

## XI OLIMPIADA FIZYCZNA (1961/1962). Stopień II, zadanie doświadczalne – D

<b>Źródło:</b>	Komitet Główny Olimpiady Fizycznej; Czesław Ścisłowski: Fizyka w Szkole nr 3, 1962 r.; Piotr Halfter: Olimpiady Fizyczne XI i XII, PZWS, Warszawa 1966.
<b>Nazwa zadania:</b>	Wyznaczanie oporu woltomierza
<b>Działy:</b>	Elektryczność
<b>Słowa kluczowe:</b>	prąd, elektryczny, napięcie, natężenie, SEM, siła elektromotyczna, prawo Ohma, Kirchhoffa, obwód, opór właściwy, rezystancja, woltomierz, akumulator, rezystor, wyłącznik, opornik

### Zadanie doświadczalne – D, zawody II stopnia, XI OF

Masz do dyspozycji: akumulator, woltomierz, dwa oporniki o znacznych oporach, wyłącznik i przewody do łączenia. Korzystając z danych przyrządów wyznacz możliwie dokładnie opór woltomierza. Opór wewnętrzny akumulatora można pominąć. Dokonaj co najmniej trzech pomiarów stosując różne sposoby łączenia.

#### Rozwiązanie

Mierząc napięcie na końcach jakiegoś odcinka obwodu łączymy woltomierz równolegle z tym odcinkiem. Wskutek tego zmniejsza się natężenie prądu płynącego przez badany odcinek obwodu. Dążymy do tego, by zmiana natężenia prądu była możliwie najmniejsza. W tym celu posługujemy się woltomierzem o możliwie dużym oporze.

Zwykle opory wewnętrzne woltomierzy osiągają wartość od kilku do kilkudziesięciu tysięcy omów. Opór wewnętrzny akumulatora (utrzymywanego w należytym stanie) jest mały nie tylko w porównaniu z oporem woltomierza, lecz i w porównaniu z nieuniknionymi błędami, które popełnia się przy wyznaczaniu oporów. Właśnie dlatego opór wewnętrzny akumulatora w dalszych rozważaniach pomijamy.

Prąd elektryczny przepływający przez woltomierz powoduje wychylenie wskazówki miernika o kąt  $\alpha$  proporcjonalny do natężenia tego prądu:

$$\alpha = c I$$

Natężenie prądu z kolei zależy od różnicy potencjałów  $\Delta U$  na zaciskach woltomierza i od oporu wewnętrznego  $R_w$  jego cewki, to znaczy, że

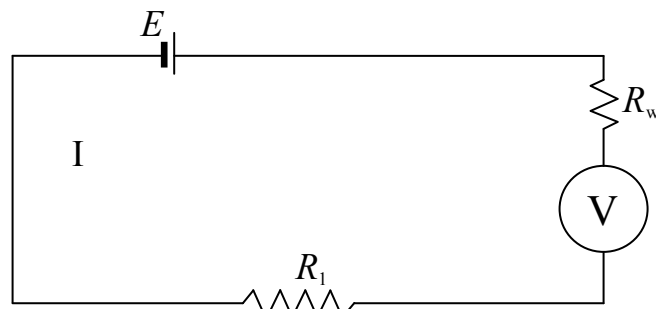
$$I = \frac{\Delta U}{R_w}$$

Ponieważ opór  $R_w$  jest stały, wychylenie wskazówki zależy tylko od  $\Delta U$ .  
Zatem

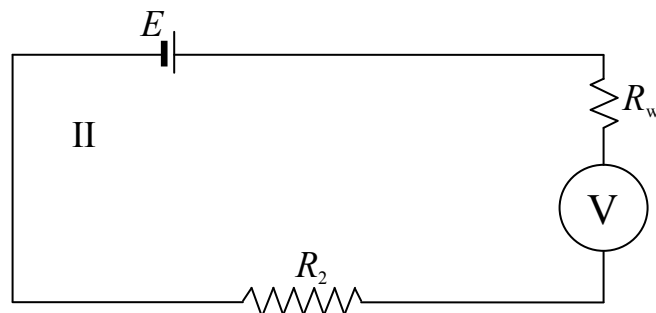
$$\alpha = k \Delta U, \quad \text{gdzie} \quad k = \frac{c}{R_w}$$

Tak więc woltomierz mierzy napięcie, które powstaje na jego zaciskach po włączeniu w obwód. Opierając się na tym możemy wyznaczyć opór wewnętrzny woltomierza.

W zasadzie do wyznaczenia oporu wewnętrznego woltomierza wystarczają pomiary dokonane dwoma różnymi opornikami. Tworzymy obwody według schematów przedstawionych na rysunku 1 i 2.



Rys. 1



Rys. 2

Na tych schematach oznaczono przez  $R_w$  opór wewnętrzny woltomierza.

Dla obwodu I mamy:

$$E = I_1(R_1 + R_w) \quad (1)$$

Dla obwodu II mamy:

$$E = I_2(R_2 + R_w) \quad (2)$$

Zgodnie ze wzmianką uczynioną poprzednio

$$U_1 = I_1 \cdot R_w \quad \text{oraz} \quad U_2 = I_2 \cdot R_w$$

gdzie  $U_1$  i  $U_2$  są wartościami wskazanymi przez woltomierz.

Stąd

$$I_1 = \frac{U_1}{R_w}; \quad I_2 = \frac{U_2}{R_w}$$

Wartości  $I_1$  oraz  $I_2$  podstawiamy do równań 1 i 2 i otrzymujemy:

$$E = \frac{U_1}{R_w}(R_1 + R_w); \quad E = \frac{U_2}{R_w}(R_2 + R_w)$$

Z tego wynika, że

$$\frac{U_1}{R_w}(R_1 + R_w) = \frac{U_2}{R_w}(R_2 + R_w)$$

$$U_1 R_1 + U_1 R_w = U_2 R_2 + U_2 R_w$$

$$R_w(U_1 - U_2) = U_2 R_2 - U_1 R_1$$

$$R_w = \frac{U_2 R_2 - U_1 R_1}{U_1 - U_2}$$

Podstawiając wartości danych oporów oraz odczytane wskazania woltomierza otrzymamy wartość oporu woltomierza.

Nie ograniczamy się jednak do dokonania opisanych pomiarów, ponieważ opory, którymi dysponujemy (rzędu  $10^3 \Omega$ ) wyznaczone są z dokładnością kilku procent. To znaczy, że opór opornika wynosi np.  $R + 0,05 R$ . Im większy jest opór, tym większą niepewnością (stałą) obciążony jest otrzymany wynik.

Nieuniknione są również przypadkowe błędy powstające np. wskutek trudności dokładnego odczytania wskazania woltomierza przy pewnych położeniach wskazówki oraz wskutek niedokładnych wskazań woltomierza (tak zwane uchyby woltomierza).

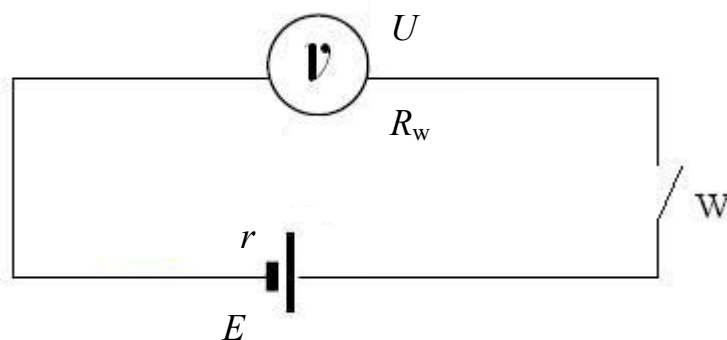
Biorąc to wszystko pod uwagę zestawiamy kilka układów łącząc w rozmaity sposób woltomierz z opornikami i wyznaczamy na każdym razem opór woltomierza. Średnia arytmetyczna uzyskanych wyników jest przybliżoną wartością oporu wewnętrznego woltomierza.

Zawodnicy w różny sposób montowali obwody. Przytoczmy tu jedno z lepszych rozwiązań.

1. Uczeń najpierw zestawia obwód celem ustalenia wartości siły elektromotorycznej. Po zamknięciu obwodu woltomierz wskazuje napięcie  $U$ .

$$U = E - I_w r$$

gdzie  $r$  oznacza opór wewnętrzny akumulatora (rys. 3).



Rys. 3

Natężenie prądu  $I_w$  jest małe, ponieważ opór woltomierza jest rzędu  $10^3 \Omega$ . Opór wewnętrzny akumulatora też jest mały (rzędu  $10^{-2} \Omega$ ). Wobec tego uzasadnione jest przyjęcie, że  $E = U$  (napięcie na przewodach nie uwzględniamy).

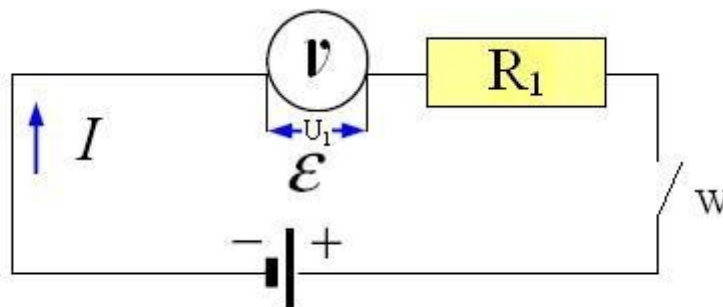
Wobec tego

$$E = 2 \text{ V.}$$

2. Następnie zawodnik zestawia obwód według schematu przedstawionego na rysunku 4.

W tym układzie mamy:

$$E = 2 \text{ V}; R_1 = 2130 \Omega \text{ (dany opór); } U_1 = 1,5 \text{ V (odczytane dane woltomierza).}$$



Rys. 4

Wobec tego

$$E = U_1 + I R_1,$$

gdzie

$$U_1 = I R_w.$$

Skąd

$$I = \frac{U_1}{R_w}.$$

Podstawiając wartość  $I$  do (3) mamy

$$E - U_1 = \frac{U_1 R_1}{R_w}.$$

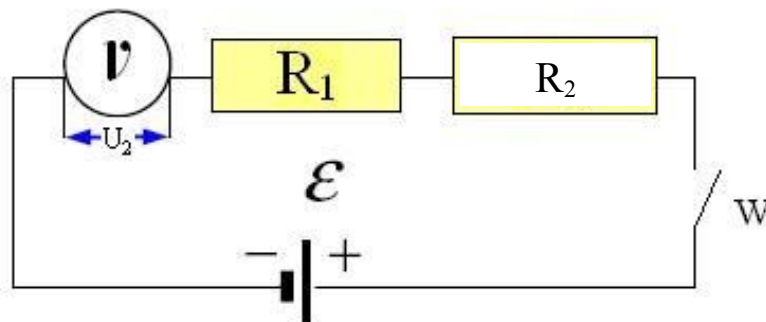
Wobec tego

$$R_w = \frac{U_1 R_1}{E - U_1}.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych

$$R_w = \frac{1,5 \cdot 2130}{2 - 1,5} \Omega = 6\,390 \Omega.$$

3. Następnie zawodnik montuje obwód według schematu przedstawionego na rysunku 5.



Rys. 5

$R_1 = 2\,130 \Omega$  (dane);  $R_2 = 3\,750 \Omega$  (dane);  $U_2 = 1,04 \text{ V}$  (odczytane)

$$E = U_2 + I(R_1 + R_2), \quad E - U_2 = I(R_1 + R_2),$$

gdzie  $I = \frac{U_2}{R_w}$ , zatem

$$E - U_2 = \frac{U_2(R_1 + R_2)}{R_w}.$$

Skąd

$$R_w = \frac{U_2(R_1 + R_2)}{E - U_2}.$$

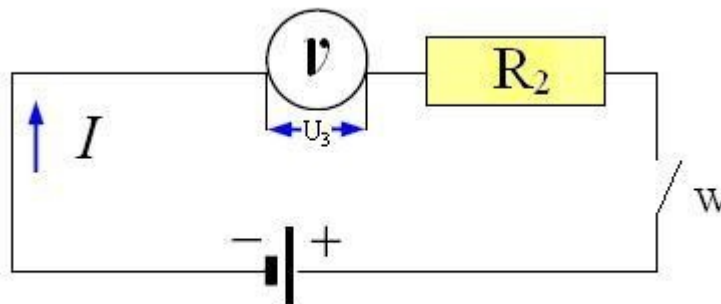
Po podstawieniu wartości liczbowych

$$R_w = \frac{1,04 \cdot (2130 + 3750)}{2 - 1,04} \Omega,$$

otrzymujemy

$$R_w = 6370 \Omega.$$

4. Czwarty układ według schematu przedstawionego na rysunku 6.



Rys. 6

$$R_2 = 3\,750\ \Omega \text{ (dane)}$$

$$U_3 = 1,23\ \text{V (odczyt)}$$

gdzie  $I = \frac{U_3}{R_w}$ , zatem

$$E = U_3 + I R_2,$$

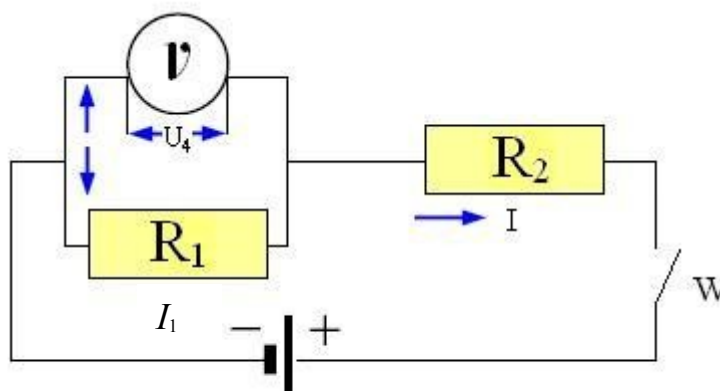
$$E - U_3 = \frac{U_3}{R_w} R_2,$$

$$R_w = \frac{U_3 R_2}{E - U_3},$$

$$R_w = \frac{1,23 \cdot 3750}{2 - 1,23}\ \Omega,$$

$$R_w = 5\,980\ \Omega.$$

5. Zestaw piąty jak na rysunku 7.



Rys. 7

$$U_4 = 0,6\ \text{V (odczyt)}; \quad R_1 = 2\,130\ \Omega; \quad R_2 = 3\,750\ \Omega$$

$$I = I_w + I_1, \quad E = U_4 + I R_2.$$

Stąd

$$E - U_4 = I R_2,$$

więc

$$I = \frac{E - U_4}{R_2}; \quad I_1 = \frac{U_4}{R_1}; \quad I_w = I - I_1 = \frac{E - U_4}{R_2} - \frac{U_4}{R_1}.$$

Stąd

$$I_w = \frac{(E - U_4)R_1 - U_4 R_2}{R_1 R_2}.$$

Ale

$$R_w = \frac{U_4}{I_w}.$$

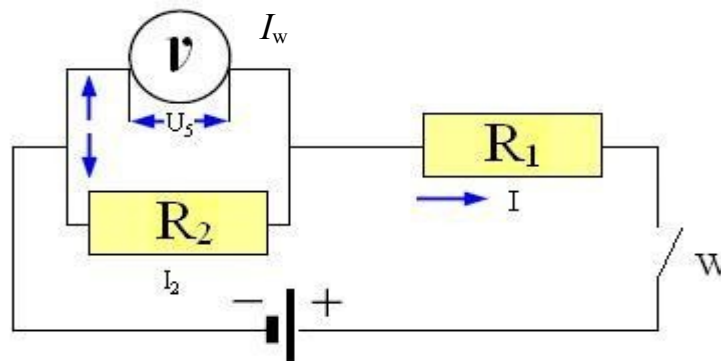
Zatem

$$R_w = \frac{U_4 R_1 R_2}{(E - U_4)R_1 - U_4 R_2} = \frac{U_4 R_1 R_2}{E R_1 - U_4 (R_1 + R_2)}.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych

$$R_w = \frac{0,6 \cdot 2130 \cdot 3750}{2 \cdot 2130 - 0,6 \cdot (2130 + 3750)} \Omega = 6547 \Omega.$$

6. Zestaw szósty jak na rysunku 8.



Rys. 8

$U_5 = 1,04 \text{ V}$  (odczyt);  $R_1 = 3750 \Omega$ ;  $R_2 = 3750 \Omega$

$$I = I_w + I_2 \quad \text{oraz} \quad E = U_5 + I R_1$$

$$I = \frac{E - U_5}{R_1}, \quad I_2 = \frac{U_5}{R_2}, \quad I_w = I - I_2 = \frac{E - U_5}{R_1} - \frac{U_5}{R_2}$$

$$I_w = \frac{(E - U_5)R_2 - U_5 R_1}{R_1 R_2}$$

$$R_w = \frac{U_5}{I_w}$$

$$R_w = \frac{U_5 R_1 R_2}{(E - U_5)R_2 - U_5 R_1} = \frac{U_5 R_1 R_2}{E R_2 - U_5 (R_1 + R_2)}.$$

Po obliczeniu

$$R_w = 6020 \Omega.$$

Tak więc wyniki pomiarów oporu woltomierza są następujące:

$$R_w = 6390 \Omega, 6370 \Omega, 5980 \Omega, 6540 \Omega, 6020 \Omega,$$

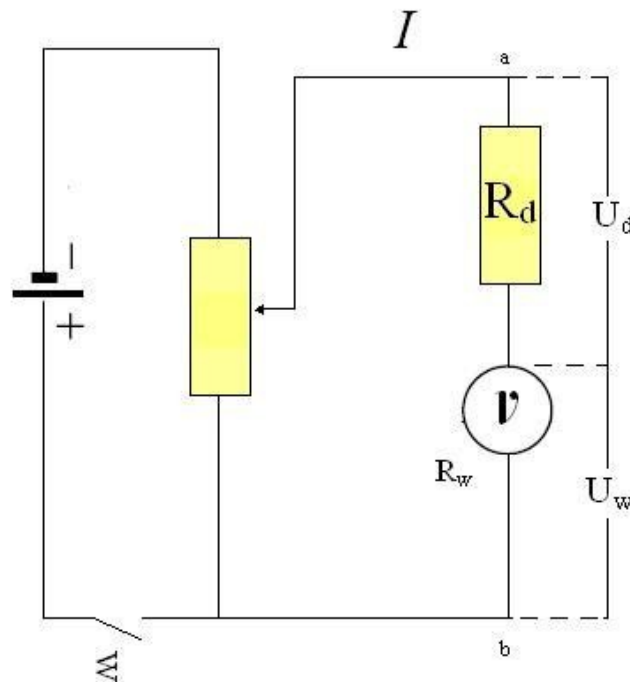
średnia arytmetyczna

$$R_w = \frac{31305}{5} \Omega = 6260 \Omega.$$

Biorąc pod uwagę, że odchylenie trzeciego i piątego pomiaru mało się różnią a mają znaki przeciwne, przyjmuje uczeń, że najbardziej prawdopodobny jest opór woltomierza równy średniej tych wyników, czyli  $6000 \Omega$ .

Z uwagi na to, że zakres woltomierza wynosi  $6 \text{ V}$ , na  $1 \text{ V}$  napięcia przypada opór około  $1000 \Omega$ .

Sprawdzenia tego wyniku można byłoby dokonać mając do dyspozycji opór  $6000 \Omega$ . Postępujemy tak jak przy rozszerzaniu zakresu woltomierza. W tym celu należy, jak wiadomo, zwiększyć opór wewnętrzny woltomierza dołączając do niego szeregowo odpowiednio dobrany opór. Załóżmy, że mamy zamiar posługiwać się woltomierzem do pomiaru napięcia  $n$  razy większego. Przyłączamy szeregowo do woltomierza dodatkowy opór  $R_d$ . Opór  $R_d$  powinien być tak dobrany, by napięcie  $U_{ab} = nU$ , gdzie  $U$  oznacza maksymalne napięcie, jakie wskazać może woltomierz.



Rys. 9

Wówczas

$$U_{ab} = U_d + U_w.$$

Stąd

$$U_d = U_{ab} - U_w.$$

$U_w$  jest napięciem  $n$  razy mniejszym od napięcia panującego na zaciskach  $ab$ , czyli

$$U_{ab} = U_w n.$$

Wobec tego

$$U_d = U_w n - U_w = U_w (n - 1) \quad (3)$$

Ze schematu widać, że

$$U_d = I R_d, \quad \text{zaś} \quad U_w = I R_w.$$

Zatem przedstawiając do (3) wartości  $U_d$  i  $U_w$  z (4), otrzymamy

$$I R_d = I R_w (n-1),$$

czyli

$$R_d = R_w (n-1).$$

Jeżeli mamy zamiar podwoić zakres woltomierza ( $n = 2$ ), to opór dodatkowy powinien równać się oporowi woltomierza, bowiem

$$R_d = R_w (2-1),$$

czyli

$$R_d = R_w.$$

W danym przypadku zakres woltomierza wynosi 6 V. Jeżeli woltomierz połączony szeregowo z oporem dodatkowym  $R_d = R_w = 6000 \Omega$  przyłączymy do źródła o napięciu 6 V, to woltomierz powinien wskazać dokładnie 3 V. (Jeżeli opór woltomierza rzeczywiście wynosi 6000  $\Omega$ ).

**Inny sposób rozwiązania** (dopisek red.)

### Część teoretyczna

Wartość prądu przepływającego przez woltomierz  $I$  możemy obliczyć z prawa Ohma gdy doprowadzimy napięcie  $U$

$$I = \frac{U}{R_c + R_{sz}}$$

gdzie

$R_c$  – rezystancja cewki ruchowej woltomierza

$R_{sz}$  – rezystancja rezystora szeregowego.

Wartość mierzonego napięcia  $U$  jest ograniczona dopuszczalną wartością prądu  $I$ , który może przepłynąć przez woltomierz. W celu poszerzenia zakresu pomiarowego woltomierza należy włączyć dodatkowy rezystor  $R_d$ , o takiej wartości, aby wartość dopuszczalna prądu  $I$  pozostała bez zmiany. Prąd  $I$  przepływa przez ustrój pomiarowy woltomierza oraz przez dodatkowy opornik  $R_d$  (patrz rysunek). Można to zapisać w postaci zależności:

$$I = \frac{U}{R_c + R_{sz}} = \frac{U' - U}{R_d}$$

$$U \cdot R_d = (U' - U)(R_c + R_{sz})$$

$$R_d = \frac{U' - U}{U} (R_c + R_{sz}) = \left( \frac{U'}{U} - 1 \right) (R_c + R_{sz})$$

Oznaczając stosunek

$$\frac{U'}{U} = n, \quad U' = nU$$

Otrzymamy

$$R_d = (n-1)(R_c + R_{sz})$$

$$R_c = \frac{R_d}{n-1} - R_{sz}$$

Przyjmujemy:

$$n = 10, R_d = 10 \text{ k}\Omega, R_{sz} = 1 \text{ k}\Omega.$$

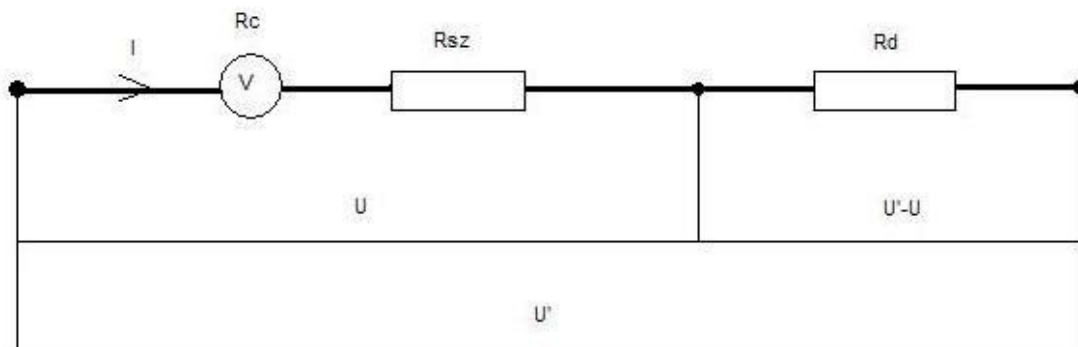
Stosując odpowiedni rezystor dodatkowy  $R_d$  można zwiększyć  $n$ -krotnie zakres pomiarowy woltomierza w stosunku do napięcia  $U$  dopuszczalnego woltomierza dla tego samego ustroju (miernikowcy mówią mechanizm). Mechanizmy mierników magnetoelektrycznych są budowane na unifikowany prąd  $I = 50$  lub  $100 \mu\text{A}$ . Stosuje się rezystory o dużej tolerancji dokładność 0,05 lub 0,1%. Realizującą cele zadania znając wartość rezystora szeregowego  $R_{sz}$  i rezystancję rezystora dodatkowego i wartość  $n > 1$  możemy rezystancję woltomierza  $R_c$  nie wykonując pomiarów.

W elektronice, ze względu na bardzo dużą rezystancję wewnętrzną źródeł prądu, stosowane są woltomierze o rezystancji wewnętrznej rzędu setek kiloohmów. Stosuje się rezystory masowe.

Aby prąd płynący przez woltomierz nie obciążał obwodu pomiarowego, do którego woltomierz jest przyłączony, wartość prądu  $I$  powinna być jak najmniejsza tzn. na 1 V mierzonego przez woltomierz napięcia powinna przypadać jak największa rezystancja. Rezystancja na 1V jest wielkością charakteryzującą czułość miernika. I tak np. jeżeli woltomierz pobiera prąd 5 mA na 1 V mierzonego napięcia to jego rezystancja wynosi  $200 \Omega$  na 1 V, a więc zakres miernika wynosi np. 500 V to rezystancja woltomierza będzie  $10\,000 \Omega$ .

### Część doświadczalna

Do dyspozycji jest: akumulator, woltomierz, dwa rezystory o znanych rezystancjach, wyłącznik i przewody.



Rys. 10

Korzystając z danych przyrządów wyznaczamy rezystancję woltomierza  $R_c$ . Rezystancję wewnętrzną akumulatora można pominąć. Woltomierz ma oprócz ustroju pomiarowego dodatkowo rezystor połączony z nim szeregowo.

### Wnioski:

Konsultując system pomiaru napięcia-woltomierz rozszerzonym zakresem znając rezystory dodatkowe  $R_{szeregowy}$  i  $R_{dodatkowe}$  przyjmując  $n = U'/U$  możemy obliczyć rezystancję wewnętrzną mechanizmu woltomierza  $R_c$  (lub inaczej ruchomej cewki).

$U'$  – napięcie rozszerzonego zakresu woltomierza

$U$  – napięcie zakresu podstawowego woltomierza.