się walcem. W takim układzie przyspieszenie odśrodkowe, czyli „efektywne przyspieszenie grawitacyjne”, w odległości $r$ od osi obrotu jest równe

$$a_{\text{ods}} = \omega^2 r, \tag{21}$$

gdzie $\omega$ jest prędkością kątową obrotu walca.

Ciśnienie wody na poziomie ziemi będzie równe

$$p = p_0 + \rho \frac{\omega^2 R}{2} R. \tag{22}$$

Powyżej $\frac{\omega^2 R}{2}$ jest średnim przyspieszeniem odśrodkowym wzdłuż promienia od $r = 0$ (zgodnie z treścią zadania przyjmujemy, że „górna” powierzchnia cieczy jest tuż przy osi obrotu) do $r = R$. Korzystamy tu z faktu, że przyspieszenie odśrodkowe liniowo zależy od $r$.

Przy wylocie ze zraszacza małej objętości wody $\Delta V$ działająca na nią pozostała część wody (czyli siły hydrostatyczne) wykonują pracę $p\Delta V$; ta wylatująca woda musi jednak wykonać pracę $p_0 \Delta V$ na wypchnięcie odpowiedniej objętości powietrza. W efekcie energia kinetyczna wody wzrasta o

$$\Delta E = (p - p_0)\,\Delta V. \tag{23}$$

(zauważmy, że tę pracę w praktyce wykonuje siła odśrodkowa).

Ponieważ energia kinetyczna wylatującej wody jest równa

$$\frac{1}{2} \rho \Delta V v^2, \tag{24}$$

gdzie $v$ jest jej prędkością, otrzymujemy równanie

$$(p - p_0)\,\Delta V = \frac{1}{2}\rho \Delta V v^2. \tag{25}$$

Uwzględniając wyrażenie na $p$ wyznaczmy prędkość wylatującej wody w układzie współobracającym się z modułem.

$$v = \omega R. \tag{26}$$

Zauważmy, że ta prędkość jest równa prędkości podłoża (a więc również ziemi, zraszacza i trawy) w układzie inercjalnym związanym z osią walca.

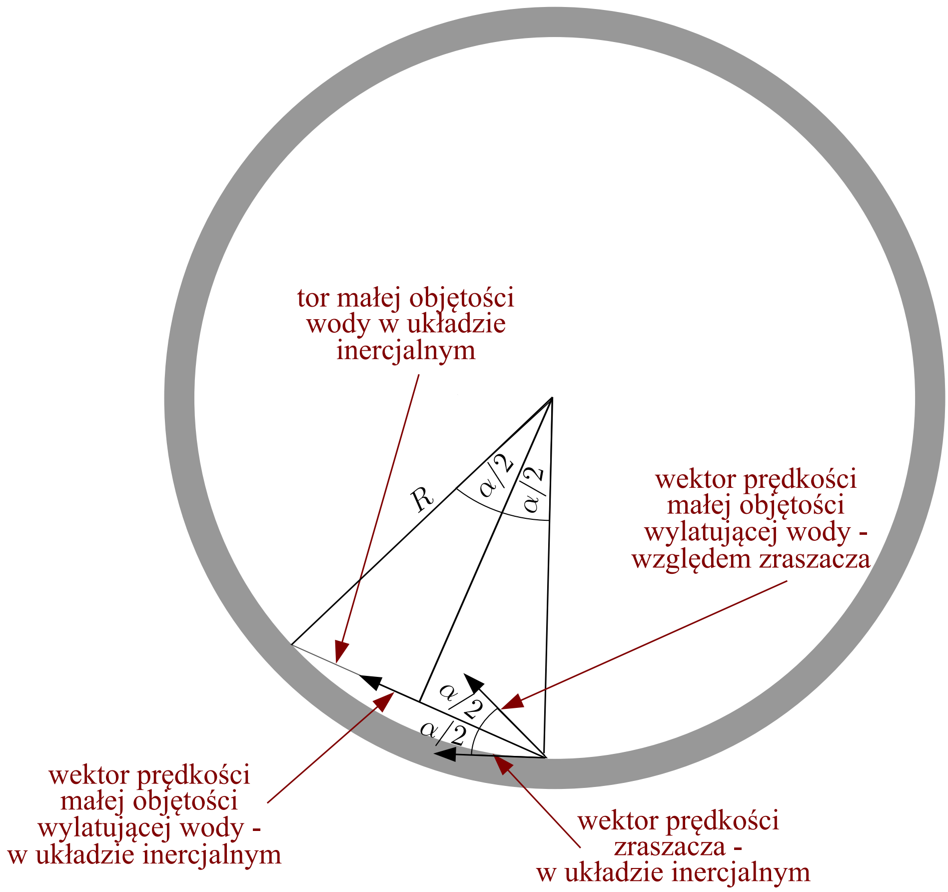
Ponieważ na poziomie ziemi przyspieszenie odśrodkowe powinno wynosić $g$, czyli powinno zachodzić $\omega^2 R = g$, mamy

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}. \tag{27}$$

W układzie inercjalnym woda, która wyleciała ze zraszacza, porusza się ruchem prostoliniowym ze stałą prędkością

$$v_\mathrm{w} = 2v\cos\frac{\alpha}{2}. \tag{28}$$

Tor tego ruchu tworzy cięciwę okręgu o promieniu $R$, patrz rysunek.




Z rozważań geometrycznych długość tej cięciwy jest równa

$$l = 2R\sin\frac{\alpha}{2},$$

a odległość jej środka od środka okręgu (osi obrotu) wynosi

$$d = R\cos\frac{\alpha}{2}. \tag{29}$$

Szukana maksymalna wysokość strumienia wynosi $h = R - d$, czyli

$$h = R\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right). \tag{30}$$

W trakcie lotu woda przebywa odległość $l$ z prędkością $v_{\mathrm{w}}$, zatem czas przelotu jest równy

$$t = \frac{l}{v_{\mathrm{w}}} = \frac{2R\sin\frac{\alpha}{2}}{2v\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{R}{v}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}. \tag{31}$$

W ciągu tego czasu ziemia przesunie się o $vt$, zatem mierzona wzdłuż ziemi odległość, na jaką doleci strumień wody jest równa

$$s = R\left(\alpha - \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right). \tag{32}$$

Zauważmy, że dla $\alpha$ zbliżającego się do $\pi$ powyższa odległość staje się dowolnie duża. Jest to związane z tym, że w takiej sytuacji prędkość w układzie inercjalnym wylatującej wody dąży do zera, a zatem czas osiągnięcia przez tę wodę powtórnie powierzchni ziemi dąży do nieskończoności.

**Punktacja zadania 3.**

Ciśnienie wody na poziomie ziemi (wzór (22) lub równoważny) wraz z wyprowadzeniem 2 pkt.
Związek prędkości wylatującej wody (w układzie obracającym się) z ciśnieniem wody (wzór (25)) ........ 1 pkt.
Prędkość wylatującej wody w układzie obracającym się (wzór (26) lub równoważny) 1 pkt.
Prędkość wylatującej wody w układzie inercjalnym (wzór (28)) ........ 2 pkt.
Szukana maksymalna wysokość strumienia (wzór (30)) ........ 2 pkt.
Szukana odległość (wzór (32)) ........ 2 pkt.