XVII OLIMPIADA FIZYCZNA (1967/1968). Stopień II, zadanie teoretyczne – T2

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Czesław Ścisłowski: Olimpiady Fizyczne XVII i XVIII. PZWS Warszawa 1971.

Nazwa zadania: Objętość balonu wypełnionego wodorem.

Działy: Termodynamika.

Słowa kluczowe: ciśnienie, atmosferyczne, objętość, temperatura, masa, prawa, przemiana izobaryczna, gaz doskonały, wodór, balon.

Zadanie teoretyczne – T2, zawody II stopnia, XVII OF.

Balon o objętości V napełniono wodorem o temperaturze 15°C. Przy stałym (normalnym) ciśnieniu atmosferycznym balon nagrzał się do temperatury 37°C. dzięki temu przez wentyl balonu wydostało się 6,05 kg gazu. Jaka jest objętość balonu? Przyjąć gęstość wodoru w warunkach normalnych 0,009 kg/m³.

Rozwiązanie

Sposób 1. Z treści zadania wynika, że gaz znajdujący się w balonie uległ przemianie izobarycznej. Przyjmiemy, że gaz zajmujący objętość V_1 w temperaturze t_1 = 15°C (288 K) po ogrzaniu do temperatury t_2 = 37°C (310 K) zajmuje objętość V_2. Dla przemiany izobarycznej słuszna jest następująca zależność

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \tag{1}$$

Objętość gazu, który wypłynął z balonu wynosi

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \frac{m}{\rho_2} \tag{1a}$$

gdzie m – masa gazu, który wypłynął z balonu, a ρ – gęstość gazu, w temperaturze t_2 inaczej T_2. Z równania (1a) wynika, że

$$V_1 = V_2 - \frac{m}{\rho_2} \tag{2}$$

Rozwiązując równania (1) i (2) otrzymamy

$$V_1 = \frac{mT_1}{\rho_2(T_2 - T_1)}$$

Ale

$$\frac{\rho_2}{\rho_0} = \frac{T_0}{T_2}$$

Zatem

$$V_1 = \frac{mT_1T_2}{\rho_0 T_0(T_2 - T_1)}$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy dla V_1 wartość około 1000 m³.

Sposób 2. Oznaczmy masę gazu w balonie w temperaturze T_1 przez M. masa gazu, który wypłynął balonu przez wentyl niech będzie m, Wówczas:

$$M = V\rho_1 \quad \text{oraz} \quad M - m = V\rho_2 \tag{1}$$

inaczej

$$V\rho_1 - m = V\rho_2 \tag{2}$$

Gdzie ρ_1 i ρ_2 – gęstości gazu w temperaturach T_1 oraz T_2. Z równania (2) wynika, że

$$V = \frac{m}{\rho_1 - \rho_2}. \tag{3}$$

Dla procesów izobarycznych

$$\frac{\rho_0}{\rho_2} = \frac{T_2}{T_0} \quad \text{oraz} \quad \frac{\rho_0}{\rho_1} = \frac{T_1}{T_0}.$$

Podstawiając do równania (3) wyrażenia na ρ_1 i ρ_2 z wyżej podanych zależności otrzymujemy:

$$V = \frac{m}{\frac{\rho_0 T_0}{T_1} - \frac{\rho_0 T_0}{T_2}} = \frac{m T_1 T_2}{\rho_0 T_0 (T_2 - T_1)}$$

Podstawiając do tego wzoru dane otrzymamy, że objętość balonu V wynosi około 1000 m^3.

Sposób 3. Jeżeli objętość wodoru, który uszedł z balonu, oznaczymy przez V', to dla tej masy gazu możemy napisać następującą zależność

$$\frac{p_0 V_0'}{T_0} = \frac{p_0 V_2'}{T_2}$$

Ciśnienia w obydwu stanach będą jednakowe, gdyż jest to proces izobaryczny. Z powyższego równania wynika, że

$$V_2' = \frac{V_0' T_2}{T_0} = \frac{m T_2 p_0 V_0'}{\rho_0 T_0} \tag{1}$$

m, oznacza tu masę wodoru który wypłynął przez wentyl z balonu V_2 – objętość, jaką zajęłaby ta masa gazu w temperaturze T_2.

Jeżeli objętość, jaką zajmuje wodór w temperaturze T_1, wynosi V, a objętość, jaką gaz w balonie zająłby w temperaturze T_2 oznaczymy przez V_2, to

$$\frac{V}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}.$$

Zależność tę możemy przedstawić także w sposób następujący:

$$\frac{V}{T_1} = \frac{V + V_2'}{T_2}$$

skąd:

$$\frac{V}{T_1} - \frac{V}{T_2} = \frac{V_2'}{T_2} \tag{2}$$

Na podstawie równań (1) i (2) możemy zapisać:

$$\frac{V(T_2 - T_1)}{T_1 T_2} = \frac{m}{\rho_0 T_0}$$

Ostatecznie

$$V = \frac{mT_1T_2}{\rho_0 T_0 (T_2 - T_1)}$$

Po podstawieniu danych otrzymamy dla V wartość około 1000 m^3.

Sposób 4. Oznaczmy masę wodoru, który uszedł z balonu przez m, jego objętość przez V_1, a objętość balonu przez V. Niech ρ_2 oznacza gęstość wodoru w temperaturze T_2. Na podstawie zależności dotyczącej procesu izobarycznego dla gazu doskonałego możemy zapisać

$$\frac{V}{T_1} = \frac{V + V_1}{T_2}.$$

Z tego równania wyznaczamy V

$$V = \frac{V_1 T_1}{T_2 - T_1}.$$

Ale

$$V_1 = \frac{m}{\rho_2}.$$

Natomiast

$$\rho_2 = \frac{T_0 \rho_n}{T_2}.$$

Zatem

$$V = \frac{mT_1}{\rho_2 (T_2 - T_1)} = \frac{mT_1T_2}{T_0 \rho_0 (T_2 - T_1)}$$

Podstawiając dane otrzymamy w przybliżeniu V wartość około 1000 m^3. Jest to rozwiązanie krótkie i proste.

Sposób 5. Oznaczmy masę wodoru w balonie M_1, zaś przez ρ_1 gęstość wodoru w temperaturze T_1. Objętość balonu wynosi

$$V = \frac{M_1}{\rho_1} \tag{1}$$

Te sama objętość balonu możemy wyrazić i w sposób następujący:

$$V = \frac{M_2}{\rho_2} \tag{2}$$

Gdzie M_2 – masa wodoru, zaś ρ_2 – gęstość tego gazu w temperaturze T_2. Ale $M_2 = M_1 - m$, gdzie m – masa wodoru, który uszedł z balonu. Dla procesu izobarycznego możemy napisać następująca zależność

$$T_0 \rho_0 = T_1 \rho_1 = T_2 \rho_2$$

Ze wzoru tego wyznaczamy ρ_1 i ρ_2 w zależności od ρ_0 i wstawiamy do wzorów (1) i (2). Wówczas otrzymujemy:

$$V = \frac{M_1 T_1}{T_0 \rho_0}, \tag{3}$$

oraz

$$V = \frac{(M_1 - m) T_2}{T_0 \rho_0} \tag{4}$$

Z równania (3) wyznaczamy M_1

$$M_1 = \frac{VT_0\rho_0}{T_1}$$

i wstawiamy do równania (4)

$$V = \left(\frac{VT_0\rho_0}{T_1} - m\right)\frac{T_2}{T_0\rho_0}$$

Ostatecznie

$$V = \frac{mT_1T_2}{\rho_0 T_0 (T_2 - T_1)}$$

Po podstawieniu danych otrzymamy dla V wartość około 1000 m^3.