XV OLIMPIADA FIZYCZNA (1965/1966). Stopień I, zadanie teoretyczne – T3.

Źródło: Olimpiady Fizyczne XV i XVI, PZWS Warszawa 1969

Autor: Tadeusz Pniewski

Nazwa zadania: Równowaga wagi

Działy: Hydrodynamika

Słowa kluczowe: prawo Torriccelego, siła, równowaga, III zasada dynamiki

Zadanie teoretyczne – T3, zawody I stopnia, XV OF.

Na ramionach wagi zawieszone są dwa jednakowe naczynia zawierające tę samą ilość wody. W dnie jednego z naczyń jest otwór o małej średnicy. Taki sam otwór jest w ścianie bocznej drugiego naczynia tuż nad jego dnem. Przez otwory te w pewnym momencie zaczyna wypływać woda. Czy równowaga wagi zostanie zachowana?
Uzasadnij odpowiedź.

Rozwiązanie

Z prawa Torricellego wiadomo, że prędkość wypływu cieczy zależy jedynie od wysokości słupa cieczy znajdującego się ponad otworem, przez który następuje wypływ. Prędkość ta wyraża się wzorem:

$$v=\sqrt{2gh}. \tag{1}$$

Zgodnie z warunkami zadania możemy przyjąć, że otwory w obu naczyniach znajdują się na tej samej głębokości pod swobodną powierzchnia wody. Zatem wypływ wody z obu naczyń zachodzi z tą samą prędkością. Ponieważ ponadto wielkości otworów są jednakowe, wiec i masy wody wypływającej w jednostce czasu z obu naczyń są jednakowe. Wynika stąd, że przez cały czas trwania wypływu ciężary obu naczyń z woda są sobie równe. Nie oznacza to jednak, że waga znajduje się w równowadze.

Ciężary naczyń z wodą nie są jedynymi działającymi tu siłami. Z III zasady dynamiki Newtona wynika, że z wypływem wody musi być związane występowanie siły odrzutu skierowanej przeciwnie do kierunku wypływu.

W celu znalezienia tej siły skorzystamy z II zasady dynamiki zapisanej w postaci:

$$F=\frac{m}{t}v, \tag{2}$$

gdzie: $\frac{m}{t}$ - masa wody wypływającej przez otwór w ciągu jednostki czasu,

v – prędkość wypływu.

Jeżeli znana powierzchnia otworu S, to stosunek $\frac{m}{t}$ można wyrazić następująco:

$$\frac{m}{t} = \rho S v \qquad (3)$$

gdzie: ρ - gęstość cieczy, iloczyn Sv – objętość wody wypływająca w ciągu jednej sekundy z naczynia.

Podstawiając wyrażenie (3) do wzoru (2) otrzymujemy na siłę odrzutu następujące wyrażenie:

$$F = \rho S v^2 \qquad (4)$$

Ze wzoru (1) mamy:

$$v^2 = 2gh \qquad (5)$$

Zatem ostatecznie siła odrzutu dana jest wzorem:

$$F = 2Shg\rho. \qquad (6)$$

W tym naczyniu, w którym otwór znajduje się w dnie, siła F jest skierowana pionowo ku górze. Na ramię wagi działa więc siła równa różnicy

$$F_1 = P - F, \qquad (7)$$

gdzie: P – ciężar naczynia z wodą;

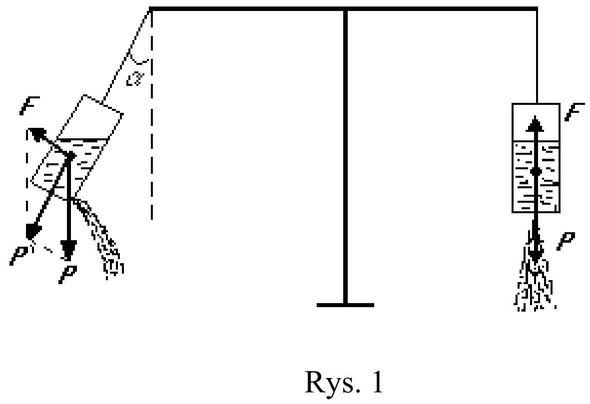
W drugim naczyniu wypływ wody zachodzi w kierunku poziomym. Zatem pionowa składowa odrzutu równa jest zeru. Na ramię wagi działa siła równa ciężarowi naczynia z wodą:

$$F_2 = P. \qquad (8)$$

Zachodzi więc, jak wynika ze wzorów (7) i (8), nierówność:

$$F_1 < F_2 \qquad (9)$$

Jeżeli przyjąć, że pod wpływem poziomo działającej siły odrzutu, szalka wagi ulega odchyleniu od kierunku pionowego, to pojawi się wówczas składowa pionowa siły F. Sytuację ilustruje rysunek 1.



Rys. 1

Na szalkę odchylona o kąt α od pionu działa siła:

$$P^{'} = P \cos\alpha \qquad (10)$$

Na odchylenie ramienia wagi od położenia równowagi ma wpływ jedynie składowa pionowa siły *P'* :

$$F'_2 = P' \cos\alpha = P \cos^2\alpha = P \cdot (1 - \sin^2\alpha) \qquad (11)$$

Ponieważ

$$\sin\alpha = \frac{F}{P}, \qquad (12)$$

zatem podstawiając wyrażenie (12) do wzoru (11) mamy:

$$F'_2 = P - F \sin\alpha\ . \qquad (13)$$

Porównując wyrażenia (7) i (13) na siłę działającą na poszczególne szalki wagi, stwierdzamy, że i w tym przypadku zachodzi nierówność:

$$F_1 < F'_2\ ,$$

a więc równowaga nie jest zachowana.