

# LXXIV OLIMPIADA FIZYCZNA

## ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAWODÓW I STOPNIA

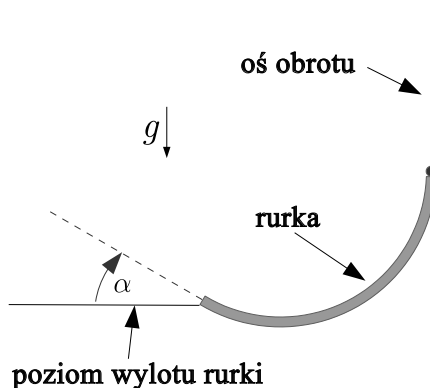
### CZEŚĆ II

ZADANIA CZEŚCI II (termin wysyłania rozwiązań — 15 listopada 2024 r.)

#### ZADANIA TEORETYCZNE

Należy przesłać rozwiązania trzech (i tylko trzech) dowolnie wybranych zadań teoretycznych. Za każde z trzech zadań można otrzymać maksimum 20 punktów.

#### Zadanie T1.

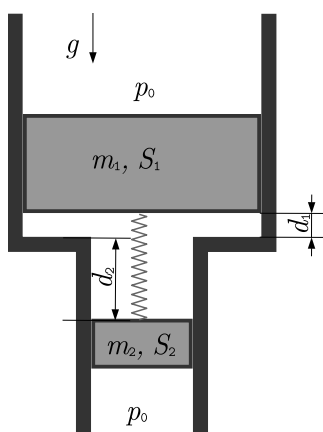


Sztywna rurka o promieniu wewnętrznym  $r$  została wygięta w kształt łuku okręgu o promieniu  $R$ , umieszczonego w płaszczyźnie pionowej. Górny koniec rurki jest skierowany pionowo, a dolny (wylot) jest skierowany do góry pod kątem  $\alpha$  w stosunku do poziomu ( $0 < \alpha < \pi/2$ ). Rurka obraca się ze stałą prędkością kątową  $\omega$  wokół osi pionowej przechodzącej przez górny koniec rurki (stałość prędkości kątowej jest wymuszana przez nieprzedstawiony na rysunku silnik). Do rurki włożono od góry kulkę o masie  $m$  i o promieniu nieco mniejszym od  $r$ . Wyznacz:

- maksymalną wysokość (mierzoną od dolnego końca rurki), jaką osiągnie kulka po wylocie z rurki,
- pracę jaką wykonał silnik obracający rurkę w czasie przelotu przez nią kulki.

Przyjmij, że  $r \ll R$  oraz, że między kulką a rurką nie występuje tarcie, a opór powietrza można pominąć. Przyspieszenie grawitacyjne wynosi  $g$ .

## Zadanie T2.

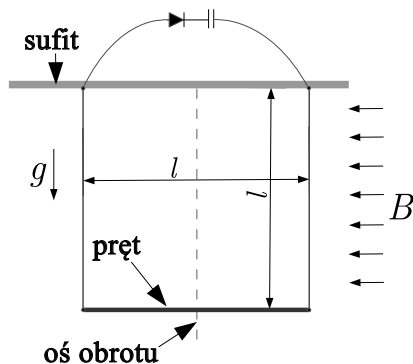


Wewnątrz dwóch połączonych ze sobą, pionowych cylindrów znajdują się idealnie dopasowane (szczelne) i mogące przesuwac się bez tarcia tłoki o masach  $m_1$  (górny tłok) oraz  $m_2$  (dolny tłok) oraz polach przekroju odpowiednio  $S_1$  i  $S_2$ . Tłoki są połączone nieważką sprężyną o stałej sprężystości  $k$ , której długość w stanie początkowym jest równa  $l$ . Ciśnienie powietrza na zewnątrz tłoków jest stale równe  $p_0$ , a początkowe ciśnienie powietrza w obszarze między tłokami wynosi  $p$ . Początkowa temperatura na zewnątrz i pomiędzy tłokami jest taka sama i wynosi  $T_0$ . Tłoki i wewnętrzne ścianki cylindrów są pokryte doskonale izolującą cieplną warstwą. W stanie początkowym odległości tłoków od łączenia cylindrów wynoszą odpowiednio  $d_1$  i  $d_2$  ( $d_1 + d_2 = l$ ), a układ jest w równowadze.

Do gazu między tłokami dostarczono powoli ciepło  $Q$ . Wyznacz o ile zostanie przesunięty względem położenia początkowego górny tłok i jaka będzie temperatura powietrza  $T$  między tłokami. Molowe ciepło właściwe (przy stałej objętości) powietrza jest równe  $C_V$ . Przyspieszenie grawitacyjne wynosi  $g$ . Pomiń pojemność cieplną i objętość sprężyny. Przyjmij, że powietrze jest gazem doskonałym.

Zakładamy, że parametry są takie, że tłoki nie wysuną się ze swoich cylindrów.

## Zadanie T3.



Cienki, sztywny metalowy pręt o długości  $l$  i masie  $m$  zawieszono za końce na dwóch cienkich, nieważkich i nierozciągliwych drutach o długości  $l$  każdy. Drugi koniec każdego z drutów jest przymocowany do poziomego sufitu, a punkty zamocowania są również w odległości  $l$  od siebie

– w stanie równowagi druty i pręt tworzą trzy boki kwadratu, przy czym dwa boki są pionowe, a jeden poziomy – patrz rysunek. Punkty zawieszenia są połączone ze sobą elektrycznie poprzez kondensator z dołączoną do niego szeregowo idealną diodą.

Układ znajduje się w stałym, jednorodnym, poziomym polu magnetycznym o indukcji  $B$ , przy czym pole magnetyczne jest równoległe do poziomego pręta, gdy jest on w stanie równowagi. Pręt obrócono wokół osi pionowej przechodzącej przez jego środek o mały kąt  $\alpha_0$ , a następnie swobodnie puszczono. Wyznacz napięcie, do jakiego naładuje się kondensator.

Pomiń pole magnetyczne wytwarzane przez płynący prąd oraz straty energii. Energia, jaka zostanie zgromadzona w kondensatorze, jest znacznie mniejsza od energii drgań mechanicznych układu. Przyspieszenie ziemskie wynosi  $g$ .

Uwzględnij, że dla  $x \ll 1$  zachodzi  $\cos x \approx 1 - x^2/2$ ,  $\sin x \approx x$ .

#### Zadanie T4 - numeryczne.

Sonda krążąca wokół Słońca po orbicie pokrywającej się z orbitą Ziemi jest wyposażona w żagiel słoneczny, który można traktować jako płaskie lustro odbijające promienie słoneczne. Płaszczyzna żagla jest ustawiona pod kątem  $\alpha$  w stosunku do osi sonda–Słońce, tak, by odbite światło hamowało ruch orbitalny sondy. Wyznacz numerycznie tor sondy (zrób wykres) w ciągu 10 lat od rozłożenia żagla oraz minimalną odległość sondy od Słońca w przedstawionych poniżej przypadkach:  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\alpha = 60^\circ$ . Pomiń oddziaływanie grawitacyjne sondy ze wszystkimi obiektami prócz Słońca.

Przyjmij, że Ziemia krąży wokół Słońca po okręgu o promieniu  $R = 1,50 \cdot 10^{11}$  m z prędkością  $v = 3 \cdot 10^4$  m/s, stała słoneczna (energia promieniowania padająca na jednostkową powierzchnię) w odległości  $R$  od środka Słońca wynosi  $1400$  W/m<sup>2</sup>, a masa sondy (z uwzględnieniem żagla) na jednostkę powierzchni żagla wynosi  $0,1$  kg/m<sup>2</sup>. Uwzględnij, że pęd fotonu jest równy jego energii podzielonej przez prędkość światła  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s.

Jeśli w którymś przypadku okaże się, że sonda dotrze do powierzchni Słońca, wyznacz tor sondy tylko do momentu osiągnięcia tej powierzchni. Promień Słońca  $R_s = 0,00465R$ .

#### Uwaga:

Rozwiązanie powinno zawierać:

- (i) wzory używane w rozwiązaniu wraz z wyprowadzeniem lub uzasadnieniem;
- (ii) opis zastosowanego algorytmu;
- (iii) opis kodu programu (lub np. arkusza kalkulacyjnego) użytego do rozwiązania wraz z sposobem zagwarantowania (lub sprawdzenia) właściwej dokładności wyników;
- (iv) wykresy oraz wartości liczbowe, o których mowa w treści zadania
- (v) jakościowe omówienie otrzymanych wyników.

Nie jest dopuszczalne użycie programów do obliczeń symbolicznych lub gotowych programów wyznaczających poszukiwany czas po podaniu toru.

Dodatkowe wskazówki dotyczące rozwiązywania zadań numerycznych znajdziesz w treściach i rozwiązaniach zadań numerycznych z poprzednich olimpiad.

## ZADANIA DOŚWIADCZALNE

Należy przesłać rozwiązania dwóch (i tylko dwóch) dowolnie wybranych zadań doświadczalnych. Za każde z zadań doświadczalnych można otrzymać maksymalnie 40 punktów.

**Zadanie D1.**

Masz do dyspozycji:

- 5 baterii o nominalnym napięciu 3 V
- 10 jednakowych czerwonych diod elektroluminescencyjnych (LED),
- opornik o oporze ok. 100  $\Omega$ ,
- 2 woltomierze,
- 10 przewodów pomiarowych zakończonych zaciskami (krokodylkami).

Wyznacz charakterystykę prądowo-napięciową diody elektroluminescencyjnej (w możliwie szerokim zakresie; co najmniej 10 różnych punktów pomiarowych rozłożonych możliwie równomiernie w skali napięcia).

Zależność natężenia prądu  $I$  płynącego przez diodę od przyłożonego do niej napięcia  $U$  dla odpowiednio małych napięć może być opisana równaniem Shockleya:

$$I = I_S(e^{U/U_0} - 1),$$

gdzie  $e$  to podstawa logarytmu naturalnego,  $I_S$  oraz  $U_0$  to stałe charakterystyczne dla konkretnej diody. Korzystając ze zmierzonej charakterystyki diody wyznacz parametr  $U_0$ .

**Wskazówka:** Aby wyznaczyć parametr  $U_0$  wykreśl zależność logarytmu natężenia prądu od napięcia i dopasuj do tej zależności prostą.

**Zadanie D2.**

Masz do dyspozycji:

- komputer z ciekłokrystalicznym ekranem emitującym światło spolaryzowane liniowo,
- program graficzny, który pozwala na wyświetlanie prostych kształtów,
- szklaną gładką szybkę,
- taśmę mierniczą.

1. Wyznacz kąt między kierunkiem polaryzacji światła a dłuższą krawędzią monitora.
2. Wyznacz współczynnik załamania światła szkła, z którego została wykonana szybka.

**Uwaga 1:** Nie wszystkie wyświetlacze emitują światło spolaryzowane liniowo. Polaryzację możesz sprawdzić przy pomocy okularów polaryzacyjnych.

**Uwaga 2:** W rozwiązaniu podaj model monitora.

**Wskazówka:** Światło spolaryzowane liniowo to światło, którego wektor pola elektrycznego drga wzdłuż wybranego kierunku (wybranej osi), zwanego kierunkiem polaryzacji (zwanej osią polaryzacji).

**Zadanie D3.**

Masz do dyspozycji:

- sztywną rurę o regulowanej długości (np. rurę od odkurzacza),
- taśmę mierniczą,
- smartfon z aplikacją umożliwiającą generację dźwięku o regulowanej częstotliwości (np. phyphox albo Physics Toolbox Suite)
- głośnik, który można podłączyć do smartfonu.

Wyznacz prędkość dźwięku w powietrzu.

**ROZWIĄZANIA****Rozwiązanie zadania T1**

Rozważając zagadnienie w układzie współobracającym się z rurką, otrzymujemy, że prędkość wylotowa kulki  $v$  spełnia zasadę zachowania energii

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR \cos \alpha + \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 (1 + \sin \alpha)^2, \quad (1)$$

gdzie składnik  $mgR \cos \alpha$  to zmiana energii potencjalnej grawitacji, natomiast  $m\omega^2 R^2 (1 + \sin \alpha)^2 / 2$  to praca wykonana przez siłę odśrodkową (ponieważ siła odśrodkowa rośnie liniowo z odległością

od osi obrotu, to wyrażenie jest analogiczne do wzoru na pracę wykonaną przez siłę sprężystości spełniającą prawo Hooke'a).

Zauważmy, że praca wykonana przez ścianki rurki jest w rozważanym układzie zerowa, gdyż kulka nie ma w tym układzie składowej prędkości równoległej do siły pochodzącej od tych ścianek. W żadnym innym układzie nie możemy przyjąć takiego założenia, w szczególności w układzie inercyjnym ścianki rurki wykonują pracę.

Z równania (1) otrzymujemy

$$v = \sqrt{2gR \cos \alpha + \omega^2 R^2 (1 + \sin \alpha)^2}. \quad (2)$$

Składowa pionowa tej prędkości  $v_y$  jest równa

$$v_y = v \sin \alpha, \quad (3)$$

stąd wysokość  $y$  na jaką polecą kulka jest równa (np. z zasady zachowania energii zastosowanej do ruchu pionowego)

$$y = \frac{v_y^2}{2g} = \quad (4)$$

$$= \frac{2gR \cos \alpha + \omega^2 R^2 (1 + \sin \alpha)^2}{2g} \sin^2 \alpha. \quad (5)$$

Powyższe rozumowanie przeprowadziliśmy w nieinercyjnym układzie współobracającym się z kulką, zauważmy jednak że ruch w pionie, czyli w kierunku równoległym do osi obrotu jest taki sam w tym układzie nieinercyjnym oraz inercyjnym.

Przejdźmy teraz do układu inercyjnego.

Ponieważ koniec rurki się obraca, w układzie inercyjnym wylatująca kulka ma jeszcze prędkość  $v_s$  styczną do okręgu zataczanego przez koniec rurki, równą

$$v_s = \omega R (1 + \sin \alpha). \quad (6)$$

Energia kinetyczna  $E_k$  (w układzie inercyjnym!) wylatującej kulki jest równa

$$E_k = \frac{1}{2} m (v^2 + v_s^2) = \quad (7)$$

$$= mgR \cos \alpha + m\omega^2 R^2 (1 + \sin \alpha)^2. \quad (8)$$

Siła grawitacji wykonuje pracę  $mgR \cos \alpha$ , reszta energii pochodzi z silnika obracającego rurkę, zatem szukana praca  $W$  jest równa

$$W = m\omega^2 R^2 (1 + \sin \alpha)^2. \quad (9)$$

### Alternatywne rozwiązanie zadania T1

Rozwiążemy zadanie w układzie inercyjnym, zaczynając od podpunktu b). Niech  $M$  będzie chwilowym momentem siły wytwarzanym przez silnik w celu podtrzymania ruchu ze stałą prędkością kątową  $\omega$ . Zgodnie z drugą zasadą dynamiki dla ruchu obrotowego

$$M = \frac{\Delta L}{\Delta t}, \quad (10)$$

gdzie  $L$  to całkowity moment pędu układu. Przy obracaniu rurki o mały kąt  $\Delta\alpha$  silnik wykonuje pracę

$$\Delta W = M\Delta\alpha = \frac{\Delta L}{\Delta t}\Delta\alpha = \omega\Delta L. \quad (11)$$

Oznacza to, że całkowita praca silnika jest równa

$$W = \omega(L_1 - L_0), \quad (12)$$

gdzie  $L_0$  i  $L_1$  to momenty pędu układu na początku i na końcu ruchu kulki w rurce. Zmiana momentu pędu rurki jest zerowa, początkowy moment pędu kulki wynosi 0, a końcowy

$$L_1 = m\omega R^2(1 + \sin\alpha)^2, \quad (13)$$

stąd otrzymujemy

$$W = \omega L_1 = m\omega^2 R^2(1 + \sin\alpha)^2. \quad (14)$$

Przejdźmy do rozwiązania podpunktu a). Całkowita wartość prędkości kulki w momencie wylotu z rurki wynosi

$$V = \sqrt{v^2 + \omega^2 R^2(1 + \sin\alpha)^2}, \quad (15)$$

gdzie  $v$  to składowa prędkości leżąca w płaszczyźnie rurki,  $\omega R(1 + \sin\alpha)$  jest składową prędkości prostopadłą do tej płaszczyzny. Całkowita zmiana energii mechanicznej kulki w czasie ruchu wewnątrz rurki wynosi

$$E = \frac{mV^2}{2} - mgR \cos\alpha = \quad (16)$$

$$= \frac{mv^2}{2} + \frac{m\omega^2 R^2(1 + \sin\alpha)^2}{2} - mgR \cos\alpha. \quad (17)$$

Zauważmy, że człon związany z energią ruchu obrotowego kulki stanowi połowę pracy wykonanej przez silnik. Różnicę między tymi wielkościami możemy interpretować jako pracę siły odśrodkowej, obecnej w układzie nieinercyjnym rozważanym w poprzednim rozwiązaniu. Przystawiając do siebie prawe strony równań (17) i (14) otrzymujemy równanie na  $v$  identyczne z pierwszym równaniem pierwszego rozwiązania. Pozwala to rozwiązać podpunkt a) identycznie jak w pierwszym rozwiązaniu.

### Punktacja alternatywnego rozwiązania zadania T1

#### Rozwiązanie zadania T2

Z warunku równowagi każdego z tłoków mamy

$$(p - p_0) S_1 - k\Delta l = m_1 g, \quad (18)$$

$$-(p - p_0) S_2 + k\Delta l = m_2 g. \quad (19)$$

Stąd

$$(p - p_0) (S_1 - S_2) = (m_1 + m_2) g. \quad (20)$$

Zauważmy, że z powyższego równania wynika, że ciśnienie powietrza pomiędzy tłokami nie ulega zmianie, a stąd, że wydłużenie sprężyny, a więc też odległość między tłokami również nie ulega zmianie.

Jeśli tłoki podniosą się o  $x$ , to objętość powietrza między tłokami wzrośnie z

$$V_0 = d_1 S_1 + d_2 S_2, \quad (21)$$

do

$$V = (d_1 + x) S_1 + (d_2 - x) S_2 = \quad (22)$$

$$= V_0 + x(S_1 - S_2). \quad (23)$$

Całkowita wykonana praca  $W$  będzie równa

$$W = (m_1 + m_2) gx + p_0 (S_1 - S_2) x, \quad (24)$$

gdzie  $(m_1 + m_2) gx$  to wzrost energii potencjalnej tłoków, a  $p_0 (S_1 - S_2) x$  to zmiana energii otaczającego gazu (czyli praca wykonana przeciw ciśnieniu zewnętrznemu).

Zauważmy, że zgodnie z równaniem (20) mamy

$$W = p(S_1 - S_2) x,$$

co jest zgodne z ogólnym równaniem (w przypadku równowagi mechanicznej) na pracę wykonaną przez gaz  $W = p\Delta V$ , gdzie  $\Delta V$  jest zmianą objętości gazu.

Wzrost energii wewnętrznej powietrza między tłokami wynosi

$$nC_V (T - T_0), \quad (25)$$

gdzie

$$n = \frac{pV_0}{RT_0}, \quad (26)$$

jest liczbą moli powietrza między tłokami.

Z zasady zachowania energii (I zasada termodynamiki) mamy

$$\begin{aligned} Q &= W + nC_V (T - T_0), \\ &= p\Delta V + nC_V (T - T_0). \end{aligned} \quad (27)$$

Na podstawie równania stanu gazu doskonałego, uwzględniając, że ciśnienie jest stałe, zachodzi

$$p\Delta V = nR (T - T_0),$$

a zatem

$$Q = n(C_V + R)(T - T_0). \quad (28)$$

Jest to standardowy wzór na ciepło dostarczone do gazu w przemianie izobarycznej i można go było wypisać bez poprzednich rozważań.

Jeszcze raz korzystając z równania stanu gazu doskonałego i uwzględniając, że ciśnienie jest stałe mamy

$$\frac{T}{\bar{V}} = \frac{T_0}{V_0}, \quad (29)$$



a stąd

$$\begin{aligned} T - T_0 &= \frac{V - V_0}{V_0} T_0 = \\ &= x \frac{S_1 - S_2}{V_0} T_0. \end{aligned} \quad (30)$$

Zatem

$$Q = n(C_V + R)x \frac{S_1 - S_2}{V_0} T_0. \quad (31)$$

Z powyższej zależności wyznaczamy  $x$  w jawnej postaci

$$x = \frac{Q}{n(C_V + R)(S_1 - S_2)T_0/V_0} = \quad (32)$$

$$= \frac{Q}{(C_V + R)(S_1 - S_2)p/R}, \quad (33)$$

oraz

$$T = \left( 1 + \frac{S_1 - S_2}{d_1 S_1 + d_2 S_2} \cdot \frac{Q}{(C_V + R)(S_1 - S_2)p/R} \right) T_0. \quad (34)$$

### Rozwiązanie zadania T3

Przy obrocie pręta o kąt  $\alpha$  końce drutów przesuwają (w przybliżeniu  $\alpha \ll 1$ ) się o  $\alpha l/2$ , co oznacza że druty odchylają się o kąt  $\beta$  równy

$$\beta = \frac{\alpha l/2}{l} = \frac{\alpha}{2}. \quad (35)$$

Zatem pręt podniesie się o

$$l(1 - \cos \beta) \approx l \frac{\beta^2}{2} = \quad (36)$$

$$= l \frac{\alpha^2}{8}. \quad (37)$$

W związku z tym grawitacyjna energia potencjalna układu wzrośnie o

$$\Delta E_p = mgl \frac{\alpha^2}{8}. \quad (38)$$

Jeśli pręt obraca się z prędkością kątową  $\omega_\alpha$ , to jego energia kinetyczna wynosi

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega_\alpha^2, \quad (39)$$

gdzie  $I = ml^2/12$  jest momentem bezwładności pręta względem osi obrotu.

Porównując powyższe wyrażenie z wyrażeniami na energię potencjalną oraz kinetyczną oscylatora harmonicznego, otrzymujemy, że przy pominięciu sił elektrodynamicznych, w układzie będą zachodzić drgania skrętne o częstości

$$\Omega = \sqrt{\frac{mgl/4}{I}} = \sqrt{\frac{3g}{l}}. \quad (40)$$

To oznacza, że

$$\alpha = \alpha_0 \cos \Omega t, \quad (41)$$

$$\omega_\alpha = -\alpha_0 \Omega \sin \Omega t. \quad (42)$$

Patrząc wzdłuż pola magnetycznego, rzut konturu utworzonego przez druty i pręt jest trójkątem równoramiennym o ramionach długości  $l$  i podstawie o długości  $2l\beta = l\alpha$ . Pole tego trójkąta jest równe (w rozważanym przybliżeniu)

$$S = \frac{1}{2}l^2\alpha, \quad (43)$$

a zatem strumień indukcji pola magnetycznego przechodzący przez rozważany obwód wynosi

$$\Phi = SB = Bl^2\alpha/2. \quad (44)$$

Ponieważ kąt  $\alpha$  się zmienia, to zgodnie z prawem Faradaya w układzie jest indukowana siła elektromotoryczna

$$\mathcal{E} = -Bl^2\omega_\alpha/2 = \quad (45)$$

$$= \frac{Bl^2\alpha_0\Omega}{2} \sin \Omega t. \quad (46)$$

Maksymalna wartość tej siły elektromotorycznej jest równa  $Bl^2\alpha_0\Omega/2$  i to jest napięcie, do jakiego naładuje się kondensator w naszym układzie. Zatem szukane napięcie jest równe

$$U = \frac{Bl^2\alpha_0}{2} \sqrt{\frac{3g}{l}}. \quad (47)$$

### Rozwiązanie zadania T4 (numerycznego)

Pęd fotonów padających na żagiel w ciągu krótkiego czasu  $\Delta t$  (na tyle krótkiego, że można pominąć zmianę położenia żagla w jego trakcie) jest równy

$$\vec{p}_p = \frac{s}{c} A \Delta t \sin \alpha \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|},$$

gdzie  $A$  jest powierzchnią żagla,  $\vec{r}$  – wektorem od środka Słońca do sondy,  $s$  – stałą słoneczną w odległości  $r$  od środka Słońca.

Światło odbite leci pod kątem  $2\alpha$  w stosunku do  $\vec{r}$ , zatem wektor jego pędu jest równy

$$\vec{p}_o = \frac{s}{c} A \Delta t \sin \alpha \cdot (\hat{r} \cos 2\alpha + \hat{t} \sin 2\alpha),$$

gdzie  $\hat{r} = \vec{r}/r$ ,  $\hat{t}$  jest wektorem jednostkowym prostopadłym do  $\hat{r}$ , leżącym w płaszczyźnie orbity Ziemi i zwrocie zgodnym z kierunkiem obiegu Ziemi (oraz sondy) wokół Słońca.

Zmiana pędu fotonów wynosi

$$\Delta\vec{p} = \frac{s}{c} A \Delta t \sin \alpha \cdot \left( -\hat{r} (1 - \cos 2\alpha) + \hat{t} \sin 2\alpha \right),$$

zatem siła, z jaką fotony działają na żagiel wynosi

$$\vec{F}_f = \frac{s}{c} A \sin \alpha \cdot \left( \hat{r} (1 - \cos 2\alpha) - \hat{t} \sin 2\alpha \right).$$

Powyżej uwzględniliśmy, że  $\vec{F}_f$  ma przeciwny zwrot niż siła jaką żagiel działa na fotony.

Zauważmy, że ponieważ całkowity strumień fotonów nie zależy od  $r$ ,  $s$  jest równe

$$s = s_0 \frac{R^2}{r^2},$$

gdzie  $s_0$  jest podaną w treści zadania stałą słoneczną w odległości  $R$  od środka Słońca.

Uwzględniając oddziaływanie grawitacyjne Słońca, całkowita siła działająca na sondę jest równa

$$\vec{F} = -\frac{GM_S m}{r^2} \hat{r} + \frac{s_0 R^2}{c r^2} A \sin \alpha \cdot \left( \hat{r} (1 - \cos 2\alpha) - \hat{t} \sin 2\alpha \right),$$

gdzie  $G$  jest uniwersalną stałą grawitacyjną,  $M_S$  – masą Słońca, a  $m$  – masą sondy wraz z żaglem. Zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona, przyspieszenie sondy  $\vec{a}$  jest zatem równe

$$\vec{a} = -\left( \frac{v^2}{R} - \frac{s_0 A}{c m} \sin \alpha (1 - \cos 2\alpha) \right) \left( \frac{R}{r} \right)^2 \cdot \hat{r} - \frac{s_0 A}{c m} \sin \alpha \sin 2\alpha \left( \frac{R}{r} \right)^2 \cdot \hat{t}, \quad (48)$$

gdzie  $GM_S$  wyraziliśmy przez podane w treści zadania  $v$  oraz  $R$ ; skorzystaliśmy z tego, że w ruchu Ziemi po orbicie (przyjmując, że jest ona okręgiem) zachodzi  $GM_S/R^2 = v^2/R$ .

W układzie współrzędnych prostokątnych, takim że orbita Ziemi leży w płaszczyźnie  $xy$ , a położenie sondy jest dane przez wektor  $(x, y)$ , mamy

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right), \\ \hat{t} &= \left( -\frac{y}{r}, \frac{x}{r} \right), \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

W tym układzie odpowiednie składowe przyspieszenia są dane wzorami

$$\frac{a_x}{R} = \left( \frac{R}{r} \right)^2 \left( -k_r \frac{x}{r} + k_t \frac{y}{r} \right), \quad (49)$$

$$\frac{a_y}{R} = \left( \frac{R}{r} \right)^2 \left( -k_r \frac{y}{r} - k_t \frac{x}{r} \right), \quad (50)$$

gdzie

$$k_r = \left( \frac{v^2}{R} - \frac{s_0 A}{c m} \sin \alpha (1 - \cos 2\alpha) \right) / R, \quad (51)$$

$$k_t = \left( \frac{s_0 A}{c m} \sin \alpha \sin 2\alpha \right) / R. \quad (52)$$

Naszym zadaniem jest rozwiązać numerycznie równania ruchu (49, 50) przy warunku początkowym w chwili  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} v_x &= 0, \\ v_y &= v, \\ x &= R, \\ y &= 0. \end{aligned}$$

(Powyżej dla wygody przyjęliśmy, że w chwili początkowej  $\vec{r} = (R, 0)$ .)

### Rozwiązanie numeryczne

Wprowadźmy stałą  $\tau = 2\pi R/v$  – czas obiegu Ziemi po orbicie, oraz „zredukowane” prędkości, przyspieszenia i czas

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{\tau}{R} v_x, \\ V_y &= \frac{\tau}{R} v_y, \\ A_x &= \frac{\tau^2}{R} a_x, \\ A_y &= \frac{\tau^2}{R} a_y, \\ T &= \frac{t}{\tau}. \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{R}, \\ Y &= \frac{y}{R}, \\ D &= \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}. \end{aligned}$$

W nowych zmiennych  $V_x, V_y$  są prędkościami, a  $A_x, A_y$  – przyspieszeniami związanymi z położeniami  $X, Y$  oraz czasem  $T$ . W tych nowych zmiennych

$$A_x = \left( -K_r \frac{X}{D} + K_t \frac{Y}{D} \right) / D^2, \quad (53)$$

$$A_y = \left( -K_r \frac{Y}{D} - K_t \frac{X}{D} \right) / D^2, \quad (54)$$

gdzie

$$K_r = (2\pi)^2 \left( 1 - \frac{s_0 R A}{c v^2 m} \sin \alpha (1 - \cos 2\alpha) \right), \quad (55)$$

$$K_t = (2\pi)^2 \left( \frac{s_0 R A}{c v^2 m} \sin \alpha \sin 2\alpha \right). \quad (56)$$

Z treści zadania mamy  $R = 1,50 \cdot 10^{11}$  m,  $v = 3 \cdot 10^4$  m/s,  $s_0 = 1400$  W/m<sup>2</sup>,  $m/A = 0,1$  kg/m<sup>2</sup>,  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s, zatem

$$\frac{s_0 R A}{c v^2 m} = 7,78 \cdot 10^{-3}, \quad (57)$$

$$(2\pi)^2 \frac{s_0 R A}{c v^2 m} = 0,307. \quad (58)$$

Warunki początkowe w nowych zmiennych mają postać

$$\begin{aligned} V_x(T=0) &= 0, & V_y(T=0) &= 2\pi, \\ X(T=0) &= 1, & Y(T=0) &= 0. \end{aligned}$$

Zauważmy, że dla  $s_0 = 0$  nasze równania mają rozwiązania w postaci ruchu po okręgu o promieniu 1:

$$\begin{aligned} X(T) &= \cos(2\pi T), \\ Y(T) &= \sin(2\pi T), \\ V_x(T) &= -2\pi \sin(2\pi T), \\ V_y(T) &= 2\pi \cos(2\pi T). \end{aligned}$$

Zapiszmy równania różnicowe odpowiadające równaniom ruchu

$$\frac{\Delta V_x}{\Delta T} = \left( -K_r \frac{X}{D} + K_t \frac{Y}{D} \right) / D^2, \quad (59)$$

$$\frac{\Delta V_y}{\Delta T} = \left( -K_r \frac{Y}{D} - K_t \frac{X}{D} \right) / D^2, \quad (60)$$

$$\frac{\Delta X}{\Delta T} = V_x, \quad (61)$$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta T} = V_y. \quad (62)$$

Dwa z powyższych równań otrzymaliśmy, dokonując zamiany  $A_x \rightarrow \frac{\Delta V_x}{\Delta T}$ ,  $A_y \rightarrow \frac{\Delta V_y}{\Delta T}$  w równaniach (53) i (54), kolejne dwa biorą się wprost z definicji prędkości.  $\Delta$  odpowiada różnicy między wartością w chwili  $T_n$  oraz w chwili  $T_{n+1} = T_n + \Delta T$ .

Spośród bardzo wielu algorytmów pozwalających na numeryczne rozwiązanie rozważanego zagadnienia, w niniejszym rozwiązaniu wybraliśmy jeden z najprostszych: krok dzielimy na dwie części: najpierw wyznaczamy położenie w chwili  $t_n + \Delta t/2$ , w tym położeniu obliczamy prawą stronę równań (59) i (60), na jej podstawie wyznaczmy prędkość w chwili  $t_n + \Delta t$ , a następnie położenie w chwili  $t_n + \Delta t$ . W efekcie dostajemy następujący układ równań rekurencyjnych, wiążący położenie ciała w chwili  $t_n$  z położeniem w chwili  $t_{n+1}$

$$X_{n+1/2} = X_n + V_{x,n} \cdot \Delta T/2, \quad (63)$$

$$Y_{n+1/2} = Y_n + V_{y,n} \cdot \Delta T/2, \quad (64)$$

$$D_{n+1/2} = \sqrt{(X_{n+1/2})^2 + (Y_{n+1/2})^2}, \quad (65)$$

$$f_r = K_r / (D_{n+1/2})^3, \quad (66)$$

$$f_t = K_t / (D_{n+1/2})^3, \quad (67)$$

$$V_{x,n+1} = V_{x,n} + (-f_r \cdot X + f_t \cdot Y) \cdot \Delta T, \quad (68)$$

$$V_{y,n+1} = V_{y,n} + (-f_r \cdot Y - f_t \cdot X) \cdot \Delta T, \quad (69)$$

$$X_{n+1} = X_{n+1/2} + V_{x,n+1} \cdot \Delta T/2, \quad (70)$$

$$Y_{n+1} = Y_{n+1/2} + V_{y,n+1} \cdot \Delta T/2, \quad (71)$$

$$T_{n+1} = T_n + \Delta T. \quad (72)$$

Do równań (63–72) musimy dopisać równania określające początkowe wartości położenia i prędkości. Zgodnie z treścią zadania są to równania (przyjmujemy, że numerację rozpoczynamy od 1)

$$X_1 = 1, \quad Y_1 = 0, \quad (73)$$

$$V_{x,1} = 0, \quad V_{y,1} = V_0, \quad (74)$$

gdzie  $V_0 = 2\pi$ .

Algorytm odpowiadający powyższym równaniom nie jest najbardziej efektywny, jednak biorąc pod uwagę, że moc współczesnych komputerów pozwala na przyjęcie bardzo małego kroku czasowego, jest wystarczający – jak się przekonamy – do rozwiązania naszego zadania.

### Opis programów komputerowych

Powyższe równania rekurencyjne łatwo jest przekształcić na program komputerowy, który w pętli oblicza kolejne wartości. Odpowiada on następującemu pseudokodowi

$$X = X + V_x * dT/2 \quad (75)$$

$$Y = Y + V_y * dT/2 \quad (76)$$

$$D = \text{sqrt}(X*X + Y*Y) \quad (77)$$

$$D3 = D*D*D \quad (78)$$

$$f_r = K_r/D3 \quad (79)$$

$$f_t = K_t/D3 \quad (80)$$

$$V_x = V_x + (-f_r*X + f_t*Y)* dT \quad (81)$$

$$V_y = V_y + (-f_r*Y - f_t*X)* dT \quad (82)$$

$$X = X + V_x * dT/2 \quad (83)$$

$$Y = Y + V_y * dT/2 \quad (84)$$

$$T = T + dT \quad (85)$$

Wprowadziliśmy dodatkową zmienną pomocniczą D3, aby zmniejszyć liczbę wykonywanych operacji.

Powyższe polecenia należy wykonywać w pętli. Należy do nich dodać przypisanie początkowych wartości zmiennym  $X$ ,  $Y$ ,  $V_x$  oraz  $V_y$ , zapisywanie wartości  $X$  i  $Y$  obliczonych w danym kroku (lub rysowanie) oraz warunek końca iteracji (chwila  $T = 10$  lub osiągnięcie powierzchni Słońca, czyli odległość  $D = R_s$ ). Ponieważ w wyniku działania żagla sonda zbliża się do Słońca, a jej prędkość może wzrastać, zastosujemy zmienny krok czasowy równy

$$dT = D/V/n, \quad (86)$$

gdzie  $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ , a  $n$  jest ustaloną liczbą całkowitą.

Przy założeniu, że sonda porusza się po okręgu o zmiennym promieniu (czyli po spirali), wzór (86) powoduje, że w kolejnych odstępach czasu sonda przebywa taki sam ułamek obwodu tego okręgu.

W sumie niemal pełny pseudokod ma postać następującą:

```

Kr = (4*PI*PI)*(1 - S*SIN(a))*(1 - COS(2*a) )
Kt = (4*PI*PI)*S*SIN(a)*SIN(2*a)
X = 1, Y = 0, Vx = 0, Vy = V0
POWTARZAJ AŻ (T >= 10 LUB D <= Rs)
  V = SQRT(Vx*Vx + Vy*Vy)
  dT= D/V/n
  polecenia (75-85)
KONIEC POWTARZANIA

```

Powyżej zmienna  $a$  jest kątem ustawienia żagla,  $S$  – stałą daną wzorem (57).

Program w C++ jest udostępniony na stronie stronie KGOF (<https://www.kgof.edu.pl/archiwum/74/of74-1-t4.zip>). Współrzędne  $X$  oraz  $Y$  położenia sondy są zapisywane do plików tekstowych (jeden plik na jeden zestaw parametrów). Aby ułatwić porównywanie wyników i ograniczyć liczbę zapisywanych danych, nie wszystkie obliczone położenia były zapisywane, a jedynie co 10-te lub co 50-te.

Wykresy zostały uzyskane na podstawie zapisanych danych przy użyciu programu gnuplot.

### Sprawdzenie poprawności oraz dokładności

Podstawowym sposobem sprawdzenia poprawności jest powtórzenie obliczeń dla różnych wartości kroku czasowego  $dT$ . W omawianym tu rozwiązaniu  $dT$  jest co prawda zmienną, jednak przyjmując różne wartości  $n$  (określone wzorem (86)), można ustalać różne wartości  $dT$  na danym etapie (w tym wartości początkowe). Rozważano  $n = 1000$  oraz  $n = 5000$  i stwierdzono, że otrzymane krzywe są wizualnie identyczne dla danego kąta ustawienia żagla  $\alpha$  (wykresy pokrywają się ze sobą).

### Wyniki oraz ich dyskusja

Wykresy toru ruchu sondy w rozważanych przypadkach są przedstawione na osobnych stronach (uwaga: w przypadkach  $\alpha = 45^\circ$  oraz  $\alpha = 60^\circ$  dla odległości od środka Słońca mniejszych od  $0,1 \cdot R$  na wykresie pojawiają się artefakty związane ze skończoną rozdzielczością oraz skończoną grubością linii; oglądając tę część wykresu na ekranie komputera warto jest ją powiększyć).

W przypadku  $\alpha = 30^\circ$  po czasie 10 lat sonda znajdzie się w odległości  $d = 0,510 \cdot R = 7,65 \cdot 10^7$  km od środka Słońca, czyli w odległości  $0,505 \cdot R = 7,58 \cdot 10^7$  km od powierzchni Słońca. Tor jest spiralą.

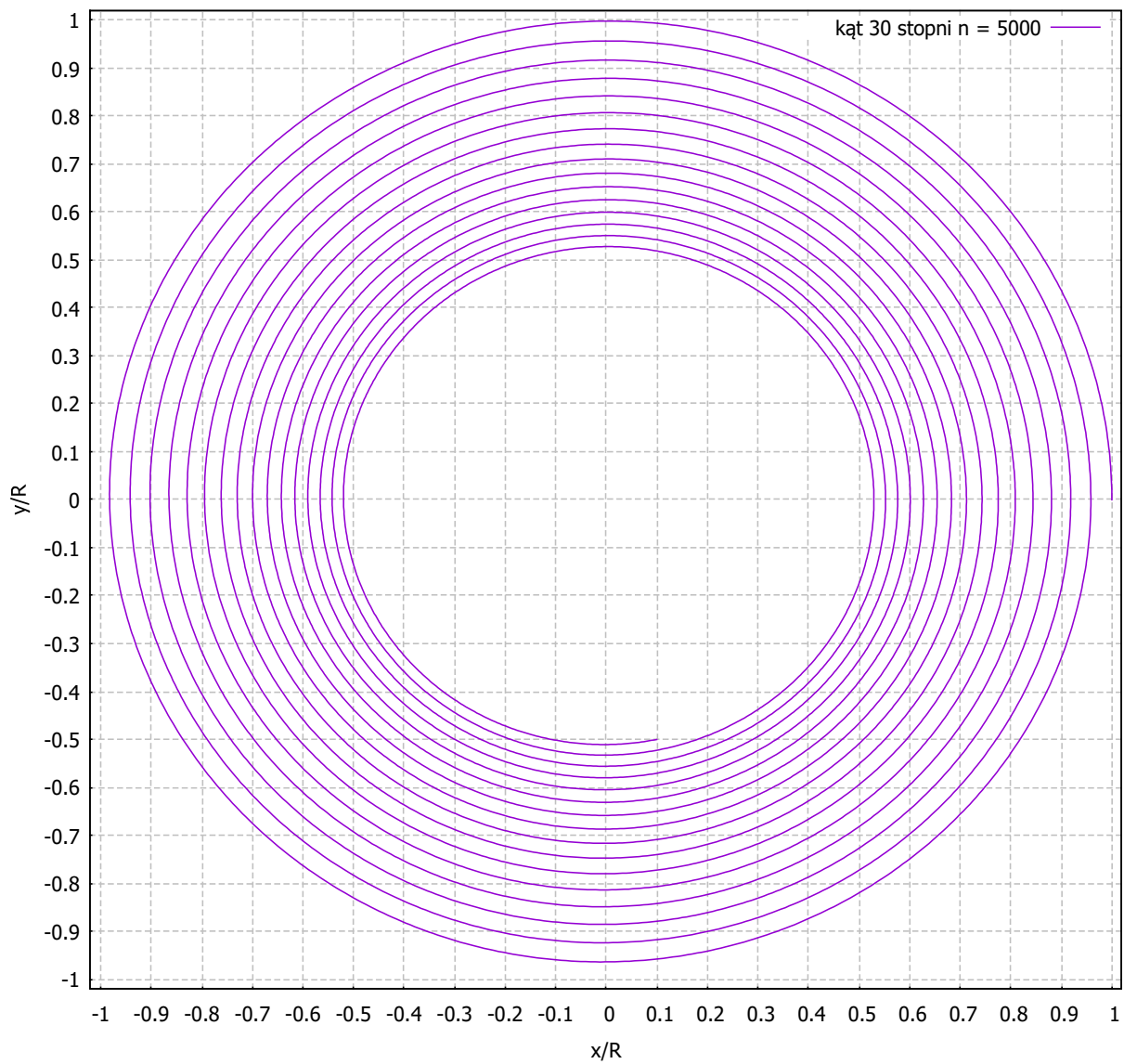
W przypadku  $\alpha = 45^\circ$  po czasie 9,70 lat sonda dotrze do powierzchni Słońca. W tej chwili wyznaczanie toru zostało przerwane. Tor jest spiralą, bardzo gęstą już dla odległości około  $0,05 \cdot R$ .

W przypadku  $\alpha = 60^\circ$  po czasie 9,19 lat sonda dotrze do powierzchni Słońca. W tej chwili wyznaczanie toru zostało przerwane. Tor jest spiralą, bardzo gęstą już dla odległości około  $0,05 \cdot R$ .

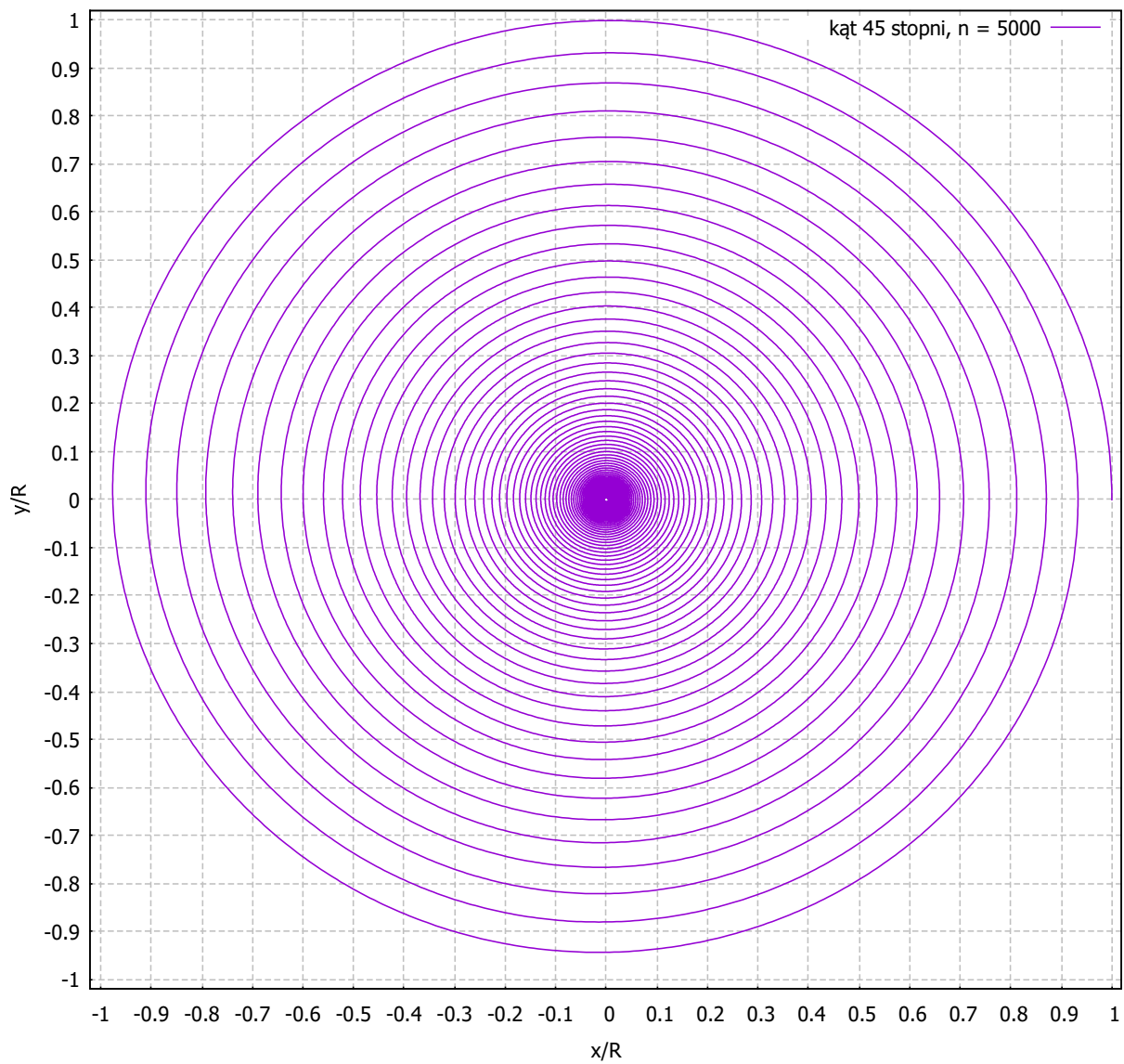
Uwaga:

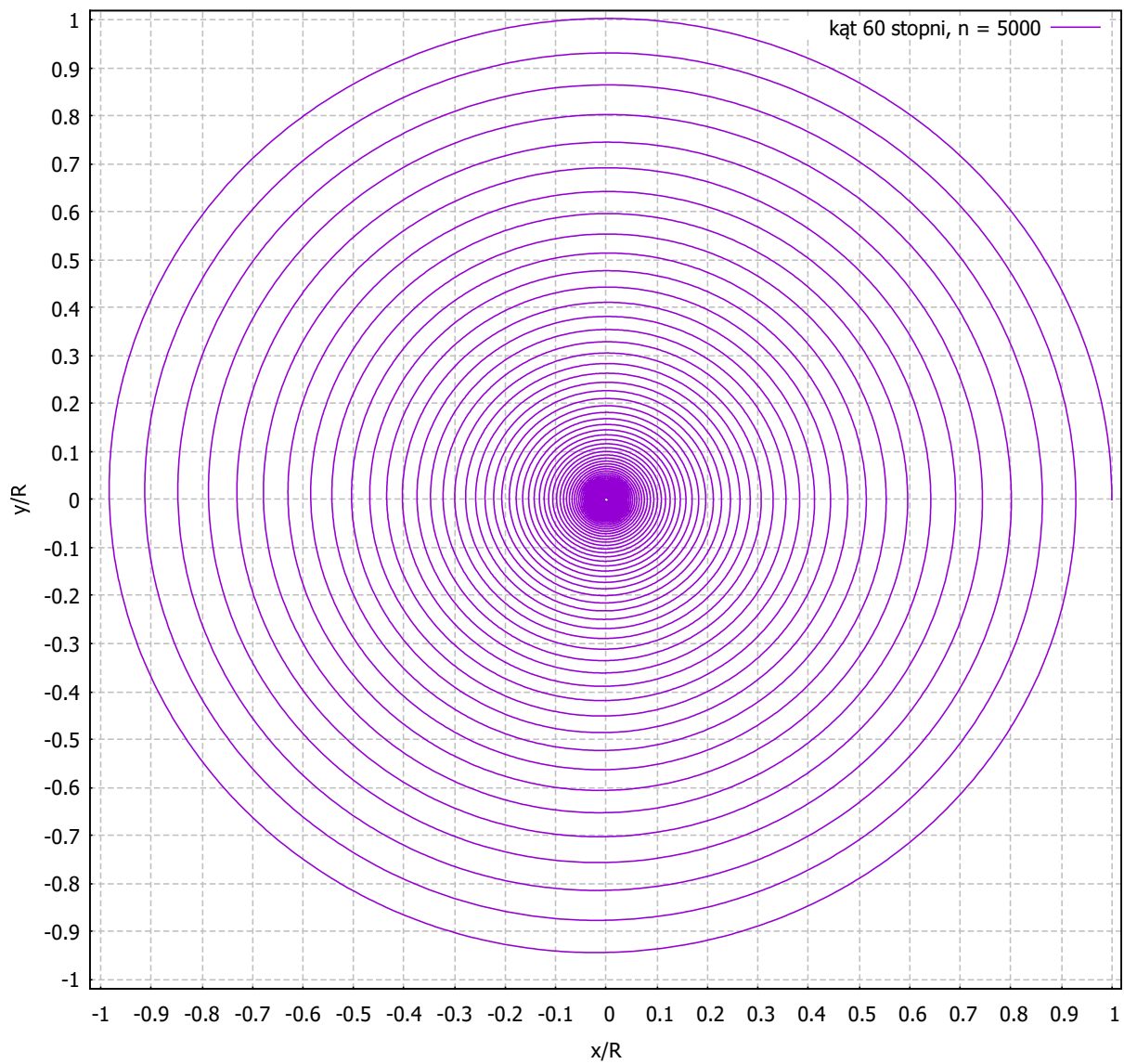
Nie jest wymagane przejście do zmiennych bezwymiarowych (w obliczeniach numerycznych jednostki muszą być pominięte, ale jeśli konsekwentnie stosowany jest wybrany układ jednostek, nie prowadzi to do błędu).





Rysunek 1: Wynik symulacji dla kąta  $\alpha = 30^\circ$  w zadaniu T4

Rysunek 2: Wynik symulacji dla kąta  $\alpha = 45^\circ$  w zadaniu T4



Rysunek 3: Wynik symulacji dla kąta  $\alpha = 60^\circ$  w zadaniu T4

## Rozwiązanie zadania D1

### Część teoretyczna

Naszym celem jest wyznaczenie zależności natężenia prądu płynącego przez diodę ( $I$ ) od napięcia przyłożonego do niej ( $U$ ). Różne wartości napięcia przykładanego do diody uzyskamy przez szeregowe łączenie różnych liczb baterii oraz diod elektroluminescencyjnych. Dla każdej kombinacji zmierzmy napięcie przyłożone do jednej z diod oraz natężenie prądu przez nią płynącego. Napięcie na diodzie będziemy mierzyć przy pomocy podłączonego do niej równolegle woltomierza natomiast natężenie prądu wyznaczymy z pomiaru napięcia na podłączonym szeregowo z tą diodą oporniku; woltomierz podłączymy równolegle do opornika.

Zarówno szeregowe jak i równoległe połączenia diod pozwalają wyznaczyć charakterystykę prądowo-napięciową diody. Najwięcej punktów pomiarowych można uzyskać kombinując oba te podejścia. W naszym rozwiązaniu wykorzystamy tylko połączenia szeregowe.

Łączymy diodę elektroluminescencyjną w szereg z opornikiem oraz źródłem napięcia (baterią lub zestawem baterii). Jeden z woltomierzy łączymy równolegle z jedną z diod, aby mierzyć napięcie  $U$  na tej diodzie. Drugi woltomierz łączymy równolegle z opornikiem, aby mierzyć napięcie na nim  $U_R$ . Wyznaczamy z niego, natężenie prądu  $I$  płynącego przez diodę, korzystając z prawa Ohma:

$$I = \frac{U_R}{R},$$

w naszym przypadku opór opornika wynosił  $R = 107 \Omega$ , przy czym znajomość dokładnej wartości oporu nie będzie potrzebna do rozwiązania zadania.

### Część doświadczalna

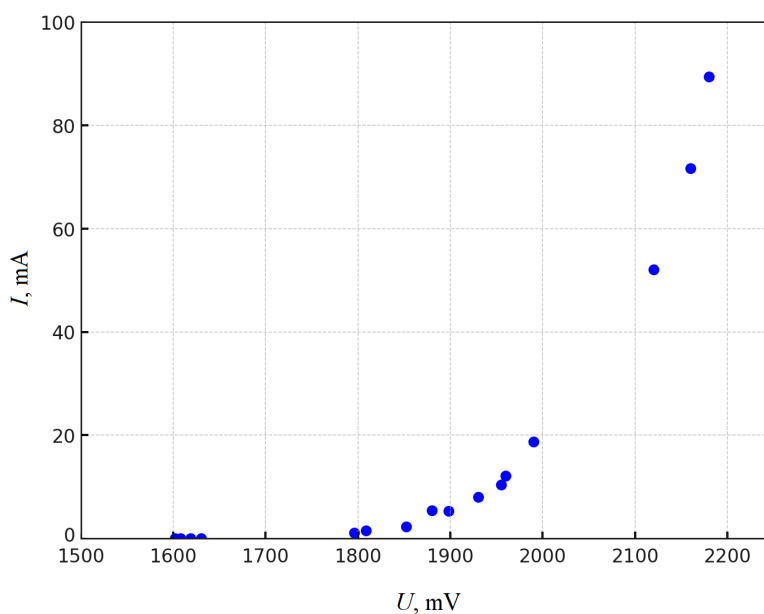
Aby uzyskać różne wartości napięcia na diodzie użyliśmy różnych liczb baterii oraz diod. Za każdym razem stosowaliśmy ten sam układ pomiarowy (opisany wyżej) aby wyznaczyć napięcie na badanej diodzie i natężenie prądu przez nią płynącego.

Zaczęliśmy pomiary używając jednej diody połączonej z jedną baterią. Dioda świeciła z czego można wnioskować, że płynął przez nią prąd. Zapisaliśmy napięcia zmierzone na diodzie i na oporniku. Następnie dodaliśmy kolejną diodę połączoną szeregowo z pierwszą diodą. Żadna z diod nie świeciła, z czego można wnioskować, że natężenie prądu płynącego przez diody jest bardzo małe, co potwierdza wskazanie woltomierza podłączonego do opornika. Zapisaliśmy zmierzone napięcia i nie dodawaliśmy więcej diod, ale dodaliśmy dodatkową baterię połączoną szeregowo z pierwszą baterią. Diody znów zaczęły świecić. Zanotowaliśmy napięcia i dodaliśmy kolejną diodę połączoną szeregowo z poprzednimi. Postępowaliśmy analogicznie aż do wyczerpania elementów dostępnych według treści zadania tzn. dodawaliśmy diody aż do momentu kiedy przestawały świecić i wówczas dodawaliśmy baterię tak aby z powrotem uzyskać świecenie. Uporządkowane wyniki pomiarów umieściliśmy w tabeli 1 a na rysunku 4 wykreśliliśmy zależność  $I(U)$ , gdzie natężenie prądu  $I$  jest na osi pionowej, a napięcie  $U$  na osi poziomej.

Skorzystamy teraz ze wskazówki i aby wyznaczyć parametr  $U_0$  będziemy analizować zależność logarytmu natężenia prądu płynącego przez diodę od przyłożonego do niej napięcia. Obliczając obustronnie logarytm naturalny równania Shockleya otrzymujemy:

$U$ (mV)	$U_R$ (mV)	$I$ (mA)
1602	2	0,02
1608	2	0,02
1619	4	0,04
1630	4	0,04
1796	113	1,06
1809	158	1,48
1852	250	2,34
1880	580	5,42
1898	570	5,33
1930	860	8,04
1955	1111	10,38
1960	1300	12,15
1990	2000	18,69
2120	5570	52,06
2160	7670	71,68
2180	9570	89,44

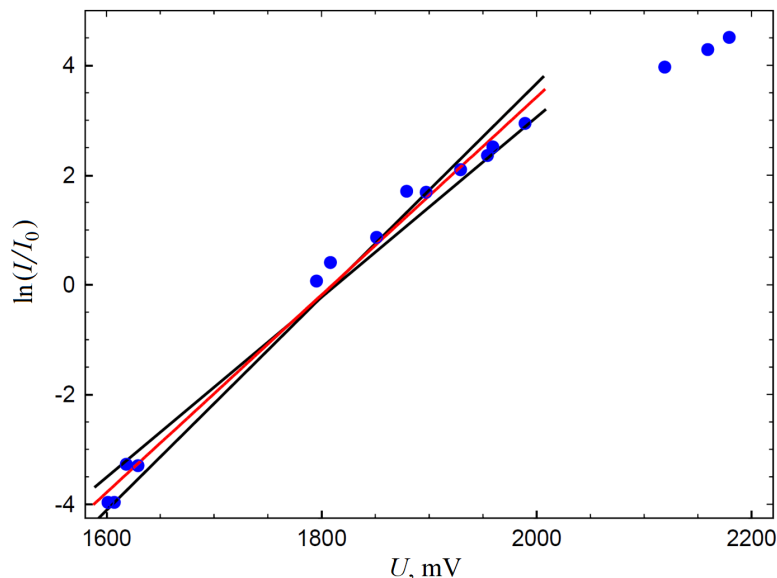
Tabela 1: Wyniki pomiarów napięć na diodzie  $U$  i oporniku  $U_R$  oraz wartości wyznaczonych natężeń prądu płynącego przez opornik i diodę  $I$ .



Rysunek 4: Wykres zależności charakterystyki prądowo-napięciowej diody elektroluminescencyjnej. Różne wartości napięć przyłożonych do diody uzyskano przez szeregowe połączenia różnych liczb diod oraz baterii.

$$\ln\left(\frac{I}{I_S} + 1\right) = \frac{U}{U_0}. \quad (87)$$

Jeżeli  $\frac{I}{I_S} \gg 1$  to równanie (87) można przybliżyć przez



Rysunek 5: Wyniki pomiaru charakterystyki prądowo-napięciowej diody elektroluminescencyjnej uzyskanych przez szeregowe połączenia różnych liczb diod oraz baterii. Na osi pionowej przedstawiono  $\ln(I/I_0)$ . Na osi poziomej przedstawiono  $U$ . Na czerwono zaznaczono prostą dopasowaną graficznie do punktów doświadczalnych odpowiadających wartościom natężenia prądu poniżej 50 mA (napięcie poniżej 2 V). W celu oszacowania niepewności wyznaczonego współczynnika kierunkowego prostej wykreślono proste o minimalnym i maksymalnym nachyleniu, które są spójne z danymi doświadczalnymi (dokładne nachylenie tych prostych jest dość arbitralne). Proste te zaznaczono na czarno.

$$\ln\left(\frac{I}{I_S}\right) = \frac{U}{U_0}. \quad (88)$$

Wtedy w celu wyznaczenia  $U_0$  należałoby wykreślić zależność  $\ln(I/I_S)$  od  $U$  i dopasować do tej zależności prostą; współczynnik kierunkowy tej prostej będzie równy  $\frac{1}{U_0}$ . Jeśli punkty doświadczalne rzeczywiście ułożą się na prostej oznaczać to będzie, że nasze założenie, że  $\frac{I}{I_S} \gg 1$  jest uzasadnione. Niestety nie znamy wartości  $I_S$ , dlatego wprowadzamy pomocniczą wartość  $I_0$ , która pozwala nam zapisać równanie (88) jako:

$$\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) + \ln\left(\frac{I_0}{I_S}\right) = \frac{U}{U_0}, \quad (89)$$

gdzie drugi składnik sumy po lewej stronie to pewna nieznaną stałą niewpływającą na nachylenie prostej. Możemy więc arbitralnie przyjąć np.  $I_0 = 1$  mA i dla takiej wartości wykreślić zależność  $\ln(I/I_0)$  od  $U$ . Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić również dla zależności od oporu  $R$ , którego wartość przyjęliśmy jako 107  $\Omega$ . Ta wartość również nie wpływa na nachylenie dopasowywanej prostej.

Widzimy, że dla natężeń prądów, które nie są zbyt duże, punkty doświadczalne rzeczywiście układają się na prostej (patrz 5). Gdyby nasze założenie  $\frac{I}{I_S} \gg 1$  nie było słuszne to zaobserwowalibyśmy odstępstwo od prostej, największe dla najmniejszych wartości  $I$ . Widzimy jednak odstępstwo jedynie dla dużych wartości  $I$  co może być spowodowane grzaniem diody przy przepływie prądu o natężeniu powyżej 50 mA. W ograniczonym zakresie napięć (do 2 V) dopasowujemy więc do punktów doświadczalnych prostą. Nachylenie tej prostej jest równe  $\frac{1}{U_0}$ , co pozwala

wyznaczyć parametr  $U_0$ . Parametr  $U_0$  wyznaczony na podstawie dopasowanej prostej wynosi  $(55,5 \pm 5,0)$  mV. Wyzaczyliśmy go wraz z niepewnością przez graficzne dopasowania prostej.

## Rozwiązanie zadania D2

### Część teoretyczna

Będziemy wykorzystywać fakt, że dla pewnego kąta padania (zwanego kątem Brewstera) tylko światło spolaryzowane prostopadle do płaszczyzny padania ulega odbiciu. W konsekwencji, jeśli oświetlimy granicę ośrodków pod kątem Brewstera światłem spolaryzowanym równoległe do płaszczyzny padania, odbicie nie nastąpi. Kąt Brewstera  $\alpha_B$  zależy od współczynników załamania ośrodków, na granicy których zachodzi załamanie i odbicie w następujący sposób:

$$\operatorname{tg} \alpha_B = \frac{n_2}{n_1}, \quad (90)$$

gdzie  $n_1$  jest współczynnikiem załamania światła ośrodka, z którego promień światła przechodzi do ośrodka o współczynniku załamania światła  $n_2$ . W naszym przypadku  $n_1$  jest współczynnikiem załamania światła dla powietrza, zakładamy  $n_1 = 1$ , natomiast  $n_2 = n$  jest szukany współczynnikiem załamania światła dla szkła.

Wygodnie jest wykorzystać ekran komputera jako źródło światła, ponieważ zwykle takie ekrany emitują światło spolaryzowane liniowo. Chcąc przygotować światło padające na granicę powietrze-szkło pod zadany kąt wyświetlimy na ekranie komputera biały pasek na czarnym tle. Orientację wyświetlanego paska dobierzemy tak, aby był prostopadły do płaszczyzny padania. Będziemy obserwować odbicie światła emitowanego przez monitor od szklanej szybki. Oddalając i przybliżając szybki względem ekranu będziemy szukać pozycji odpowiadającej minimalnej wartości natężenia światła odbitego.

Znalezione minimum powinno odpowiadać kątowi Brewstera  $\alpha_B$ . Znając wartość tangensa kąta Brewstera będziemy mogli wyznaczyć współczynnik załamania światła dla szkła korzystając ze wzoru:

$$n = \operatorname{tg} \alpha_B. \quad (91)$$

### Część doświadczalna

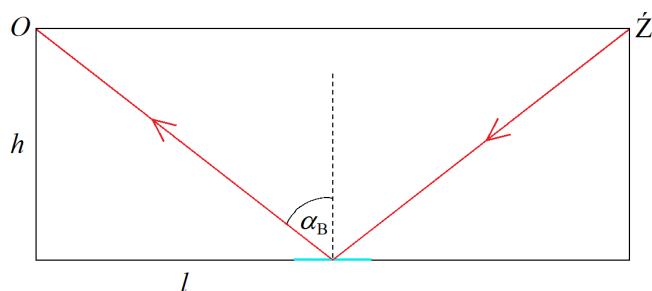
Aby dobrze widzieć słabe światło odbite od szybki potrzebujemy dość ciemnego pomieszczenia. Ciemne zasłony powinny być wystarczające. W naszej realizacji doświadczenia użyliśmy ekranu komputerowego (iiyama ProLite XUB2790HS).

Najpierw przy pomocy okularów polaryzacyjnych sprawdzamy czy nasz ekran emituje światło spolaryzowane liniowo. Obserwujemy światło emitowane z ekranu przechodzące przez okulary, jednocześnie obracając okulary. Jeśli w ten sposób udaje nam znacząco zminimalizować natężenie przechodzącego światła (tak, że prawie nie widzimy światła przechodzącego przez okulary), oznacza to, że światło emitowane przez ekran jest spolaryzowane liniowo.

Aby znaleźć orientację polaryzacji światła emitowanego przez ekran komputera, wykorzystujemy zjawisko polaryzacji przez odbicie pod kątem Brewstera opisane wyżej. Sprawdzamy czy dla poziomej orientacji ekranu (dłuższy bok ekranu ustawiony poziomo) i szybki położonej poziomo na biurku uda nam się pozbyć odbicia. W przypadku użytego ekranu tak się stało. W przypadku innych ekranów konieczne mogłoby być obracanie ich i sprawdzanie kolejnych orientacji.

Tangens kąta wyznaczymy jako stosunek odległości w poziomie punktu obserwacji od środka





Rysunek 6: Układ pomiarowy służący do wyznaczania współczynnika załamania światła szkła przez pomiar tangensa kąta Brewstera ( $\alpha_B$ ).  $\dot{Z}$  – źródło światła,  $O$  – punkt obserwacji,  $h$  wysokość punktu obserwacji względem płaszczyzny na której leży płytka szklana,  $l$  odległość w poziomie punktu obserwacji od punktu na płycie szklanej od którego następuje odbicie

szybki  $l$  do wysokości punktu obserwacji względem szybki  $h$  (patrz rysunek 6):

$$\operatorname{tg} \alpha_B = \frac{l}{h} \quad (92)$$

Aby zwiększyć dokładność właściwych pomiarów kąta Brewstera przeszliśmy do większych odległości. Nasz ekran ten emitował światło spolaryzowane pionowo, dlatego szybkę ułożyliśmy poziomo (prostopadle do ekranu). Płaszczyzna odbicia była pionowa (prostopadła zarówno do szybki jak i do ekranu).

Wysokość punktu obserwacji  $h$  była w naszym doświadczeniu ustalona. Zmienialiśmy wartość  $l$  oddalając i przybliżając szybkę oraz punkt obserwacji względem ekranu i szukaliśmy pozycji odpowiadającej minimalnej wartości natężenia światła odbitego.

Tabela 2 zawiera zmierzone odległości  $l$  odpowiadające minimum natężenia światła odbitego, wysokość  $h$  oraz  $\operatorname{tg} \alpha_B$ .

$l$ (m)	$h$ (m)	$\operatorname{tg} \alpha_B$
1,86	1,22	1,52
1,88	1,22	1,54
1,88	1,22	1,54
1,90	1,22	1,56

Tabela 2: Zmierzone odległości  $l$  odpowiadające minimum odbicia, wysokość  $h$  punktu obserwacji oraz  $\operatorname{tg} \alpha_B$ .

Znalezione minimum powinno odpowiadać kątowi Brewstera  $\alpha_B$ . Znając wartość kąta Brewstera możemy wyznaczyć współczynnik załamania światła dla szkła korzystając ze wzoru 92.

Na podstawie pomiarów tangensa kąta padania odpowiadającego minimalnemu natężeniu światła odbitego otrzymaliśmy następującą wartość współczynnika załamania szkła  $n = 1,54 \pm 0,02$ . Niepewność wyznaczyliśmy biorąc pod uwagę skrajne wartości wyniku. Głównym przyczynkiem do niepewności było niedokładne określenie jaka odległość  $l$  odpowiada minimum natężenia światła odbitego.

### Rozwiązanie zadania D3

## Część teoretyczna

Będziemy szukać podstawowej częstotliwości rezonansowej rury otwartej z obu stron. W naszym przypadku rura odkurzacza składała się z dwóch ciasno dopasowanych rur, które można w siebie wsuwać i w ten sposób zmieniać długość rezonatora. Będziemy wzbudzać drgania powietrza w rurze za pomocą głośnika emitującego ustaloną częstotliwość i szukać długości rury odpowiadającej rezonansowi.

Dla częstotliwości dźwięku i długości rury odpowiadającym rezonansowi w rurze powstaje stojąca fala dźwiękowa mająca węzły ciśnienia na końcach rury (ustalone ciśnienie atmosferyczne). Wynika stąd, że największa możliwa długość fali dźwiękowej w powietrzu dla rury o długości  $L$  otwartej z obu stron wynosi:

$$\lambda_0 = 2L. \quad (93)$$

Aby wyznaczyć prędkość dźwięku w powietrzu, skorzystamy ze wzoru

$$c = \lambda f, \quad (94)$$

w którym  $c$  oznacza prędkość fali,  $\lambda$  jej długość a  $f$  częstotliwość.

Znając częstotliwość dźwięku  $f_0$  odpowiadającą podstawowej częstotliwości rezonansowej oraz długość rury otwartej z obu stron  $L$ , możemy wyznaczyć prędkość dźwięku w powietrzu ze wzoru:

$$c = \lambda_0 f_0 = 2L f_0 \quad (95)$$

Kiedy spełniamy warunki rezonansu amplituda dźwięku jest maksymalna. Możemy więc znaleźć rezonans używając naszego słuchu i dobierając długość rury i częstotliwość dźwięku tak aby uzyskać największą głośność.

Możemy maksymalizować głośność na dwa sposoby: zmieniając długość rury przy ustalonej częstotliwości dźwięku albo zmieniając częstotliwość dźwięku przy ustalonej długości rury. Te dwie metody są w zasadzie równoważne, ale zależnie od szczegółów realizacji doświadczalnej, takich jak np. precyzja ustawiania długości rury albo częstotliwości emitowanego dźwięku, mogą dawać różne niepewności uzyskanego wyniku.

Stosując obie metody będziemy zbierać serie danych dla różnych częstotliwości dźwięku i długości rury a następnie przekształcimy je tak aby uzyskać zależność liniową z prędkością dźwięku  $c$  jako współczynnikiem kierunkowym. Będziemy korzystać z następującej postaci zależności (95):

$$f_0 = \frac{c}{2L} \quad (96)$$

## Część doświadczalna

### Wariant A: Optymalizacja długości rury dla ustalonej częstotliwości dźwięku

Podłączywszy smartfon do wzmacniacza z głośnikiem, przykładamy rurę od odkurzacza do głośnika. Stabilnie opieramy jeden koniec rury przy wyjściu głośnika a drugi umieszczamy blisko ucha. Dostosowujemy głośność dźwięku tak, aby była dla nas komfortowa. Nasłuchując zmieniamy długość rury tak aby znaleźć długość, dla której głośność dźwięku, który słyszymy z rury jest największa. Mierzmy długość rury, która odpowiada maksymalnej głośności. Powtarzamy tę samą procedurę dla kolejnych częstotliwości dźwięku. Wyniki pomiarów przedstawiliśmy w tabeli 3 poniżej.

$f$ (Hz)	$L$ (m)
220	0,75
230	0,72
240	0,69
250	0,66
260	0,64
270	0,61
280	0,58
290	0,56
300	0,56
310	0,52

Tabela 3: Tabela pomiarów dla częstotliwości  $f$  i długości rury  $L$ . W wariantcie A rozwiązania szukano długości rury odpowiadającej rezonansowi dla zadanej częstotliwości dźwięku.

Rysunek 7 przedstawia wyniki doświadczalne wraz z dopasowaną prostą, której nachylenie odpowiada prędkości dźwięku. Uzyskana wartość prędkości dźwięku wynosi  $c = (311 \pm 20)$  m/s, a wyraz wolny dopasowania to  $b = (14 \pm 17)$  Hz. Wyniki oraz ich niepewności uzyskano przez graficzne dopasowanie prostych do danych doświadczalnych. Głównym przyczynkiem do niepewności pomiarowej było subiektywne określanie położenia rezonansu.

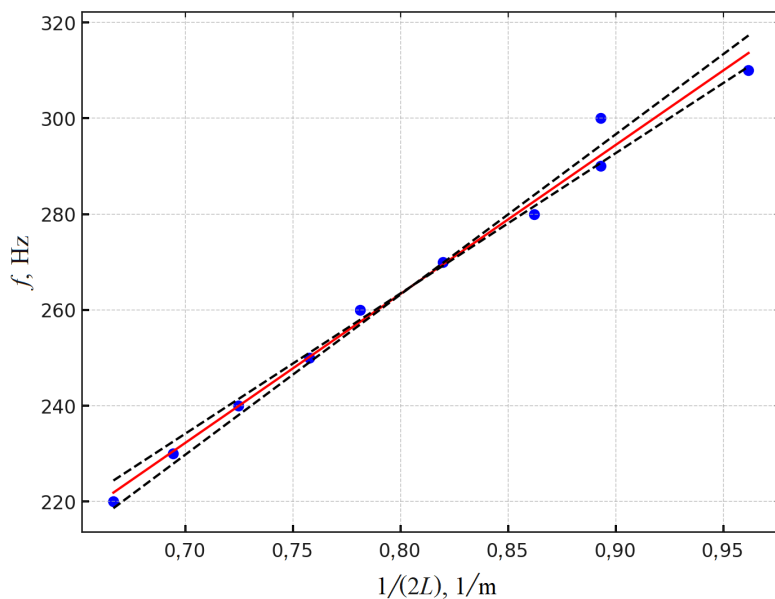
### Wariant B: Optymalizacja częstotliwości dźwięku dla ustalonej długości rury

W drugim sposobie rozwiązania zamiast ustalania kolejnych wartości częstotliwości i szukania dla nich rezonansowych długości rury zmieniając jej długość, ustalamy długość rury i szukamy częstotliwości rezonansowej dźwięku. Wyniki pomiarów przedstawiono w tabeli 4.

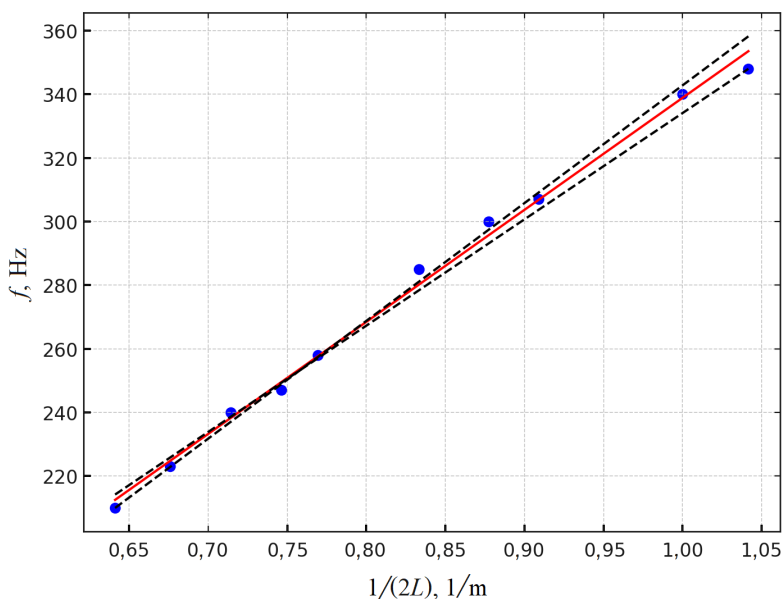
$f$ (Hz)	$L$ (m)
210	0,78
223	0,74
240	0,70
247	0,67
258	0,65
285	0,60
300	0,57
307	0,55
340	0,50
348	0,48

Tabela 4: Tabela pomiarów dla częstotliwości rezonansowych  $f$  znalezionych dla długości rury  $L$ . W wariantcie B rozwiązania szukano częstotliwości dźwięku odpowiadającej rezonansowi dla zadanej długości rury.

Czerwona linia prosta to linia dopasowania uzyskana na podstawie graficznego dopasowania prostych, której nachylenie odpowiada prędkości dźwięku. Uzyskana wartość prędkości dźwięku wynosi  $c = (352 \pm 18)$  m/s, a wyraz wolny dopasowania to  $b = (-13 \pm 14)$  Hz. Wyniki oraz ich niepewności uzyskano przez graficzne dopasowanie prostych do danych doświadczalnych. Głównym przyczynkiem do niepewności pomiarowej było subiektywne określanie położenia rezonansu.



Rysunek 7: Wykres przedstawia zależność częstotliwości rezonansowej  $f$  (w Hz) od odwrotności podwójnej długości  $\frac{1}{2L}$  (w  $\text{m}^{-1}$ ) dla otwartej rury rezonansowej. Prędkość dźwięku można odczytać z nachylenia dopasowanej prostej. W celu oszacowania niepewności wyznaczonego współczynnika kierunkowego prostej wykreślono proste o minimalnym i maksymalnym nachyleniu, które są spójne z danymi doświadczalnymi (dokładne nachylenie tych prostych jest dość arbitralne). Proste te zaznaczono na czarno. W wariancie A rozwiązania szukano długości rury odpowiadającej rezonansowi dla zadanej częstotliwości dźwięku.



Rysunek 8: Wykres przedstawia zależność częstotliwości rezonansowej  $f$  (w Hz) od odwrotności podwójnej długości  $\frac{1}{2L}$  (w  $\text{m}^{-1}$ ) dla otwartej rury rezonansowej. Na osi poziomej znajdują się wartości  $\frac{1}{2L}$ , które są odwrotnościami podwójnych długości rur, co pozwala na bezpośrednie odczytanie prędkości dźwięku z nachylenia dopasowanej prostej. W celu oszacowania niepewności wyznaczonego współczynnika kierunkowego prostej wykreślono proste o minimalnym i maksymalnym nachyleniu, które są spójne z danymi doświadczalnymi (dokładne nachylenie tych prostych jest dość arbitralne). Proste te zaznaczono na czarno. W wariancie B rozwiązania szukano częstotliwości dźwięku odpowiadającej rezonansowi dla zadanej długości rury.