



I OLIMPIADA FIZYCZNA

(1951/1952)

ZAWODY III STOPNIA

CZEŚĆ TEORETYCZNA

Zadanie teoretyczne – T3

Nazwa – Wirujący stalowy pręt – szybkość obrotowa przy jego rozerwaniu i ruch części.

Źródła – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej

- *Olimpiada Fizyczna. Zadania z zawodów III stopnia. Fizyka i Chemia* nr 4, 1952, s. 41–46
- Stefan Czarnecki: *Olimpiady Fizyczne I–IV*. PZWS, Warszawa 1956, s. 92–95
- T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl.

Jednorodny pręt stalowy o długości $2a = 1$ m wiruje dookoła osi pionowej przechodzącej przez jego środek i prostopadłej do jego długości. Wiedząc, że stal ulega zerwaniu przy naprężeniu $\sigma = 1,95 \cdot 10^{10}$ dyn/cm², znając jej gęstość $\delta = 7,8$ g/cm³, wyznaczyć liczbę n obrotów na sekundę, przy której pręt ulegnie zerwaniu. Na jakie części rozerwie się pręt i jaki jest ich dalszy ruch? ¹

¹Występujące w zadaniu jednostki i oznaczenia wielkości fizycznych, w części, nie są stosowane (zostały zastąpione przez układ jednostek SI, który był w Polsce wprowadzany od 1966 r.), jednostki pochodzą z układu jednostek CGS, w którym jednostkami podstawowymi są: centymetr – (ozn.) cm, gram – (ozn.) g, sekunda – (ozn.) sek. Z tych trzech jednostek są zbudowane pozostałe jednostki – pochodne, m.in.: dyna (ozn. dyn) – jednostka siły: 1 dyn = 1 g·cm/sek² (w układzie SI: 1 N = 1 kg·m/s² = 10⁵ dyn); 1 dyn/cm² – jednostka naprężenia, ciśnienia (w układzie SI: 1 Pa = 1 N/m² = 10 dyn/cm²); 1 g/cm³ (= 1000 kg/m³) – jednostka gęstości (masy), stosowane obecnie symbole gęstości to ρ , d .

W treści zadania i jego rozwiązaniu zmieniono pierwotne oznaczenie naprężenia ω na ogólnie stosowane ozn. σ , gdyż występuje kolizja oznaczeń z oznaczeniem prędkości kątowej (ω). Można przypuszczać, że przyjęte w oryginale ozn. „ ω ” jest związane z literą „w” od wytrzymałość.

Liczba n obrotów na sekundę jest określeniem technicznym, tzw. szybkość obrotowa, w fizyce mamy prędkość kątową, ozn. ω z jednostką 1/s (Przyp. red.)

Rozwiązanie zadania T3 – I OF, III stopień, część teoretyczna

Siła odśrodkowa działa wzdłuż pręta na każdy element jego masy. Wszystkie siły działające na elementy jednego ramienia współdziałają ze sobą, a ich wypadkowa osiąga największą wartość przy osi obrotu pręta. To samo dotyczy sił o zwrocie przeciwnym działających na elementy drugiego ramienia. Stąd wniosek, iż pręt ulegnie zerwaniu wzdłuż przekroju poprzecznego przechodzącego przez oś obrotu.

Dla wyznaczenia wielkości siły rozrywającej podzielmy pręt na małe, jednakowe elementy za pomocą przekrojów płaszczyznami prostopadłymi do jego długości. Niechaj masa jednego elementu wynosi Δm i niechaj będzie on odległy od osi obrotu o r . Siła odśrodkowa działająca na ten element wyraża się, jak wiemy:

$$\Delta F_0 = \frac{\Delta m v^2}{r},$$

lub

$$\Delta F_0 = \Delta m \omega^2 r,$$

ponieważ jednak

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n,$$

więc możemy napisać

$$\Delta F_0 = \Delta m \cdot 4\pi^2 n^2 r.$$

Należy teraz znaleźć wartość wypadkowej sił działających na wszystkie elementy jednego ramienia. Ponieważ ΔF_0 jest siłą wprost proporcjonalną do r , więc wszystkie siły można zastąpić ich wartością średnią:

$$\Delta m \cdot 4\pi^2 n^2 \cdot \frac{a}{2},$$

gdyż r zmienia się od 0 do a . Suma tych sił średnich wynosi oczywiście:

$$F_0 = m \cdot 4\pi^2 n^2 \cdot \frac{a}{2} = 2\pi^2 m a n^2, \quad (1)$$

gdzie m oznacza masę połowy pręta. Widać z tego, że zjawisko zachodzi tak, jak gdyby masa każdego ramienia była skoncentrowana w jego środku (środek masy).

Masę m możemy obliczyć znając pole przekroju pręta S , długość ramienia i gęstość stali δ :

$$m = S a \delta.$$

Podstawiając m do (1) mamy:

$$F = 2\pi^2 \cdot a^2 n^2 \delta S, \quad (2)$$

Napężenie w osiowym przekroju pręta wynosi:

$$\frac{F}{S} = \sigma.$$

Pręt ulegnie więc zerwaniu, gdy częstość obrotów n osiągnie wartość:

$$n = \frac{1}{\pi a} \sqrt{\frac{\sigma}{2\delta}}, \quad (3)$$

czyli, gdy

$$n = \frac{1}{\pi \cdot 50 \text{ cm}} \sqrt{\frac{1,95 \cdot 10^{10} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}}{2 \cdot 7,8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}} \approx 225 \text{ sek}^{-1}.$$

Po rozerwaniu środki obu połówek pręta poruszać się będą po stycznych do koła, będącego poprzecznie ich torem. Prędkość tego ruchu postępowego wyniesie

$$\begin{aligned} v &= \omega \frac{a}{2} = 2\pi n \frac{a}{2} = an\pi = \\ &= 50 \text{ cm} \cdot 225 \text{ sek}^{-1} \cdot 3,14 = 35\,325 \frac{\text{cm}}{\text{sek}} = \\ &= 353,25 \frac{\text{m}}{\text{sek}}. \end{aligned}$$

Niezależnie od ruchu postępowego każda z oderwanych części będzie wykonywała ruch obrotowy dokoła swego środka masy w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny, w której obracał się pręt przed zerwaniem. Prędkości kątowe obu połówek pręta są równe prędkości kątowej pręta przed zerwaniem. Dzieje się tak dlatego, że stosunek prędkości liniowych punktów skrajnych do odległości od osi obrotu dla obu części i całego pręta jest jednakowy. Można by się o tym przekonać korzystając z prawa zachowania energii. Energia kinetyczna ruchu obrotowego całego wirującego pręta przed zerwaniem musi być równa sumie energii kinetycznych ruchu obrotowego i postępowego obu połówek po rozerwaniu.

Jeśli zjawisko odbywa się w polu grawitacyjnym ziemskim, to wówczas środki mas obu połówek pręta, oprócz ruchu postępowego w kierunku stycznej, spadają pionowo z przyspieszeniem g . Tory ich środków mas będą oczywiście parabolami.

Dwóch spomiędzy zawodników dla znalezienia wartości wypadkowej siły odśrodkowej działającej na jedno ramię pręta posłużyło się matematyką wyższą.²

„... Weźmy pod uwagę element pręta długości dr (rys. 1) – odległy od osi obrotu o r . Masa tego elementu wynosi $dm = \delta S dr$. Siła odśrodkowa działająca nań jest więc:

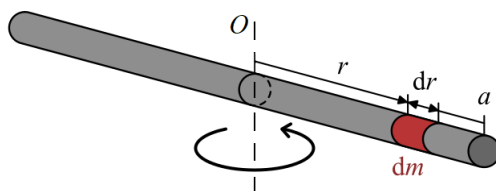
$$dF = \omega^2 r dm,$$

czyli

$$dF = \omega^2 \delta S r dr.$$

Odległość r zmienia się od 0 do a , zatem wypadkowa sił wszystkich elementów będzie

$$F = \omega^2 \delta S \int_0^a r dr = \omega^2 \delta S \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_0^a = \omega^2 \delta S \frac{a^2}{2} = 2\pi n^2 \delta S a^2 \dots$$



Rys. 1³

²Jednym z nich był uczeń Technikum Mechanicznego w Rzeszowie – *Iwo Białynicki-Birula* (1. laureat I OF – patrz lista laureatów na stronie www.KGOF.edu.pl), późniejszy profesor i przewodniczący Komitetu Głównego Olimpiady Fizycznej olimpiad od XVIII (1968/69) do XXII (1972/73). Ze wspomnieniem profesora można zapoznać się ze wstępu w: *50 lat olimpiad fizycznych. Wybrane zadania z rozwiązaniami*. WN PWN, Warszawa 2002, s. 11 (przyp. red.)

W zadaniu tym wielu uczestników popełniło ten sam błąd biorąc siłę rozrywającą dwukrotnie za dużą. Dodawali bowiem do siebie wypadkowe sił odśrodkowych obu połówek pręta i dopiero tę sumę traktowali jako siłę rozrywającą. Wystarczy jednak zauważyć, że gdyby nie było jednej połówki pręta, to i tak w myśl III zasady Newtona zjawiałaby się tej samej wielkości i również przeciwnie skierowana siła reakcji osi. Gdy są obie połowy pręta, wtedy siła odśrodkowa jednej z nich równoważy siłę odśrodkową drugiej przejmując „czynność” osi.

Średnia ocena za to zadanie wyniosła 3 punkty. Rozwiązań z oceną co najmniej 5 punktów było 18, co stanowi 37%.⁴

³Przy opracowaniu zadania do bazy zadań KGOF rys. został na nowo wykonany i uzupełniony w stosunku do zamieszczonego w źródle *Olimpiady Fizyczne I–IV*.

⁴Zadanie to z teoretycznych, po zad. T1 ze średnią 5,9 pkt, wypadło najlepiej. Średnia na uczestnika zawodów III stopnia wyniosła 23,3 pkt na 50 pkt możliwych (przyp. red.).