LXXIV OLIMPIADA FIZYCZNA

ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAWODÓW I STOPNIA

CZĘŚĆ I

ZADANIA CZĘŚCI I (termin wysyłania rozwiązań — 11 października 2024 r.)
Przy rozwiązywaniu wszystkich zadań możesz korzystać z Internetu,
pamiętaj jednak, że nie wszystkie znalezione tam informacje są prawdziwe.

CZĘŚĆ TESTOWA

Zadanie W1.

Jedną z proponowanych metod ochrony roślin przed wiosennymi przymrozkami jest skrapianie roślin wodą. Wybierz stwierdzenie najbardziej zbliżone do prawdy spośród poniższych. Pomiń takie efekty jak wpływ ewentualnie powstającej pary na szybkość wypromieniowywania ciepła przez ziemię, lub ewentualny wpływ na roślinę zetknięcia się z nią rozważanej substancji – rozważamy tu tylko problem zamarzania rośliny.

Wybierz jedną odpowiedź:

A. Skrapianie roślin wodą ma sens tylko, jeśli ta woda jest odpowiednio ciepła.
B. Skrapianie roślin wodą ma sens również, jeśli woda jest zimna.
C. Najlepszą podobną metodą byłoby skrapianie bardzo słoną wodą – sól obniża temperaturę krzepnięcia wody, a więc zmniejsza ryzyko zamarznięcia rośliny.
D. Najlepszą podobną metodą byłoby skrapianie alkoholem lub roztworem alkoholu (np. winem) – alkohol ma niższą temperaturę krzepnięcia niż woda, a więc zmniejsza ryzyko zamarznięcia rośliny.
E. Skrapianie roślin wodą w celu ochrony przed przymrozkami nie ma żadnego sensu, bo woda zamarza, co zwiększa ryzyko zamarznięcia rośliny.

Rozwiązanie zadania W1: B.

W idealnej sytuacji (tzn. gdy jest stan równowagi termodynamicznej – temperatura roślin, wody (lub alkoholu) i powietrza są takie same), roślina może zamarznąć dopiero, gdy temperatura spadnie poniżej 0 °C, tzn. gdy już zamarznie woda, którą spryskaliśmy roślinę. Ponieważ ciepło zamarzania wody jest stosunkowo duże, skrapianie wodą może spowodować, że roślina nie zdąży zamarznąć.

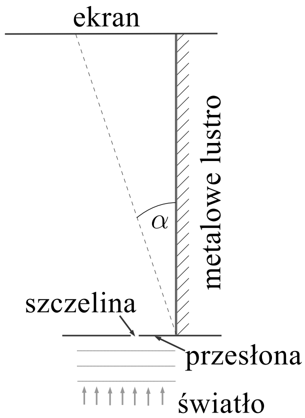
Skrapianie ciepłą wodą powinno dać lepszy efekt niż skrapianie zimną, jednak ponieważ ciepło potrzebne do zamarznięcia wody jest równe ciepłu pobranemu od wody przy obniżeniu jej temperatury o około 80 °C, odpowiednio duża temperatura wody nie jest niezbędna.

Skrapianie substancjami o temperaturze krzepnięcia niższej niż 0 °C (czyli słoną wodą, alkoholem) może spowodować, że roślina zamarznie, zanim zaczną zamarzać te substancje, czyli nie spowoduje oczekiwanego efektu.

Zatem prawidłową odpowiedzią jest: *Skrapianie roślin wodą ma sens również, jeśli woda jest zimna.*

Zadanie W2.

Monochromatyczne światło o długości fali λ pada prostopadle na przesłonę, w której znajduje się wąska (istotnie węższa niż λ) szczelina. Prostopadle do przesłony i równolegle do szczeliny, w odległości d od niej znajduje się metalowa płaszczyzna (lustro) idealnie odbijająca światło - patrz rysunek.



Światło po przejściu przez szczelinę pada na ekran, znajdujący w odległości l od przesłony, przy czym $l \gg d > \lambda$. Oznaczmy przez α kąt między lustrem, a odcinkiem od krawędzi styczności lustra z przesłoną do wybranego punktu na ekranie.

Spośród poniższych odpowiedzi, wybierz najbardziej odpowiadającą otrzymanemu na ekranie obrazowi.

Uwzględnij, że przy odbiciu od powierzchni metalowych faza fali światła zmienia się o π.

Wybierz jedną odpowiedź:

A. Dla $\alpha = 0$ będzie maksimum natężenia światła, a następne maksimum będzie dla takiego α, że $\lambda = d \sin\alpha$.
B. Dla $\alpha = 0$ będzie maksimum natężenia światła, a następne maksimum będzie dla takiego α, że $\lambda = 2d \sin\alpha$.
C. Dla $\alpha = 0$ będzie minimum natężenia światła, a następne minimum będzie dla takiego α, że $\lambda = d \sin\alpha$.
D. Dla $\alpha = 0$ będzie minimum natężenia światła, a następne minimum będzie dla takiego α, że $\lambda = 2d \sin\alpha$.
E. Na ekranie nie będzie lokalnych minimów i lokalnych maksimów natężenia światła.
F. Żaden z pozostałych wymienionych przypadków.

Rozwiązanie zadania W2: D.

Obecność lustra spowoduje, że efektywnie sytuacja będzie taka, jakby występowała druga szczelina, w odległości $2d$ od rzeczywistej. Zgodnie z uwagą w treści zadania, światło wychodzące z tej obrazowej „szczeliny” będzie miało fazę przesunięta o π w stosunku do fazy światła ze szczeliny rzeczywistej. W zależności od kąta obserwacji α różnica faz $\Delta\phi$ między światłem dochodzącym ze szczelin wynosi

$$\Delta\phi = 2\pi\frac{2d}{\lambda}\sin\alpha + \pi.$$

Wzmocnienie zachodzi, gdy $\Delta\phi$ jest wielokrotnością 2π, natomiast wygaszenie, jeśli $\Delta\phi$ jest nieparzystą wielokrotnością π. To oznacza,że prawdziwe jest stwierdzenie: *Dla* $\alpha = 0$ *będzie minimum natężenia światła, a następne minimum będzie dla takiego* α*, że* $\lambda = 2d \sin\alpha$.

Zadanie W3.

Sonda krążąca wokół Słońca po orbicie pokrywającej się z orbitą Ziemi jest wyposażona w żagiel słoneczny, który można traktować jako płaskie lustro odbijające promienie słoneczne. Jak powinien być ustawiony ten żagiel, aby jak najszybciej ta sonda mogła dotrzeć do orbity Marsa?

Pomiń oddziaływanie grawitacyjne sondy ze wszystkimi obiektami prócz Słońca. Uwzględnij, że przyspieszenie nadawane sondzie przez żagiel jest znacznie mniejsze od przyspieszenia grawitacyjnego nadawanego jej przez Słońce.

A. Pod kątem 45° w stosunku do osi sonda–Słońce, tak, by odbite światło leciało w stronę przeciwną, niż zwrot wektora prędkości sondy.
B. Pod kątem 45° w stosunku do osi sonda–Słońce, tak, by odbite światło leciało w stronę zgodną ze zwrotem wektora prędkości sondy.
C. Prostopadle do osi sonda–Słońce, tak, by odbite światło leciało z powrotem w stronę Słońca.
D. Wykorzystując żagiel słoneczny nie można dolecieć do orbity Marsa.

Rozwiązanie zadania W3: A.

Po pierwsze zauważmy, że jeśli żagiel będzie ustawiony prostopadle do osi sonda–Słońce, to siła pochodząca od niego będzie siłą radialną, czyli analagiczną jak siła oddziaływania grawitacyjnego. Efektywnie sytuacja będzie taka, jakby przyciąganie Słońca zostało nieco zmniejszone. Sonda będzie poruszać się po elipsie, o okresie zbliżonym do okresu obiegu Ziemi wokół Słońca. Ponieważ przyspieszenie nadawane sondzie przez żagiel jest znacznie mniejsze od przyspieszenia grawitacyjnego nadawanego jej przez Słońce, najdalsza odległość od Słońca nie będzie odległością Słońce-Mars. Jednocześnie ruch będzie okresowy, czekanie dłużej niż rok nie spowoduje, że maksymalna odległość sondy od Słońca wzrośnie.

Gdy żagiel będzie ustawiony pod kątem 45° w stosunku do osi sonda–Słońce, tak, by odbite światło leciało w stronę przeciwną, niż zwrot wektora prędkości sondy, prędkość styczna do toru sondy będzie stale wzrastać, a więc po odpowiednio długim czasie sonda będzie miała prędkość, przy której osiągnie orbitę Marsa.

Gdy żagiel będzie ustawiony pod kątem 45° w stosunku do osi sonda–Słońce, tak, by odbite światło leciało w stronę zgodną ze zwrotem wektora prędkości sondy, to prędkość styczna do toru sondy będzie stale maleć i w efekcie sonda będzie coraz bliżej Słońca. Składowa radialna przyspieszenia będzie miała jeszcze mniejszy wpływ na ruch sondy, niż w przypadku, gdy żagiel byłby ustawiony prostopadle do osi sonda-Słońce.

Zatem prawidłową odpowiedzią jest: *Pod kątem 45° w stosunku do osi sonda–Słońce, tak, by odbite światło leciało w stronę przeciwną, niż zwrot wektora prędkości sondy.*

Zadanie W4.

Marek siedzi na piłce służącej do skakania. Gdy ciśnienie w piłce wynosi p_1 to moment siły potrzebny do obrotu piłki wokół osi pionowej wynosi M_1. Gdy ciśnienie w piłce jest równe p_2, to ile wynosi moment siły potrzebny do obrotu piłki wokół osi pionowej?

Uwzględnij, że powierzchnia piłki równomiernie naciska podłoże. Podłoże jest jednorodne i poziome. Marek obraca się razem z piłką.

Wybierz jedną odpowiedź:

A. $\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-1/2} M_1$
B. $\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-2/3} M_1$
C. $\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-3/4} M_1$
D. M_1
E. żadne z powyższych

Rozwiązanie zadania W4: A.

Skoro piłka równomiernie naciska na podłoże, to znaczy, że styka się z podłożem na całej powierzchni koła o promieniu R, takim że

$$p\pi R^2 = P,$$

gdzie p jest ciśnieniem w piłce, a P – siłą z jaką Marek naciska piłkę + ciężar piłki.

Przy obracaniu piłki występują siły tarcia, których moment siły w odległości od r do $r + \Delta r$ od osi obrotu wynosi

$$\Delta M = f \cdot r \cdot (p \cdot 2\pi r \Delta r)\,,$$

gdzie f jest współczynnikiem tarcia.

Z powyższego wynika, że całkowity moment siły tarcia jest proporcjonalny do pR^3 (ten wynik można uzyskać całkując lub z rozważań wymiarowych). Ponieważ $R = \sqrt{P/(p\pi)}$, otrzymujemy, że całkowity moment siły jest proporcjonalny do

$$p\left(\frac{P}{p}\right)^{3/2} = p^{-1/2} P^{3/2}.$$

To oznacza, że prawidłowa jest odpowiedź

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-1/2} M_1.$$

Zadanie W5.

Pewne (hipotetyczne) jądro atomowe J może się rozpadać na dwa sposoby: na jądra A_1 oraz A_2, lub na jądra B_1 oraz B_2. Obecność produktów rozpadu nie wpływa na prawdopodobieństwo rozpadu jądra J, a jądra A_1, A_2, B_1, oraz B_2 nie podlegają dalszym przemianom.

Początkowo ($t = 0$) w próbce było N_0 jąder J i nie było pozostałych rozważanych tu jąder. Zmierzono liczby jąder w różnych chwilach czasu, ale ze względów technicznych w danym momencie można było ustalić liczbę jąder tylko jednego rodzaju. Ustalono, że w chwili $t = 1$ h w próbce było $N_{1\mathrm{A}} = 0{,}2 \cdot N_0$ jąder A_1, a w chwili $t = 2$ h było $N_{2\mathrm{B}} = 0{,}45 \cdot N_0$ jąder B_1. Ile jąder J było w próbce w chwili $t = 3$ h?

Wybierz jedną odpowiedź:

A. $0{,}125 \cdot N_0$
B. $0{,}325 \cdot N_0$
C. $0{,}35 \cdot N_0$
D. $0{,}175 \cdot N_0$
E. żadna z pozostałych opcji

Rozwiązanie zadania W5: A.

W ogólnym przypadku w chwili t mamy

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{J}} &= N_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}. \\ N_{\mathrm{A}} &= \alpha N_0 \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right), \\ N_{\mathrm{B}} &= \beta N_0 \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right). \end{aligned}$$

przy czym $\alpha + \beta = 1$. Powyżej τ jest czasem, po którym pozostaje $1/\mathrm{e}$ początkowej liczby jąder J, natomiast α oraz β są prawdopodobieństwami, że w wyniku danego rozpadu powstały odpowiednio jądra A_1 i A_2 lub B_1 i B_2.

Korzystając z powyższych wzorów, możemy wyrazić liczby jąder w rozważanych chwilach przez $N_{3\mathrm{J}}$ – liczbę jąder J w chwili $t = 3$ h:

$$\begin{aligned} \frac{N_{1\mathrm{A}}}{N_0} &= \alpha \left(1 - \left(\frac{N_{3\mathrm{J}}}{N_0}\right)^{1/3}\right), \\ \frac{N_{2\mathrm{B}}}{N_0} &= \beta \left(1 - \left(\frac{N_{3\mathrm{J}}}{N_0}\right)^{2/3}\right). \end{aligned}$$

Ponieważ $\alpha + \beta = 1$, powyżej mamy układ dwóch równań na dwie niewiadome; zamiast jednak rozwiązywać je w ogólnej postaci, można sprawdzić w którym przypadku jest on spełniony (np. na podstawie proponowanej odpowiedzi wyznaczamy z pierwszego równania α, a następnie sprawdzamy, czy otrzymane z drugiego równania $N_{2\mathrm{B}}$ jest zgodne z treścią zadania). Otrzymamy, że $N_{3\mathrm{J}} = 0{,}125 \cdot N_0$ (przy czym $\alpha = 0{,}4$, $\beta = 0{,}6$).

CZĘŚĆ NUMERYCZNA

Zadanie N1.

Pociąg w wesołym miasteczku jedzie po poziomym okręgu o promieniu $r = 18{,}78$ m ze stałą prędkością $v = 5{,}87$ m/s, wydając przy tym gwizd o częstotliwości $f_0 = 3000$ Hz. W odległości $d = 27{,}88$ m ($d > r$) od środka okręgu znajduje się obserwator. Wyznacz odstęp czasu T między chwilą, gdy obserwator słyszy dźwięk o najwyższej częstotliwości a chwilą, gdy obserwator słyszy dźwięk o najniższej częstotliwości. Przyjmij, że gwizdek lokomotywy pociągu i ucho obserwatora znajdują się na tej samej wysokości.

Rozwiązanie zadania N1.

Ze wzoru opisującego efekt Dopplera wynika, że obserwator usłyszy dźwięk o najwyższej częstotliwości, jeśli prędkość zbliżania się lokomotywy do niego w chwili wysłania dźwięku była największa, co w naszym przypadku oznacza styczność prostej lokomotywa-obserwator do okręgu, po którym porusza się lokomotywa, przy dodatkowym warunku, że lokomotywa zbliża się do obserwatora. Podobnie, obserwator usłyszy dźwięk o najniższej częstotliwości, jeśli prędkość oddalania się lokomotywy od niego w chwili wysłania dźwięku była największa, co w naszym przypadku oznacza styczność prostej lokomotywa-obserwator do okręgu, po którym porusza się lokomotywa, przy dodatkowym warunku, że lokomotywa oddala się do obserwatora. Biorąc pod uwagę, że w obu przypadkach odległość lokomotywa-obserwator jest taka sama (a więc czas przelotu dźwięku jest taki sam), otrzymujemy, że szukany czas T jest czasem w jakim lokomotywa przejedzie mniejszy łuk okręgu między punktami, w których prosta lokomotywa-obserwator jest styczna do toru lokomotywy. Z rozważań geometrycznych wynika, że

$$T = \frac{2r\alpha}{v},$$

gdzie

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{r}{d}.$$

Dla $r = 18{,}78$ m, $d = 27{,}88$ m, $v = 5{,}87$ m/s otrzymamy $T = 5{,}32$ s.

Zauważmy, że przy występujących tu prędkościach zmiana częstotliwości jest rzędu 1%, a więc trudno słyszalna.

Zadanie N2.

Dwie cienkie soczewki mają ogniskowe $f_1 = 12{,}8$ cm oraz $f_2 = 18{,}4$ cm i wspólną oś optyczną. Jaka powinna być odległość d między tymi soczewkami, aby wielkość obrazu nie zależała od odległości przedmiotu od zestawu?

Rozwiązanie zadania N2.

Oznaczmy przez x_1 odległość przedmiotu od pierwszej soczewki (o ogniskowej f_1), przez y_1 – odległość jego obrazu od tej soczewki oraz przez x_2 odległość obrazu przedmiotu wytworzonego przez pierwszą soczewkę od drugiej soczewki a przez y_2 – odległość jego obrazu wytworzonego przez drugą soczewkę.

Ponieważ soczewki są odległe od siebie o d, zachodzi

$$y_1 + x_2 = d.$$

Z równania soczewki mamy

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{y_1} = \frac{1}{f_1}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{y_2} = \frac{1}{f_2}. \tag{2}$$

Powiększenia po przejściu przez soczewki są odpowiednio równe

$$p_1 = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_1 - f_1}{f_1},$$

$$p_2 = \frac{y_2}{x_2} = \frac{f_2}{x_2 - f_2},$$

gdzie wykorzystaliśmy równania (1, 2). Całkowite powiększenie wynosi

$$\begin{aligned} p &= p_1 \cdot p_2 = \\ &= \frac{f_2}{f_1} \cdot \frac{y_1 - f_1}{x_2 - f_2} = \\ &= \frac{f_2}{f_1} \cdot \frac{y_1 - f_1}{d - y_1 - f_2}. \end{aligned}$$

Widać, że powiększenie nie zależy od y_1 (a zatem też od x_1), gdy $d = f_1 + f_2$.

Dla $f_1 = 12{,}8$ cm, $f_2 = 18{,}4$ cm otrzymamy $d = 31{,}2$ cm.

Zadanie N3.

Z okazji Międzynarodowego Dnia świadomości Zagrożenia Hałasem (25 kwietnia) w pewnym miejscu w mieście umieszczono miernik poziomu natężenia dźwięku. W dzień powszedni, w południe, normalny poziom natężenia hałasu wynosi $\beta_0 = 58{,}5$ dB. Gdy w pobliżu przejeżdża motocykl, maksymalny poziom natężenia hałasu wzrasta do $\beta_1 = 66{,}5$ dB. Jaki będzie maksymalny poziom natężenia dźwięku (w dB), gdy w pobliżu będzie przejeżdżać grupa $n = 5$ takich motocykli? Definicję poziomu natężenia dźwięku (w decybelach) możesz znaleźć w dostępnych źródłach.

Rozwiązanie zadania N3.

Poziom natężenia dźwięku β (w decybelach, dB) jest zdefiniowany jako

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0},$$

gdzie I jest natężeniem dźwięku (średnia w czasie moc na jednostkę powierzchni), natomiast $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 jest umowną progową wartością natężenia, powyżej której słyszy dźwięk o częstotliwości 1000 Hz normalnie słysząca osoba.

To oznacza, że natężenie dźwięku jest związane z poziomem natężenia dźwięku wzorem

$$I = I_0 \cdot 10^{\beta/10}.$$

Natężenie dźwięku pochodzącego od różnych źródeł jest w zwykłej sytuacji (brak interferencji) sumą natężeń dźwięku pochodzących od każdego ze źródeł z osobna.

To oznacza, że natężenie dźwięku pochodzącego od jednego motocykla, po odjęciu normalnego natężenia hałasu („tła”) wynosi

$$I_{1,\ \text{tylko motocykl}} = I_0 \cdot \left(10^{\beta_1/10} - 10^{\beta_0/10}\right).$$

Zatem dla n motocykli, z uwzględnieniem tła, natężenie dźwięku wynosi

$$\begin{aligned} I_n &= nI_0 \cdot \left(10^{\beta_1/10} - 10^{\beta_0/10}\right) + I_0 \cdot 10^{\beta_0/10} = \\ &= I_0 \cdot 10^{\beta_0/10} \left(n 10^{(\beta_1-\beta_0)/10} - (n-1)\right). \end{aligned}$$

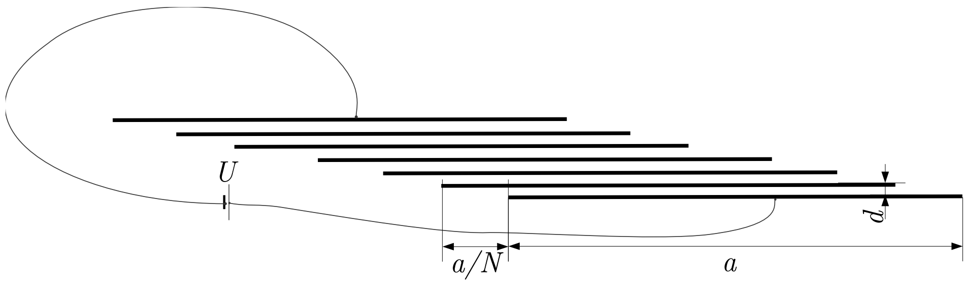
Odpowiadający temu poziom natężenia dźwięku wynosi

$$\beta_n = \beta_0 + 10 \cdot \log_{10} \left(n 10^{(\beta_1-\beta_0)/10} - (n-1)\right).$$

Dla $\beta_0 = 58{,}5$ dB, $\beta_1 = 66{,}5$ dB, $n = 5$ otrzymamy

$$\beta_5 = 72{,}9 \text{ dB}.$$

Zadanie N4.



$N = 8$ metalowych, cienkich, prostokątnych płytek o wymiarach $a \times b$, znajduje się w równoległych płaszczyznach, odległych od siebie o d, gdzie $d \ll a, b$ – patrz rysunek. Boki długości a tej samej strony płytek są do siebie równoległe i wszystkie znajdują się w jednej płaszczyźnie prostopadłej do płytek, a boki b jednej strony strony płytek są względem siebie przesunięte w tę samą stronę o a/N. Zewnętrzne płytki są podłączone do baterii o napięciu U. Wyznacz pojemność elektryczną opisanego układu dla $a = 68{,}1$ cm, $b = 74{,}7$ cm, $d = 1{,}14$ mm.

Przyjmij, że układ jest w próżni. Wartość przenikalności elektrycznej próżni wynosi $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m.

Rozwiązanie zadania N4.

Układ jest równoważny $N - 1$ szeregowo połączonym kondensatorom, z których każdy ma powierzchnię $S = b \cdot (a - a/N)$ i odległość między płytkami d. Zatem pojemność całego układu wynosi

$$C = \varepsilon_0 \frac{ab \cdot (1 - 1/N)}{(N-1)\, d} = \varepsilon_0 \frac{ab}{Nd}.$$

Dla $a = 0{,}681$ m, $b = 0{,}747$ m, $d = 0{,}00114$ m, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m, $N = 8$ otrzymamy $C = 4{,}94 \cdot 10^{-10}$ F, czyli $C = 0{,}494$ nF.

Zadanie N5.

W bezchmurny dzień na równej powierzchni ziemi rozłożono płaską matę. Dolna powierzchnia maty jest izolowana termicznie od podłoża, a ponadto pomalowana białą farbą (nie emituje ani nie absorbuje promieniowania termicznego). Górna powierzchnia maty jest pomalowana czarną farbą (może być traktowana jak ciało doskonale czarne). Kąt między padającymi promieniami Słońca a powierzchnią maty wynosi $\alpha = 42{,}8^{\circ}$. Wyznacz jaką temperaturę T osiągnęłaby mata przy założeniu, że znajduje się ona w równowadze termodynamicznej i można pominąć rolę mechanizmów transportu ciepła różnych od promieniowania. Przyjmij, że na powierzchni Ziemi stała słoneczna jest równa $s = 1000$ W/m^2, a stała Stefana-Boltzmanna wynosi $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W/(m^{2}K^4).

Definicję stałej słonecznej oraz jak promieniuje ciało doskonale czarne możesz znaleźć w dostępnych źródłach.

Rozwiązanie zadania N5.

Moc promieniowania padającego na matę jest równa

$$P_{\mathrm{pad}} = As\sin\alpha,$$

gdzie A jest powierzchnią maty.

Moc wypromieniowana przez matę jest równa

$$P_{\mathrm{prom}} = \sigma A T^4.$$

W stanie równowagi $P_{\mathrm{pad}} = P_{\mathrm{prom}}$, zatem

$$T = \sqrt[4]{\frac{s\sin\alpha}{\sigma}}.$$

Dla $\alpha = 42{,}8^{\mathrm{o}} = 0{,}748$ rad, $s = 1000$ W/m^2 otrzymamy $T = 330{,}9$ K, czyli 57,8 °C.

Zadanie N6.

Trzy stożki o wymiarach odpowiednio $h_1 = 19{,}6$ cm, $r_1 = 6{,}4$ cm, $h_2 = 19{,}3$ cm, $r_2 = 6{,}0$ cm, $h_3 = 8{,}1$ cm, $r_3 = 8{,}0$ cm, gdzie h_i to wysokość i-tego stożka, a r_i – promień jego podstawy, są umieszczone współosiowo w pewnej, ustalonej odległości od siebie, a ich wierzchołki są skierowane w tę samą stronę. Stożki są jednorodnie naładowane ładunkami całkowitymi odpowiednio Q_1, Q_2, Q_3.

Gdy $Q_1 = 1\cdot 10^{-6}$ C , $Q_2 = 2\cdot 10^{-6}$ C, $Q_3 = 1\cdot 10^{-6}$ C , to siła elektrostatyczna działająca na trzeci stożek jest równa $F_{\mathrm{a}} = 0{,}0927$ N.

Gdy $Q_1 = 2\cdot 10^{-6}$ C, $Q_2 = 3\cdot 10^{-6}$ C, $Q_3 = 2\cdot 10^{-6}$, to siła elektrostatyczna działająca na trzeci stożek jest równa $F_{\mathrm{b}} = 0{,}294$ N.

Ile będzie równa siła elektrostatyczna F_{c} działająca na trzeci stożek, gdy $Q_1 = 3\cdot 10^{-6}$ C, $Q_2 = 5\cdot 10^{-6}$ C, $Q_3 = 3\cdot 10^{-6}$ C? Przyjmij, że stożki znajdują się w próżni.

Rozwiązanie zadania N6.

Ponieważ rozkład ładunków wewnątrz stożków każdorazowo jest jednorodny, a równania elektrostatyki są liniowe, siła działająca na trzeci stożek jest liniową funkcją iloczynów ładunków

$$F = k_1 Q_1 Q_3 + k_2 Q_2 Q_3,$$

gdzie k_1 i k_2 są stałymi zależnymi od geometrii układu (czyli od rozmiarów stożków i odległości między nimi), ale niezależnymi od ładunków.

Dla rozważanych trzech sytuacji (oznaczmy je: a, b, c) mamy

$$\frac{F_{\mathrm{a}}}{Q_{3\mathrm{a}}} = k_1 Q_{1\mathrm{a}} + k_2 Q_{2\mathrm{a}}, \tag{3}$$

$$\frac{F_{\mathrm{b}}}{Q_{3\mathrm{b}}} = k_1 Q_{1\mathrm{b}} + k_2 Q_{2\mathrm{b}}, \tag{4}$$

$$\frac{F_{\mathrm{c}}}{Q_{3\mathrm{c}}} = k_1 Q_{1\mathrm{c}} + k_2 Q_{2\mathrm{c}}. \tag{5}$$

W pierwszych dwóch z powyższych równań wszystkie wielkości za wyjątkiem k_1 i k_2 są znane, zatem można z nich wyznaczyć k_1 i k_2; w ogólnym przypadku mamy dość skomplikowany wynik

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{d}\left(Q_{1\mathrm{b}}\frac{F_\mathrm{a}}{Q_{3\mathrm{b}}} - Q_{2\mathrm{a}}\frac{F_\mathrm{b}}{Q_{3\mathrm{a}}}\right), \\ k_2 &= \frac{1}{d}\left(Q_{1\mathrm{b}}\frac{F_\mathrm{a}}{Q_{3\mathrm{b}}} - Q_{1\mathrm{a}}\frac{F_\mathrm{b}}{Q_{3\mathrm{a}}}\right), \end{aligned}$$

gdzie $d = Q_{1\mathrm{a}}Q_{2\mathrm{b}} - Q_{2\mathrm{a}}Q_{1\mathrm{b}}$.

Mając wyznaczone k_1 i k_2 możemy wyznaczyć szukaną siłę F_c jako

$$F_\mathrm{c} = (k_1 Q_{1\mathrm{c}} + k_2 Q_{2\mathrm{c}})\, Q_{3\mathrm{c}}.$$

Dla danych występujących w zadaniu nie ma potrzeby korzystania z ogólnego rozwiązania; dla

$Q_{1\mathrm{a}} = 1 \cdot 10^{-6}$ C , $Q_{2\mathrm{a}} = 2 \cdot 10^{-6}$ C, $Q_{3\mathrm{a}} = 1 \cdot 10^{-6}$ C, $F_\mathrm{a} = 0{,}0927$ N

$Q_{1\mathrm{b}} = 2 \cdot 10^{-6}$ C, $Q_{2\mathrm{b}} = 3 \cdot 10^{-6}$ C, $Q_{3\mathrm{b}} = 2 \cdot 10^{-6}$, $F_\mathrm{b} = 0{,}294$ N,

$Q_{1\mathrm{c}} = 3 \cdot 10^{-6}$ C, $Q_{2\mathrm{c}} = 5 \cdot 10^{-6}$ C, $Q_{3\mathrm{c}} = 3 \cdot 10^{-6}$ C

prawa strona równania (5) jest równa sumie prawych stron równań (3) oraz (4), a zatem w tym przypadku

$$\frac{F_\mathrm{c}}{Q_{3\mathrm{c}}} = \frac{F_\mathrm{a}}{Q_{3\mathrm{a}}} + \frac{F_\mathrm{b}}{Q_{3\mathrm{b}}},$$

skąd otrzymamy $F_\mathrm{c} = 0{,}719$ N.

Zadanie N7.

Zły dr Plama postanowił zniszczyć ludzkość pozbawiając ją powietrza. W tym celu zaplanował zbudowanie ogromnego podziemnego zbiornika o pionowych ścianach, do którego pod wpływem grawitacji uciekłoby powietrze. Zakładając, że głębokość takiego zbiornika to $d = 50{,}41$ km, a jego strop jest bardzo cienki, wyznacz jaką część całkowitej powierzchni Ziemi powinna stanowić powierzchnia dna zbiornika, aby ten niecny plan został spełniony. Przyjmij, że powietrze w zbiorniku ma stałą temperaturę równą 300 K, a dr Plama będzie zadowolony, jeśli ciśnienie na powierzchni Ziemi spadnie do 0,1 atm. Przyjmij, że przyspieszenie grawitacyjne w ramach rozważanych tu odległości od środka Ziemi jest stałe i wynosi 9,81 m/s^2. Przymij też, że Ziemia (przed wykopaniem zbiornika) jest kulą i pomiń problem składowania wydobytej przy budowie zbiornika ziemi (być może zostałaby ona wysłana w przestrzeń kosmiczną).

Uwzględnij, że przy stałej temperaturze T gęstość ρ gazu o masie molowej M znajdującego się w stałym polu grawitacyjnym o natężeniu g zależy od wysokości z zgodnie ze wzorem $\rho = \rho_0 \mathrm{e}^{-Mgz/(RT)}$ (wzór barometryczny), gdzie $R = 8{,}31$ J/K i że przy takiej zależności masa słupa gazu od $z = z_1$ do $z = z_2$ o podstawie o powierzchni S jest równa

$$(SRT/(Mg))\,\rho_0\left(\mathrm{e}^{-Mgz_1/(RT)} - \mathrm{e}^{-Mgz_2/(RT)}\right).$$

Przyjmij, że dla powietrza $M = 0{,}029$ kg/mol.

Rozwiązanie zadania N7.

Oznaczając ciśnienie atmosferyczne na powierzchni Ziemi przez p_0 i uwzględniając fakt, że przez cały przekrój atmosfery przyspieszenie grawitacyjne się nie zmienia, otrzymamy, że cała masa powietrza jest równa $m = S_Z p_0/g$, gdzie S_Z jest powierzchnią Ziemi. Po wykopaniu zbiornika, na jego górnej krawędzi ciśnienie ma wynosić $p_1 = 0{,}1 \cdot p_0$, co oznacza, że masa powietrza powyżej pierwotnej powierzchni Ziemi spadnie do $m_1 = S_Z p_1/g = 0{,}1 \cdot M$. Pozostałe $m_2 = m - m_1 = 0{,}9 \cdot m$ masy powietrza powinno się znajdować w zbiorniku.

Korzystając z równania stanu gazu doskonałego, otrzymujemy, że gęstość powietrza na wysokości górnej krawędzi zbiornika ma wynosić

$$\rho_1 = M\frac{p_1}{RT},$$

gdzie $T = 300$ K.

Na podstawie podanego w treści zadania wzoru i przyjmując $z_1 = -d$, $z_2 = 0$ otrzymamy, że masa powietrza w zbiorniku wynosi

$$m_2 = S_2 \frac{RT}{Mg}\rho_1 \left(\mathrm{e}^{Mgd/(RT)} - 1\right),$$

gdzie S_2 jest powierzchnią zbiornika. Ponieważ ma być $m_2 = 0{,}9 \cdot m$, otrzymamy

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{0{,}9 S_Z p_0/g}{RT\rho_1 \left(\mathrm{e}^{Mgd/(RT)} - 1\right)/(Mg)} = \\ &= \frac{9 \cdot S_Z}{\mathrm{e}^{Mgd/(RT)} - 1}. \end{aligned}$$

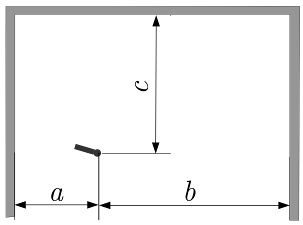
Stąd

$$\frac{S_2}{S_Z} = \frac{9}{\mathrm{e}^{Mgd/(RT)} - 1}.$$

Dla $M = 0{,}029$ kg/mol, $g = 9{,}81$, $d = 50410$ m, $R = 8{,}31$ J/(mol·K), $T = 300$ K otrzymamy

$$\frac{S_2}{S_Z} = 0{,}0287.$$

Zadanie N8.



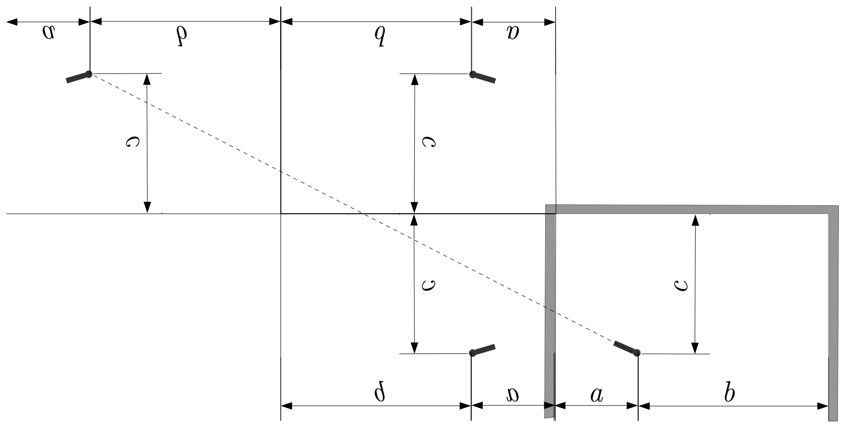
Stojąca na podłodze armatka wystrzeliwuje piłki z prędkością $v = 18{,}9$ m/s. Armatka stoi wewnątrz pomieszczenia, w odległości $a = 2{,}23$ m od lewej ściany, w odległości $b = 2{,}10$ m od prawej ściany i odległości $c = 3{,}60$ m od przedniej ściany – patrz rysunek. ściany są pionowe, sąsiednie są do siebie prostopadłe, a sufit jest bardzo wysoko. Armatka jest ustawiona pod takim kątem w stosunku do lewej ściany, że piłka po odbiciu od rozważanych trzech ścian wraca w kierunku armatki. Pod jakim minimalnym kątem α w stosunku do poziomu powinna być uniesiona lufa armatki, aby po odbiciu od ścian piłka spadła dokładnie w miejscu ustawienia armatki, nie odbijając się wcześniej od podłogi.

Odbicia od ścian są idealnie sprężyste. Pomiń rozmiary liniowe armatki i piłki. Pomiń też opór powietrza.

Przyjmij, że przyspieszenie ziemskie wynosi $g = 9{,}81$ m/s^2.

Rozwiązanie zadania N8.

Ponieważ odbicia są sprężyste, czyli zachodzą pod takimi kątami, jak odbicie światła od lustra, najłatwiej prześledzić tor piłki rysując lustrzane odbicia. patrz rysunek.



W takim lustrzanym świecie tor piłki jest zwykłą parabolą, a jego rzut na płaszczyznę podłogi – odcinkiem. Z rysunku wynika, że długość tego odcinka jest równa

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{(a + (a + b) + b)^2 + (c + c)^2} = \\ &= 2\sqrt{(a + b)^2 + c^2}. \end{aligned}$$

Ze wzoru na zasięg rzutu ukośnego po kątem α mamy

$$l = \frac{v^2}{g} \sin 2\alpha,$$

zatem

$$\alpha = \frac{1}{2} \arcsin \frac{gl}{v^2}.$$

Dla $a = 2{,}23$ m, $b = 2{,}10$ m, $c = 3{,}60$ m, $v = 18{,}9$ m/s, otrzymamy $\alpha = 0{,}157$ rad $= 9{,}00°$.

Zadanie N9.

Dwie zwojnice o promieniach odpowiednio r_1, r_2 i długościach odpowiednio l_1, l_2, gdzie $r_1 < r_2 \ll l_2 < l_1$ mają wspólną oś, a ich środki geometryczne się pokrywają. Na każdą ze zwojnic jest nawinięta (gęsto) taka sama liczba zwojów N, a kierunek nawinięcia jest w obu przypadkach taki sam. Zależności od czasu t natężeń prądów płynących przez zwojnice są dane wzorami $I_1 = a_1 \cdot t$, $I_2 = a_2 \cdot t$.

Dla $r_1 = 0{,}0137$ m, $r_2 = 0{,}0250$ m, $l_1 = 0{,}572$ m, $l_2 = 0{,}274$ m, $a_1 = 3{,}67$ A/s, $a_2 = 4{,}32$ A/s, $N = 1000$ wyznacz wartość siły elektromotorycznej indukowanej w wyniku przepływu tych prądów na drugiej zwojnicy w chwili $T = 0{,}631$ s. Układ znajduje się w powietrzu o przenikalności magnetycznej równej w przybliżeniu przenikalności magnetycznej próżni $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ $(\mathrm{V \cdot s}) / (\mathrm{A \cdot m})$.

Rozwiązanie zadania N9.

Indukcja pola magnetycznego wewnątrz pierwszej (wewnętrznej) zwojnicy jest równa sumie indukcji pochodzących od obu zwojnic, zatem zgodnie ze wzorem na indukcję pola magnetycznego wewnątrz zwojnicy jej wartość jest równa

$$B_1 = \mu_0 \left(\frac{N}{l_1} I_1 + \frac{N}{l_2} I_2 \right).$$

Indukcja pola magnetycznego w obszarze między zwojnicami pochodzi tylko od drugiej (zewnętrznej) zwojnicy i jest równa

$$B_2 = \mu_0 \frac{N}{l_2} I_2.$$

Wektory tych indukcji są skierowane wzdłuż osi zwojnic.

Całkowity strumień indukcji wewnątrz drugiej zwojnicy, przechodzący przez przekrój prostopadły do jej osi, jest zatem równy

$$\varPhi = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N}{l_1} I_1 + \pi r_2^2 \mu_0 \frac{N}{l_2} I_2.$$

Z prawa indukcji Faradaya wynika, że siła elektromotoryczna indukowana na drugiej zwojnicy wynosi

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -N \frac{\Delta \varPhi}{\Delta t} = \\ &= -\pi \mu_0 N^2 \left(r_1^2 \frac{a_1}{l_1} + r_2^2 \frac{a_2}{l_2} \right). \end{aligned}$$

Dla $r_1 = 0{,}0137$ m, $r_2 = 0{,}0250$ m, $l_1 = 0{,}572$ m, $l_2 = 0{,}274$ m, $a_1 = 3{,}67$ A/s, $a_2 = 4{,}32$ A/s, $N = 1000$ otrzymamy

$$|\mathcal{E}| = 0{,}0437 \text{ V}.$$

Zadanie N10.

Prostopadłościenna, jednorodna, metalowa płyta znajduje się w otoczeniu o temperaturze T_0. Gdy z obu stron umieszczono matę izolacyjną A, to czas stygnięcia płyty od temperatury T_1 do temperatury $(T_0 + T_1)/2$ wynosi $\tau_{\mathrm{AA}} = 4{,}93$ h. Gdy z obu stron płyty umieszczono matę izolacyjną B, to czas stygnięcia płyty od temperatury T_1 do temperatury $(T_0 + T_1)/2$ wynosi $\tau_{\mathrm{BB}} = 0{,}87$ h. Ile będzie wynosił czas τ_{AB} stygnięcia płyty od temperatury T_1 do temperatury $(T_0 + T_1)/2$, gdy z jednej strony płyty będzie się znajdować mata izolacyjna A, a z drugiej mata izolacyjna B?

Pomiń pojemność cieplną mat izolacyjnych. Przyjmij, że prędkość przepływu ciepła przez matę jest proporcjonalna do różnicy temperatur między płytą a otoczeniem.

Wyszukaj w dostępnych źródłach, jak stygnie ciało w sytuacji analogicznej do opisanej.

Rozwiązanie zadania N10.

W rozważanej sytuacji temperatura płyty T w chwili t jest związana ze współczynnikiem szybkości wypływu ciepła λ oraz pojemnością cieplną płyty C wzorem (prawo stygnięcia Newtona)

$$T = (T_1 - T_0)\, \mathrm{e}^{-(\lambda/C)\cdot t} + T_0.$$

Oznaczając przez τ czas po jakim płyta osiągnie temperaturę $(T_1 + T_1)/2$ otrzymujemy związek

$$e^{-(\lambda/C)\cdot\tau} = \frac{1}{2},$$

czyli

$$\frac{\lambda}{C} = \frac{\ln 2}{\tau}.$$

Jest to związek analogiczny jak w przypadku rozpadu promieniotwórczego.

Jeśli oznaczymy współczynnik szybkości przepływu ciepła przez matę A jako λ_{A}, przez matę B jako λ_{B}, to otrzymamy

$$\begin{aligned} 2\lambda_{\mathrm{A}} &= C\frac{\ln 2}{\tau_{\mathrm{AA}}}, \\ 2\lambda_{\mathrm{B}} &= C\frac{\ln 2}{\tau_{\mathrm{BB}}}. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\lambda_{\mathrm{A}} + \lambda_{\mathrm{B}} = C\frac{\ln 2}{\tau_{\mathrm{AB}}},$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \tau_{\mathrm{AB}} &= \frac{2}{1/\tau_{\mathrm{AA}} + 1/\tau_{\mathrm{BB}}} = \\ &= \frac{2\tau_{\mathrm{AA}}\tau_{\mathrm{BB}}}{\tau_{\mathrm{AA}} + \tau_{\mathrm{BB}}}. \end{aligned}$$

Dla $\tau_{\mathrm{AA}} = 4{,}93$ h, $\tau_{\mathrm{BB}} = 0{,}87$ h, otrzymamy $\tau_{\mathrm{AB}} \approx 1{,}48$ h.