XV OLIMPIADA FIZYCZNA 1965/1966. Etap I, zadanie teoretyczne – T1.

Źródło: Olimpiady Fizyczne XV i XVI, PZWS Warszawa,1969

Autor: Tadeusz Pniewski

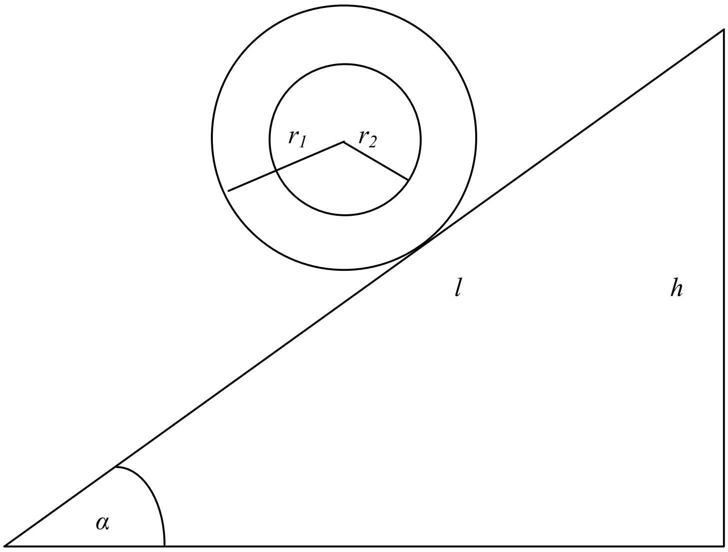
Nazwa zadania: Toczenie się po równi pochyłej

Działy: Mechanika

Słowa kluczowe: Ruch jednostajnie przyspieszony, energia, zasada zachowania energii,

Zadanie teoretyczne – T1, zawody I stopnia, XV OF.

Po równi pochyłej o kącie nachylenia α toczy się odcinek rury metalowej o promieniu zewnętrznym r_1, promieniu wewnętrznym r_2 i masie m (rys. 1).



Rys.1

1. Jaką prędkość osiągnie środek ciężkości rury po przebywaniu drogi l jeżeli prędkość początkowa wynosiła zero?
2. W jakim czasie środek ciężkości rury przebędzie tę drogę?
3. Jakie jest przyspieszenie środka ciężkości rury na równi?

Przedyskutować otrzymane wyniki.

Rozwiązanie

Zadanie rozwiązujemy opierając się na zasadzie zachowania energii. Rura staczając się po równi pochyłej traci energię potencjalną. Ubytek energii potencjalnej po przebyciu przez rurę drogi l wynosi:

$$E_P = mgh = mgl\sin\alpha. \qquad (1)$$

Energia ta zostaje zamieniona na energie kinetyczną E_k toczącej się rury. Zachodzi, więc równość:

$$E_P = E_K . \tag{2}$$

Ruch rury można rozpatrywać jako kombinację dwóch ruchów: postępowego i obrotowego. Energie kinetyczną można wiec zapisać w postaci:

$$E_K = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \varpi^2 , \tag{3}$$

której pierwszy składnik wyraża energie kinetyczną ruchu postępowego, zaś drugi energie kinetyczną ruchu obrotowego rury: v i ω są odpowiednio liniową i kątową prędkością toczącej się rury. Są one związane następującą zależnością:

$$\omega = \frac{v}{r_1} . \tag{4}$$

W chwili początkowej obydwie te prędkości równe są zeru. I jest momentem bezwładności rury względem jej osi.
W przypadku punktu materialnego moment bezwładności określony jest wzorem:

$$I = mr^2 \tag{5}$$

gdzie: m- oznacza masę punktu materialnego,
r - odległość tego punktu od osi obrotu.
W praktyce mamy do czynienia nie z punktami materialnymi, lecz z ciałami o ciągłym rozkładzie masy.

W tym przypadku moment bezwładności znajdujemy sumując (całkując) iloczyny mas nieskończonych małych elementów badanego ciała przez kwadraty ich odległości od osi obrotu. Suma ta dla odcinka rury metalowej o promieniu zewnętrznym r_1, promieniu wewnętrznym r_2 i masie m oraz dla osi obrotu pokrywającej się z osią rury dana jest wzorem:

$$I = \frac{1}{2} m\left(r_1^2 + r_2^2\right) \tag{6}$$

Wykorzystując zależności (1),(3) i (4) możemy równość (2) napisać w postaci:

$$mgl \sin\alpha = \frac{v^2}{2}\left(m + \frac{I}{r_1^2}\right). \tag{7}$$

Skąd obliczamy prędkość środka ciężkości rury po przebyciu drogi l. Wynosi ona:

$$v = \sqrt{\frac{2mgl \sin\alpha}{m + \frac{I}{r_1^2}}} \tag{8}$$

a stąd po podstawieniu w miejscu momentu bezwładności I wyrażenia (6) otrzymujemy zależność pomiędzy prędkością środka ciężkości staczającej się po równi pochyłej rury a przebytą przez nią drogą l:

$$v = \sqrt{\frac{4gl\sin\alpha}{3+\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}}. \tag{9}$$

Przyspieszenie środka ciężkości rury wyznaczamy korzystając ze znanego wzoru:

$$v = \sqrt{2la}. \tag{10}$$

Wynosi ono:

$$a = \frac{v^2}{2l} = \frac{2g\sin\alpha}{3+\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2} \tag{11}$$

A czas, w jakim środek ciężkości rury przebywa drogę l, równy jest:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{l\frac{3+\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}{g\sin\alpha}}. \tag{12}$$

Przeprowadźmy teraz porównanie pomiędzy ciałem **zsuwającym się** po równi pochyłej i ciałem **staczającym się** z równi pochyłej. Zauważmy, że w przypadku ciała zsuwającego się po równi pochyłej bez tarcia słuszne są następujące zależności:

$$\begin{aligned} v_o &= \sqrt{2gl\sin\alpha} \\ a_o &= g\sin\alpha \\ t_o &= \sqrt{\frac{2l}{g\sin\alpha}} \end{aligned} \tag{13}$$

Zauważmy, że oba zespoły wielkości:

v, a, t — tzn. prędkość, przyspieszenie i czas dla ciała staczającego się po równi wyrażone wzorami (10),(11),(12)

v_0, a_0, t_0 — tzn. prędkość, przyspieszenie i czas dla ciała zsuwającego się po równi wyrażone wzorami(13)

związane są następującymi zależnościami:

$$v = \sqrt{\frac{2}{3 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}}\, v_o$$

$$a = \frac{2}{3 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}\, a_0 \qquad (14)$$

$$t = \sqrt{\frac{3 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}{2}}\, t_o$$

Widzimy, że jeżeli ciało stacza się po równi pochyłej, to jego prędkość i przyspieszenie są mniejsze, a czas trwania ruchu dłuższy aniżeli w przypadku, gdy zsuwa się ono po równi bez tarcia.

Prędkość, przyspieszenie i czas trwania ruchu zależą od stosunku promieni: zewnętrznego i wewnętrznego rury.

W granicznym przypadku, gdy $r_2 = 0$, więc, gdy mamy do czynienia nie z rurą, lecz z walcem, otrzymujemy:

$$v = \sqrt{\frac{2}{3}}\, v_o, \quad a = \frac{2}{3} a_o, \quad t = \sqrt{\frac{3}{2}} t_{o.} \qquad (15)$$